ДУ: 18 июня 2015 года; первый поток; вариант 4_1

На экзамене не разрешается: пользоваться электронными электронными приборами, конспектами, книгами и другими печатными или рукописными материалам; разговаривать и пользоваться помощью соседей.

Оценки: За ответ на каждый вопрос/задачу начисляются очки, максимальное количество очков указано в скобках перед вопросом/задачей; набранное количество очков складывается с очками, полученными за работу в семестре. Оценка определяется по итоговой сумме: 9-12 очков - удовлетворительно, 13-17 очков - хорошо, 18 и выше - отлично. **Зачёт идёт по 5 задачам!!!**

Задача 1.

(1) Сформулировать теорему о дифференцируемой зависимости от параметра решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений.

(4) Найти образ касательного вектора $(1, 0)$, приложенного в точке $(0, 0)$, под действием преобразования фазового потока за единичное время системы

$$\begin{cases} \dot{x} &= \operatorname{tg}(3x) - \operatorname{tg}(4y), \\ \dot{y} &= \sin(x - y). \end{cases}$$

Задача 2.

(3) Найти все особые точки системы

$$\begin{cases} \dot{x} &= 2^{1-8y} - 2^{1+xy}, \\ \dot{y} &= \sqrt{y^4 - 2yx^2 + 3x^4 - 2} - x^2, \end{cases}$$

исследовать их на устойчивость, указать их тип. При исследовании на устойчивость для каждой особой точки нужно указать (и обосновать!), является ли она: а) асимптотически устойчивой; б) устойчивой, но не асимптотически; в) неустойчивой.

(2) Нарисовать эскиз фазового портрета системы вблизи каждой из особых точек.

Задача 3.

(3) Найти решение уравнения

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = (x - y)z,$$

принимающее при $x = 1$ значение $z = y^2 e^{-y}$.

(2) В окрестности каких точек начальной кривой $x = y^2$ существование и единственность решения этого уравнения для любой гладкой начальной функции гарантируется теоремой (сформулировать ее)?

ДУ: 18 июня 2015 года; первый поток; вариант 4_2

Задача 4. Для векторного поля системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} &= \operatorname{arctg} x - 2y, \\ \dot{y} &= x - \frac{y}{1+x^2} \end{cases}$$

(1) Найти площадь образа области $\{x^2 + y^2 \leqslant -4x + 4y\}$ под действием преобразования фазового потока данного векторного поля за время 4.

(3) Исследовать на устойчивость нулевое положение равновесия и определить его тип. (При исследовании на устойчивость положения равновесия нужно указать и обосновать, является ли оно: а) асимптотически устойчивым; б) устойчивым, но не асимптотически; в) неустойчивым.)

(1) Выяснить, есть ли у данного векторного поля предельный цикл? Ответ обосновать.

Задача 5.

(3) Выяснить устойчивость системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} &= -2x - z\cos t, \\ \dot{y} &= x\sin t - y, \\ \dot{z} &= -4z + \sin^2 t. \end{cases}$$

Ответ обосновать.

(2) Есть ли у этой системы 2π-периодическое решение? Ответ обосновать.

Задача 6. Величина биомассы изменяется по закону

$$\dot{m} = 10m - m^2.$$

(2) Найти время, через которое величина биомассы увеличится в два раза, если в начальный момент эта величина равнялась 4.

(3) Через какое время наблюдатель перестанет замечать изменение величины биомассы, если он не различает значения, отличающиеся менее, чем на 0.1?