01.12.2010. Лекция №14.

Линейные уравнения II-го порядка (Теория Штурма)

$$\ddot{x}+a(t)\dot{x}+b(t)x=0, \quad a,b: I\to\mathbb{R}, \ a,b\in C(I).$$

0) решение = ненулевое решение (0 – очевидно, решение считаем ненулевым)

1) $\varphi(t_0)=0$, φ – ненулевое решение $\Rightarrow \dot{\varphi}(t_0)\neq 0$.
(если $\dot{\varphi}(t_0)=0$, то решение нулевое)

2) на каждом отрезке φ имеет лишь конечное число нулей
(т.к. по 1) любой нуль изолирован) ~~(если бы нулей непр функции есть предельная точка~~ ~~з-то~~

3) ~~знаки~~ можно говорить о соседних нулях

4) знаки производных чередуются (разные в соседних нулях)

5) Если $\varphi(t_0)=\psi(t_0)=0$, то $\varphi\equiv\lambda\psi$, $\lambda\neq 0$ (φ,ψ – ненулевые решения)

Доказательство:

$\varphi'(t_0)\neq 0$, $\psi'(t_0)\neq 0$, $C=\dfrac{\dot\varphi(t_0)}{\dot\psi(t_0)}$. $\phi=\varphi-C\psi$ – решение,
$\phi(t_0)=\dot{\phi}(t_0)=0 \Rightarrow \phi\equiv 0$.

$I\supset\varphi^{-1}(0)$ – замкнутое множество, ~~состоящее из изолирован~~ все точки которого изолированы $\Rightarrow \#\varphi^{-1}(0)\cap[a,b]<\infty$ $\forall a,b\in I$
(если бы бесконечное число, то есть предельная точка, $\in\varphi^{-1}(0)$, не изолированная точка. Противоречие.)

6) **Теорема 1** о чередуемости (Штурм)

Если $\varphi\neq\lambda\psi$, φ,ψ – решения, то нули φ и ψ строго чередуются (перемежаются), т.е. на интервале между соседними нулями одного решения есть (ровно) один нуль второго.

Замечание:

Ровно одно – следует из просто существования.

Пример:

1) $\ddot{x}+x=0$; $\quad x=C_1\cos t+C_2\sin t$
$\varphi=\cos t$, $\psi=\sin t$

2) $\ddot{x}-x=0$. $x=C_1e^t+C_2e^{-t}$
число нулей произвольного решения $\leqslant 1$

Доказательство:

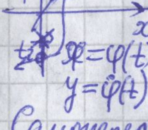
$\ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x = 0$, φ, ψ - ненулевые решения.

Перейдём к системе:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -b(t)x - a(t)y \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$$

Пусть $l_{\varphi(t)}$ - прямая с направляющим вектором $\begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \dot{\varphi}(t) \end{pmatrix}$



$x = \varphi(t)$
$y = \dot{\varphi}(t)$

φ - решение уравнения $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$

$\Downarrow$

$\begin{pmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}$ - решение системы $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -b(t)x - a(t)y \end{cases}$

Самопересечения могут быть, т.к. есть зависимость от t.

Т.к. кривая через O не проходит (см. св-во 1), можно провести прямые $l_{\varphi(t)}$ $\forall t$.

$\varphi \neq \lambda\psi \Longleftrightarrow l_{\varphi(t)} \neq l_{\psi(t)}$ $\forall t \in I$.

($\Longleftarrow$ они лз в 1 точке, т.е. лз если $l_{\varphi(t)} = l_{\psi(t)}$)

$\varphi(t_0) = 0 \Leftrightarrow l_{\varphi(t_0)}$ вертикальна.

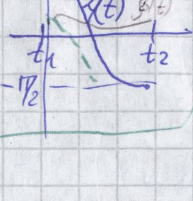
Пусть $t_1 < t_2$ - соседние нули φ.

Т.к. $\dot{x} = y$, увеличение x только в верхней полуплоскости $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ За время от t_1 до t_2 $l_{\varphi(t)}$ совершает пол-оборота по часовой стрелке.

$\Rightarrow$ $l_{\psi(t)}$ становится вертикальной при некотором $t \in (t_1, t_2)$, т.к. $l_{\psi(t)} \neq l_{\varphi(t)}$ (иначе когда-то $l_{\varphi(t)}$ её перескакала бы, т.е. совпала бы где-то)

Пусть $\alpha(t)$ - угол между прямой $l_{\varphi(t)}$ и осью x,
$\beta(t)$ - угол ~ ~ $l_{\psi(t)}$ и осью x.



Если $\beta(t) \neq \pm\frac{\pi}{2}$ $\forall t$, то $\exists t_0$: $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$

~~$Q\ge q(t)\ \forall t\in I$~~

Теорема 2 (Теорема сравнения Штурма)

Пусть $\ddot{x}+q(t)x=0$ $\quad$ $\ddot{x}+Q(t)x=0$, $q, Q: I\to\mathbb{R}$, $q, Q\in C(I)$

$x=\varphi$ ~~решение~~ $\quad$ $x=\phi$ $\quad$ $\varphi, \phi: I\to\mathbb{R}$ — решения,

$t_1<t_2$ — соседние нули φ, $\varphi(t_1)=\varphi(t_2)=0$, $Q(t)\ge q(t)\ \forall t\in[t_1,t_2]$

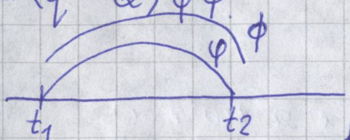
Тогда 1) $\exists\ s\in[t_1,t_2]: \phi(s)=0$

2) $\forall s\in(t_1,t_2)\ \phi(s)\ne 0 \Rightarrow \phi=\lambda\varphi$, $Q=q(t)\ \forall t\in[t_1,t_2]$

Доказательство.

