Лекция 2. 08.09.2010.

1) Замечание 1

Иногда говорят, что дифференциальные уравнения – соотношения между функцией и её производной. Но $\dot{\varphi}(t)=\varphi(2t)$ – не дифференциальное уравнение.

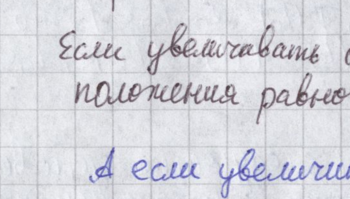
2) Замечание 2

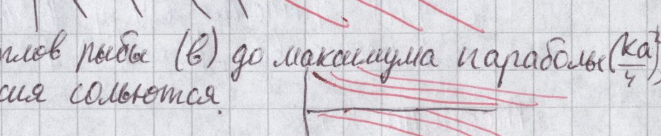
Уравнение $\dot{x}=t+x^2$ не решается даже в квадратурах (интегралах от элементарных функций), даже неявно (в виде $F(t,x)=const$)

3) Исследование автономных дифференциальных уравнений I порядка
($\dot{x}=v(x)$)

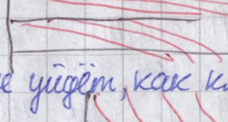
$\dot{x}=kx$ – размножение
$\dot{x}=kx(a-x)$ – размножение с ограничением (рыбы)
$\dot{x}=kx(a-x)-b$ – ещё и с жёстким отловом (рыбы)

Явно такие дикие уравнения лучше не решать, а лучше примерно рисовать.

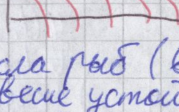




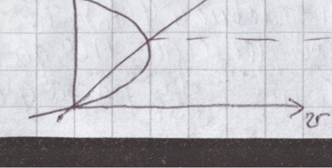
Если увеличивать отлов рыбы (b) до максимума параболы $\left(\frac{ka}{4}\right)$ положения равновесия сольются.

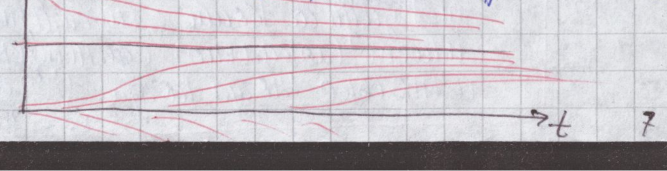


А если увеличить b ещё, равновесие уйдёт, как класс



Этим плох постоянный (жёсткий) отлов.
Лучше, чтобы он зависел от общего числа рыб ($b=\beta x$) тогда равновесие устойчивое.





4) Существование и единственность решения задачи Коши (ЗК)

(для автономных ДУ $\dot{x}=v(x)$)

Теорема 1

Если $v\in C$, то ЗК для ДУ $\dot{x}=v(x)$ имеет (локально) решение.

Доказательство:

Пусть начальное условие — $\varphi(t_0)=x_0$.

Если $v(x_0)=0$, то $x=x_0$ — решение задачи Коши.

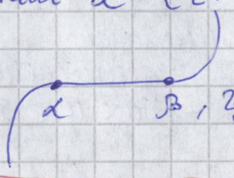
Если $v(x_0)\neq 0$, то в некоторой окрестности x_0 определена $\frac{1}{v(x)}$ и $\underbrace{\int \frac{dx}{v(x)}\Big|_{x=\varphi(t)}}_{F(x)}=t+C$,

и т.к. $F'(x)=\frac{1}{v(x)}\neq 0$, то уравнение локально разрешимо по теореме о неявных функциях.

Пример:

$\dot{x}=3x^{2/3}$ Решения $x=(t+c)^{3}$, $x=0$, но

все решения —



, где $-\infty\leq\alpha\leq\beta\leq+\infty$

Определение 1

(Локальная) единственность задачи Коши — это, если любые два решения ЗК совпадают в некоторой окрестности начального условия, т.е. если
$x=\varphi(t)$, ~~р~~ решение ДУ, $\varphi: I\to\mathbb{R}$, $\varphi(t_0)=x_0$, $t_0\in I$ и
$x=\psi(t)$ — решение ДУ, $\psi: J\to\mathbb{R}$, $\psi(t_0)=x_0$, $t_0\in J$, то
$\exists$ интервал $K\subset I\cap J$: $\varphi(t)=\psi(t)$ $\forall t\in K$; $t_0\in K$

Теорема 2

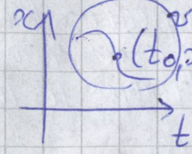
Для ДУ $\dot{x}=v(x)$, $v\in C$ верны следующие условия:

