10.11.2010 Лекция № 10

Линейные уравнения с постоянными вещественными коэффициентами

Определение

Вещественный квазимногочлен — квазимногочлен, у которого все значения (в действительных точках) действительные. ($\psi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

Утверждение

1) Если $\xi: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ — квазимногочлен, то $\mathrm{Re}\,\xi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — вещественный квазимногочлен
$(\mathrm{Re}\,\xi = \frac{1}{2}(\xi + \overline{\xi}))$

$f: \cancel{X} \mapsto \mathbb{C}$ $\qquad \xi(t) = p(t)e^{\lambda t}$, $t \in \mathbb{R}$

$\overline{f}(x) = \overline{f(x)}$ $\qquad \overline{\xi}(t) = \overline{p(t)}e^{\overline{\lambda} t}$

$\overline{(e^{z})} = e^{\overline{z}}$,

показатель у $\overline{\xi}$ $\overline{\lambda}$ (если показатель у ξ λ), поэтому из элементарности ξ не следует элементарность $\mathrm{Re}\,\xi$.

Упр. 2) Если $\xi = p(t)e^{\gamma t}$, $\gamma = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $d = \deg p$,
$p = P - iQ$, $P, Q \in \mathbb{R}[t]$, то
$\mathrm{Re}\,\xi = e^{\alpha t}(P(t)\cos\beta t + Q(t)\sin\beta t)$ и $\max\{\deg P, \deg Q\} = d$
Доказывается через $e^{\gamma t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)$

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}\dot{x} + a_n x = b(t), \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

Если $b \equiv 0$, то это однородное линейное уравнение порядка n с вещественными постоянными коэффициентами.

Если $b \not\equiv 0$, b — квазимногочлен, то это неоднородное линейное уравнение порядка n с вещественными постоянными коэффициентами и квазимногочленом в правой части.

Характеристический многочлен линейного уравнения —
$\chi(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$

$x = \psi(t)$ - решение $\Leftrightarrow$ $D\psi = b$, $D = \chi\left(\frac{d}{dt}\right)$

Утверждение

1) $D\xi = b$, $\xi: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ $D\overline{\xi} = \overline{b}$ $(D\overline{\xi} = \overline{D\xi} = \overline{b})$
здесь важно, что $a_i \in \mathbb{R}$

2) $D\xi = b \Rightarrow D\,\mathrm{Re}\,\xi = \mathrm{Re}\,b$ $(D\,\mathrm{Re}\,\xi = \mathrm{Re}\,D\xi$, т.к. $a_i \in \mathbb{R}$ и $\overline{a_i} = a_i)$

Теорема 0

Непродолжаемые вещественные решения линейного однородного уравнения порядка n с вещественными коэффициентами определены на $\mathbb{R}$ и образуют векторное пространство размерности n над $\mathbb{R}$ с базисом из вещественных квазимногочленов вида:

① $t^l e^{\lambda t}$, если $\lambda \in \mathbb{R}$ - корни характеристического многочлена кратности $> l$

② $t^l e^{\alpha t} \cos \beta t$ } , если $\alpha + i\beta$ - корень χ кратности $> l$.
③ $t^l e^{\alpha t} \sin \beta t$ } $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$

Доказательство:

1) всего n базисных векторов
2) они линейно независимы
3) любое вещественное непродолжаемое решение через них выражается

Тогда о линейном пространстве следует из теоремы в комплексном случае

1,2) наш базис - новый базис из пространства для $\mathbb{C}$-случая
т.к. ~~ко~~ $a_k \in \mathbb{R}$, то все корни χ "парные" - $\alpha \pm i\beta$, ~~кра~~ ~~кр~~
Пусть $\alpha \pm i\beta$ - корни кратности $> l$.
тогда им соответствуют базисные векторы
$\xi = t^l e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t)$, $\bar{\xi} = t^l e^{\alpha t}(\cos \beta t - i \sin \beta t)$

$$\underbrace{\frac{\xi + \bar{\xi}}{2} = t^l e^{\alpha t} \cos \beta t, \quad \frac{\xi - \bar{\xi}}{2i} = t^\alpha e^{\alpha t} \sin \beta t}_{\text{замена векторов для нового базиса}}$$

2) линейно независимы над $\mathbb{C}$ => и над $\mathbb{R}$.

3) Если ψ - вещественное решение, то $\psi = C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + \ldots + C_n\varphi_n$, где $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ - базис ①,②,③, ($\exists\, C_i \in \mathbb{C}$ такие)
Тогда ~~Re ψ~~ $\psi = \mathrm{Re}\,\psi = \mathrm{Re}\, C_1 \cdot \varphi_1 + \ldots + \mathrm{Re}\, C_n \varphi_n$,
т.е. ψ выражается через $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ с вещественными коэффициентами
(т.к. φ_i линейно независимы, $C_i = \mathrm{Re}\, C_i$)

Неоднородные уравнения:

ОРН = ОРО + ЧРН (теорема 1 лекции 9) (над $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$)

Если $S_b^{\mathbb{R}}$ - пространство вещественных решений $D\psi = b$, то
$S^{\mathbb{R}}_{b_1 + \ldots + b_N} = S_0^{\mathbb{R}} + \psi_1^* + \ldots + \psi_N^*$, где $D\psi_k^* = b_k$, $k = 1, \ldots, N$
(теорема 2 лекции 9)

Теорема 3.

