

ОДУ — экзамен 27 июня 2013; первый поток; часть I

На экзамене не разрешается: пользоваться электронными приборами, конспектами, книгами и другими печатными или рукописными материалами; разговаривать и пользоваться помощью соседей.

Оценки: за ответ на каждый вопрос/задачу начисляются очки, максимальное количество очков указано в скобках перед вопросом/задачей; результаты оцениваются по системе 5 из 6, т.е. учитываются очки, набранные за лучшие ответы на 5 групп вопросов (всего предлагается 6 групп, наихудший результат по одной из 6 групп вопросов отбрасывается); также учитываются очки, полученные в течение семестра за контрольные и домашние задания; 9–12 очков — «удовл.», 13–16 очков — «хор.», 17 очков и более — «отл.».

1. (1) Сформулировать теорему единственности решения системы дифференциальных уравнений в нормальной форме.
 - (1) Для каких натуральных n графики двух решений уравнения $y^{(n)} = x + y^2$ могут касаться друг друга? Ответ обосновать.
 - (3) Построить по два последовательных приближения (не считая исходного) к решению уравнения $y'' = 2xy$, $y(1) = 2$, $y'(1) = -1$.
2. (3) Найдите все особые точки системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y^4 - y + 2x \\ \dot{y} = x \end{cases},$$

исследуйте их на устойчивость, укажите их тип. При исследовании на устойчивость для каждой особой точки нужно указать (и обосновать!), является ли она: а) асимптотически устойчивой; б) устойчивой, но не асимптотически; в) неустойчивой.

- (2) Нарисуйте фазовый портрет системы.
3. (1) Найти общее решение $u(x, y)$ уравнения в частных производных

$$(y^4 - y) \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

- (4) Найдите производную $\frac{\partial x}{\partial \mu}$ по параметру μ при $\mu = 0$ решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y^4 - y + 2x \\ \dot{y} = x \end{cases},$$

с начальными условиями $x(0) = \mu$, $y(0) = e^{-\mu}$.

ОДУ — экзамен 27 июня 2013; первый поток; часть II

4. (4) Найдите фазовый поток системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y - 3z \\ \dot{y} = 3x + 2y - 3z \\ \dot{z} = 3x + 3y - 4z \end{cases} .$$

- (1) Найдите объём образа единичного куба при действии этого фазового потока за время $t = 1$.

5. (1) Дайте определение предельного цикла.

- (4) Исследуйте на устойчивость предельный $x^2 + y^2 = 1$ цикл системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y + (3x - 4y)(x^2 + y^2 - 1) \\ \dot{y} = -x + (-x + y)(x^2 + y^2 - 1) \end{cases} .$$

6. (1) Вывести из теоремы о сравнении двух приведённых уравнений второго порядка теорему о чередовании нулей.

- (1) Пусть на некотором отрезке непрерывная функция $q(t)$ обладает свойством $q(t) > 0$. Верно ли, что отношение y'/y для решения уравнения $y'' + q(t)y = 0$ убывает?

- (3) Доказать, что любое нетривиальное решение уравнения $y'' + \frac{y}{1+\sqrt{x}} = 0$ имеет на интервале $(0, +\infty)$ бесконечное множество нулей.