Программа экзамена

Дифференциальные уравнения,

2-ой курс, 1 поток, 2017-18 учебный год.

Лектор, проф. Давыдов А.А.

1. Основные понятия и задачи теории ОДУ: фазовое и расширенное фазовое пространство, уравнения автономные и неавтономные, решение и общее решение, задача Коши и краевая задача. Примеры (модели).
2. Элементарные методы решения уравнений первого порядка: уравнения с разделяющимися переменными, однородные уравнения, линейные уравнения и уравнения Бернулли, уравнения в полных дифференциалах. Примеры.
3. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Продолжение решений.
4. Уравнения, не разрешённые относительно производной.
5. Линейные системы, однородные и неоднородные. Продолжение их решений. Пространство продолженных решений линейной однородной системы. Фундаментальная система решений. Вронскиан, теорема Лиувилля – Остроградского.
6. Линейные уравнения порядка n. Редукция к случаю системы и следствия из неё (продолжение решений, пространство продолженных решений однородного уравнения; фундаментальная система решений; вронскиан, теорема Лиувилля – Остроградского).
7. Линейные неоднородные уравнения порядка n и системы. Метод вариации произвольных постоянных.
8. Линейные уравнения порядка n с постоянными коэффициентами. Фундаментальная система решений. Квазимногочлены, подбор частных решений при неоднородной части в виде квазимногочлена.
9. Линейные системы с постоянными коэффициентами. Экспонента матрицы и её свойства. Основная теорема теории линейных систем. Примеры.
10. Комплексификация и овеществление линейного уравнения.
11. Классификация линейных однородных систем с постоянными коэффициентами на плоскости. Их фазовые портреты.
12. Пространство векторных квазимногочленов. Теорема о виде частного решения линейной системы с постоянными коэффициентами при неоднородной части в виде векторного квазимногочлена.
13. Теоремы Штурма. Критерии колеблемости/неколеблемости решений.
14. Преобразования фазового потока. Групповое свойство преобразований фазового потока автономного векторного поля. Изменение фазового объема.
15. Непрерывная (дифференцируемая) зависимость решения системы дифференциальных уравнений от начальных данных. Система уравнений в вариациях.
16. Непрерывная (дифференцируемая) зависимость решения задачи Коши системы дифференциальных уравнений от параметров. Уравнение в вариациях по параметру.

17. Теорема о выпрямлении векторного поля (поля направлений) вблизи его неособой точки.
18. Производная функции вдоль векторного поля. Первый интеграл. Теорема о существовании полной системы первых интегралов в окрестности неособой точки дифференцируемого векторного поля.
19. Общее решение линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка вблизи неособой точки векторного поля.
20. Существование и единственность решения задачи Коши для линейного (квазилинейного) уравнения в частных производных первого порядка вблизи нехарактеристической точки поверхности.
21. Устойчивость и асимптотическая устойчивость (по Ляпунову) решения системы дифференциальных уравнений. Устойчивость положения равновесия линейной однородной системы с постоянными коэффициентами.
22. Функция Ляпунова. Теорема об (асимптотической) устойчивости положения равновесия при наличии функции Ляпунова.
23. Устойчивость положения равновесия по линейному приближению.
24. Теорема Четаева.
25. Устойчивость линейных систем.
26. Линейные системы с периодическими коэффициентами. Отображение за период. Логарифм невырожденной матрицы. Теорема Флоке.
27. Устойчивость неподвижной точки гладкого отображения. Устойчивость периодических решений векторных полей с периодической правой частью.
28. Устойчивость периодических решений автономных векторных полей. Отображение Пуанкаре. Вычисление мультипликаторов предельного цикла на плоскости.
29. Предельные множества траекторий. Теорема Бендиксона. Типы предельных циклов.
30. Решение системы уравнений малых колебаний. Всюду плотность иррациональной обмотки тора.

Литература:

В.И.Арнольд, Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984.

Л.С.Понтрягин, Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1982.

А.Ф.Филиппов, Введение в теорию дифференциальных уравнений, М.: УРСС, 2004.

А.Ф.Филиппов, Сборник задач по ОДУ (любое из последних изданий).