а) Если $b = e^{\gamma t} P(t)$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $P \in \mathbb{R}[t]$, $\deg P = d$, то $\exists!\ \psi^* = t^s e^{\gamma t} R(t)$, $R \in \mathbb{R}[t]$, $\deg R = d$, s – кратность корня γ характеристического многочлена такой, что $D\psi^* = b$.

б) Если $b = e^{\alpha t}(P(t)\cos\beta t + Q(t)\sin\beta t)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$, $P, Q \in \mathbb{R}[t]$, $d = \max\{\deg P, \deg Q\}$, то $\exists!\ \psi^* = t^s e^{\alpha t}(R(t)\cos\beta t + S(t)\sin\beta t)$, где $R, S \in \mathbb{R}[t]$, $d = \max\{\deg R, \deg S\}$, s – кратность корня $\alpha + i\beta$ характеристического многочлена такой, что $D\psi^* = b$.

Доказательство.

а) Пусть ψ^* – единственное комплексное решение такого вида. Тогда $\mathrm{Re}\,\psi^*$ – тоже решение такого же вида $\Rightarrow \mathrm{Re}\,\psi^* = \psi^*$ (т.к. ψ^* единственно)

б) $p = P - iQ$, $\deg p = d$. Возьмём $\tilde{b}(t) = e^{\gamma t} p^t$, $\gamma = \alpha + i\beta$.
Тогда $\mathrm{Re}\,\tilde{b} = b$.
$\exists\ \eta = t^s e^{\gamma t} r(t)$, где $\deg r = d$, $D\eta = \tilde{b}$ (из теоремы 3 для $\mathbb{C}$).
Если $\psi = \mathrm{Re}\,\eta$, то $D\psi = b$,
$\psi = t^s e^{\alpha t}(R(t)\cos\beta t + S(t)\sin\beta t)$, где $R - iS = r$, $R, S \in \mathbb{R}[t]$,
$d = \max\{\deg R, \deg S\}$

"метод комплексных амплитуд".

! Если $\deg P, \deg Q \leq d$, то $\deg R, \deg S \leq d$ (следует из б)), тогда $D\psi = b$ – $2(d+1)$ линейных уравнений, где коэффициенты P, коэффициенты Q – $2(d+1)$ правых частей, коэффициенты R и коэффициенты S – $2(d+1)$ неизвестных

матрица определена оператором D

$$\underbrace{\boxed{\;D\;}}_{2(d+1)} \cdot \begin{pmatrix} R \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$$

~~Если опреде~~ Для всякой правой части $\exists$ решение $\Rightarrow$
$\Rightarrow \det D \neq 0 \Rightarrow$ оно единственно

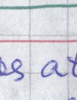
Примеры.

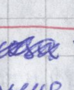
$\ddot{x} + \omega^2 x = \cos at$, $\omega, a \in \mathbb{R}$, $\omega \neq 0$

$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ – колебание осциллятора

$\cos at$ – периодическая внешняя сила

примеры осцилляторов: 1) пружинный маятник
2) малые колебания математического маятника


мат. маятник


физ. маятник

гармонические колебания с частотой ω = решения уравнения $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

$\chi(\lambda) = \lambda^2 + \omega^2$, $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$

$b = \cos at$, $\gamma = \alpha + i\beta$ $\quad \alpha = 0, \beta = a$

$\cos at = Re\,(e^{iat})$

1) $a \neq \omega \Rightarrow s = 0$ (a – не корень χ)

$\psi^* = A\cos at + B\sin at$ (теорема 3)

$OPO = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$ (теорема 0)

Подставляем:

$-Aa^2 \cos at - Ba^2 \sin at + \omega^2 (A\cos at + B\sin at) = \cos at$

(Подстановка ψ в уравнение осциллятора)

$A(\omega^2 - a^2)\cos at = \cos at \Rightarrow A = \frac{1}{\omega^2 - a^2}$

$B(\omega^2 - a^2)\sin at = 0 \Rightarrow B = 0$

$\psi^* = \frac{\cos at}{\omega^2 - a^2}$

$OPH = \frac{\cos at}{\omega^2 - a^2} + C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$

2) $a = \omega \Rightarrow s = 1$

$\psi^* = t(A\cos \omega t + B \sin \omega t)$

$OPO = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$

$(\psi^*)'' = 2(-A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t) - t(-\omega^2 A \cos \omega t -$
$- \omega^2 B \sin \omega t)$

$(\psi^*)'' + \psi^* = -2A\omega \sin \omega t + 2B\omega \cos \omega t$

$-2A\omega \sin \omega t = 0 \Rightarrow A = 0$

$2B\omega \cos \omega t = \cos \omega t \Rightarrow B = \frac{1}{2\omega}$

$OPH = \frac{t \sin \omega t}{2\omega} + C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$

(Определение)

Резонанс – совпадение показателя правой части с одним из корней характеристического уравнения.

/* $\frac{\cos at}{\omega^2 - a^2} + \frac{1}{\omega^2 - a^2} \cos \omega t$, $a \neq \omega$

$\downarrow a \to \omega$

$\frac{t \sin \omega t}{2\omega}$ */