Рассмотрим $W=\begin{vmatrix}\varphi & \phi\\ \dot\varphi & \dot\phi\end{vmatrix}$, $\dot W=\begin{vmatrix}\varphi & \phi\\ \ddot\varphi & \ddot\phi\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\varphi & \phi\\ -q\varphi & -Q\phi\end{vmatrix}=$

$=(q-Q)\varphi\phi$.



$\varphi(t_1)=\varphi(t_2)=0$, $\varphi(t)>0\ \forall t\in(t_1,t_2)$

пусть $\dot\varphi(t_1)>0$, $\dot\varphi(t_2)<0$,

Пусть ϕ не имеет нулей на интервале.

Пусть $\phi(t_1)\ge 0$, $\phi(t_2)\ge 0$, $\phi(t)>0\ \forall t\in(t_1,t_2)$

Иначе можно умножить на (-1).

$\dot W=(q-Q)\varphi\phi\le 0$ на $[t_1,t_2]$.

$W(t_1)=-\phi(t_1)\dot\varphi(t_1)\le 0$.

$W(t_2)=-\phi(t_2)\dot\varphi(t_2)\ge 0$

$\Delta W\le 0$

$\Downarrow$

$W(t_2)-W(t_1)\le 0$

$\Rightarrow W(t_1)=0$, $W(t_2)=0$,

$\dot W=0$

$\Downarrow$

$\phi(t_1)=0$ $\quad$ $\phi(t_2)=0$

$q=Q$

$\Rightarrow \phi=\lambda\varphi$ (φ, ϕ — решения одного уравнения, нули которых совпадают)

Замечание

Теорему доказываем от противного.
Если ϕ не имеет нулей на (t_1,t_2), то можно делать те предположения, что сделали

Оценки колеблемости

Теорема 3

~~Замечание~~

1) Пусть $\ddot{x}+q(t)x=0$, $q(t)\le\Omega^2$, $\Omega\ne 0$, $t_1<t_2$ — соседние нули решения

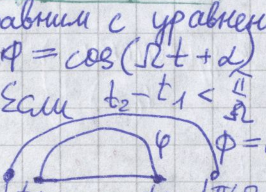
Тогда $t_2-t_1\ge\frac{\pi}{\Omega}$

Доказательство

Сравним с уравнением $\ddot{x}+Q(t)x=0$, $Q(t)=\Omega^2$.

$\phi=\cos(\Omega t+\alpha)$. Докажем от противного

Если $t_2-t_1<\frac{\pi}{\Omega}$



$\phi=\cos(\Omega t+\alpha)$. Тогда $\exists\ \phi$, не имеющее нулей на $[t_1,t_2]$. Противоречие (см. теорему сравнения)

Теорема 4

пусть

2) $\ddot{x} + Q(t)x = 0$, t_1, t_2 — соседние нули Φ,

$\omega^2 \le Q(t)$, $\omega \ne 0$. Тогда $t_2 - t_1 \le \frac{\pi}{\omega}$

Следствие

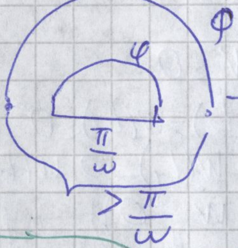
Если I бесконечный интервал, то Φ имеет бесконечно много нулей

Доказательство

От противного.

Пусть $t_2 - t_1 > \frac{\pi}{\omega}$, сравним с $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$,

$\varphi = \cos(\omega t + \alpha)$



— невозможно по теореме сравнения

Приведение уравнения $\ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x$ к виду $\ddot{x} + q(t)x = 0$

Рассмотрим замену $x = c(t)y$, $c(t) \ne 0$ нигде

~~c̈(t)y + 2ċ(t~~ $\ddot{c}y + \underline{2\dot{c}\dot{y}} + c\ddot{y} + a\dot{c}y + \underline{ac\dot{y}} + bcy = 0$

$2\dot{c} + ac = 0$, $\dot{c} = -\frac{1}{2}ac$, ($\exists$ формула явная для c)

Если подставить, $\ddot{c} = -\frac{1}{2}\dot{a}c - \frac{1}{2}a\dot{c} = -\frac{1}{2}\dot{a}c + \frac{1}{4}a^2 c$

$c\ddot{y} + bcy + \frac{a^2}{4}cy - \frac{\dot{a}}{2}cy - \frac{a^2}{2}cy = 0$

$\ddot{y} + \left(b - \frac{\dot{a}}{2} - \frac{a^2}{4}\right)y = 0$

Теорема 5

Уравнение $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$ сводится к уравнению

$\ddot{x} + q(t)x = 0$. , $\dot{a}, b, q \in C(I)$, $a \in C^1(I)$

Докажем ли мы её? Надо, чтобы $a \in C^1(I)$