ДУ: 18 июня 2015 года, первый поток; вариант 2_1

На экзамене не разрешается: пользоваться электронными электронными приборами, конспектами, книгами и другими печатными или рукописными материалам; разговаривать и пользоваться помощью соседей.

Оценки: За ответ на каждый вопрос/задачу начисляются очки, максимальное количество очков указано в скобках перед вопросом/задачей; набранное количество очков складывается с очками, полученными за работу в семестре. Оценка определяется по итоговой сумме: 9-12 очков - удовлетворительно, 13-17 очков - хорошо, 18 и выше - отлично. **Зачёт идёт по 5 задачам!!!**

Задача 1.

(1) Сформулировать теорему о дифференцируемой зависимости решения от параметра задачи Коши для системы дифференциальных уравнений.

(4) Найти образ касательного вектора $(1, 0)$, приложенного в точке $(0, 0)$, под действием преобразования фазового потока за время π системы

$$\begin{cases} \dot{x} &= e^{3x} - e^{5y}, \\ \dot{y} &= \ln(1 + x - y). \end{cases}$$

Задача 2.

(3) Найти все особые точки системы

$$\begin{cases} \dot{x} &= \sqrt{x^2y^2 + 6x + 2y^4 - 1} - y^2, \\ \dot{y} &= \ln(1 + xy) - \ln(1 - 5x), \end{cases}$$

исследовать их на устойчивость, указать их тип. При исследовании на устойчивость для каждой особой точки нужно указать (и обосновать!), является ли она: а) асимптотически устойчивой; б) устойчивой, но не асимптотически; в) неустойчивой.

(2) Нарисовать эскиз фазового портрета системы вблизи каждой из особых точек.

Задача 3.

(3) Найти решение уравнения

$$y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = (x + y)z,$$

принимающее при $x - y = 1$ значение e^y.

(2) В окрестности каких точек начальной кривой $y = e^x$ существование и единственность решения этого уравнения для любой гладкой начальной функции гарантируется теоремой (сформулировать ее)?

ДУ: 18 июня 2015 года, первый поток; вариант 2_2

Задача 4. Для векторного поля системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} &= 1 - x - e^y, \\ \dot{y} &= 2x + y \end{cases}$$

(1) Найти площадь образа области $\{x^2+y^2 \leqslant 4x-2y\}$ под действием преобразования фазового потока данного векторного поля за время 2.

(3) Исследовать на устойчивость нулевое положение равновесия и определить его тип. (При исследовании на устойчивость положения равновесия нужно указать и обосновать, является ли оно: а) асимптотически устойчивым; б) устойчивым, но не асимптотически; в) неустойчивым.)

(1) Выяснить, есть ли у данного векторного поля предельный цикл? Ответ обосновать.

Задача 5.

(3) Выяснить устойчивость системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} &= -x(2+\sin t) + 2y + 3z + \sin t, \\ \dot{y} &= -y + 4z, \\ \dot{z} &= -2z + \cos t. \end{cases}$$

Ответ обосновать.

(2) Есть ли 2π-периодическое решение у этой системы? Ответ обосновать.

Задача 6. Величина биомассы изменяется по закону

$$\dot{m} = 10m - m^2.$$

(2) Найти время, через которое величина биомассы уменьшится в два раза, если в начальный момент эта величина равнялась 30.

(3) Через какое время наблюдатель перестанет замечать изменение величины биомассы, если он не различает значения, отличающиеся менее, чем на 0.1?