1) если $v(x_0)\neq 0$, то задача Коши с начальным условием $\varphi(t_0)=x_0$ имеет (локально) единственное решение $\forall t_0$

2) Если $v(x_0)=0$, $\forall x\in \dot{B}'_{\varepsilon}(x_0)$ $v(x)\neq 0$ $(\varepsilon>0)$, то задача Коши с начальным условием $\varphi(t_0)=x_0$ имеет (локально) единственное решение тогда и только тогда, когда $\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0}\frac{dx}{v(x)}$ и $\int_{x_0}^{x_0+\varepsilon}\frac{dx}{v(x)}$ расходятся.

Доказательство:

1) $\dot{x} = v(x),\ v(x_0) \neq 0$



$v(x_0) \neq 0$

$\Downarrow$

поле направлений в точке (t_0, x_0) не горизонтально

$\Downarrow$

поле направлений в некоторой окрестности точки (t_0, x_0) не горизонтально

$\Downarrow$

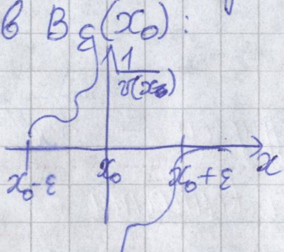
можно записать $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{v(x)}$, $t = \int \dfrac{dx}{v(x)} + C$,

C выясняется из $t - t_0 = \int\limits_{x_0}^{x} \dfrac{du}{v(u)}$

2) $\dot{x} = v(x)$

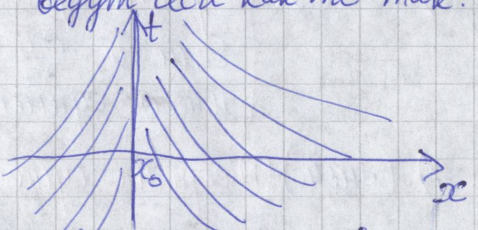
$\dfrac{dx}{dt} = v(x)$, $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{v(x)}$ $(x \in B'_\varepsilon(x_0))$

т.е. $\dfrac{1}{v(x)}$ ведёт себя примерно так в $B_\varepsilon(x_0)$:



Возьмём несобственный интеграл $t = \int \dfrac{dx}{v(x)}$

Интегралы (с точностью до C) ведут себя как-то так:



Это — все решения ДУ (т.к. рассматриваем на интервале) (ещё ось t)

Единственность есть $\Longleftrightarrow$ "интегралы" не пересекли ось t $\Rightarrow$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0+0} \int \dfrac{dx}{v(x)} = \infty \\ \lim\limits_{x \to x_0-0} \int \dfrac{dx}{v(x)} = \infty \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \int\limits_{x_0}^{x_0+\varepsilon} \dfrac{dx}{v(x)} \text{ расходится} \\ \int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0} \dfrac{dx}{v(x)} \text{ расходится.} \end{cases}$

4а) (механическая интерпретация единственности)

$(t_0,x_0)\quad(t_1,x_1)$

$$v(x_0)=0.$$

Если тело перешло в точку (t_1,x_1), то прошло ~~ненулевое врем~~ оно с ненулевой скоростью, и имеет смысл $\int\limits_{x_0}^{x_1}\frac{dx}{v(x)}$, равный времени.

Если этот интеграл сходится, то выход из x_0 за конечное время возможен, т.е. единственности нет, если расходится, то есть.

5) Единственность в случае $\dot{x}=v(x)$, $v\in C^\infty$

$$v(x_0)=v'(x_0)=\ldots=v^{(k-1)}(x_0)=0,$$
$$v^{(k)}(x_0)\neq 0.$$

В случае $x=x_0$ единственность есть, т.к. $\int\limits_{x_0}^{x_1}\frac{dx}{(x-x_0)^k}$ расходится при $k\geq 1$, а $v(x)\sim(x-x_0)^k$ при $x\to x_0$.

Замечание

Случай $\dot{x}=3x^{2/3}$ другой — $3x^{2/3}\in C^0$, $\notin C^\infty$.

6) (Анонс) Теорема единственности

Если $v, \frac{\partial v}{\partial x}\in C(U)$, то ЗК для $\dot{x}=v(t,x)$ имеет единственное решение.

7) (Анонс) Теорема существования

Если $v\in C(U)$, то ЗК для $\dot{x}=v(t,x)$ имеет решение.

Замечание:

Теорема существования для уравнений с разделяющимися переменными ($v(t,x)=\alpha(t)\beta(x)$) уже была доказана ранее.