ОДУ: досрочный экзамен 30 мая 2012; поток механиков

1. **(1)** Сформулируйте лемму Гронуолла.

   (4) Не используя теорему о непрерывной зависимости решения от параметра, докажите, что значение $\varphi(1,\mu)$ решения $x=\varphi(t,\mu)$ уравнения $\dot{x}=x+t\sin x+\sqrt[3]{\mu}$ с начальным условием $\varphi(0,\mu)=\mu$ непрерывно по μ при $\mu=0$. (Указание: воспользуйтесь леммой Гронуолла и вспомните доказательство теоремы о непрерывной зависимости решения от параметра.)

2. **(1)** Сформулируйте теорему о существовании полной системы первых интегралов в окрестности неособой точки векторного поля.

   (1) Найдите все характеристические точки задачи Коши

$$xy\frac{\partial u}{\partial x}+(3x-y^2)\frac{\partial u}{\partial y}=0, \quad u=-(2x^2+1) \quad \text{при} \quad y=x+1$$

   (3) и решите её.

3. **(1)** Сформулируйте теорему Четаева о неустойчивости.

   (2) Найдите все особые точки системы

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & 1-e^{x^2-y} \\ \dot{y} & = & \operatorname{th}(2+x-x^2) \end{array},$$

   исследуйте их на устойчивость по линейному приближению, укажите их тип.

   (2) Нарисуйте фазовый портрет системы.

4. **(1)** Сформулируйте теорему о выпрямлении непрерывно дифференцируемого векторного поля.

   (4) Найдите производную по параметру μ при $\mu = 0$ решения системы

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x} & = & \cos x + \sin y + \ln z - 1 \\ \dot{y} & = & x^2 - x + e^{2y} - 1 \\ \dot{z} & = & 1/z - 1 \end{array} \right.$$

   с начальными условиями $x(0) = \operatorname{sh}\mu$, $y(0) = \mu^2$, $z(0) = \operatorname{ch}\mu$.

5. **(1)** Сформулируйте теорему Флоке.

   (2) Вычислите определитель матрицы монодромии системы

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x} & = & -x\sin^2 t + y\cos^2 t \\ \dot{y} & = & x\sin t + y \end{array} \right. .$$

   (2) Является ли нулевое решение этой системы устойчивым?