2010/2011 уч. год II курс 3 семестр

Лекции по дифференциальным уравнениям

Лектор: Богаевский Илья Александрович

Конспектирует Длугач Алексей Петрович

Лекция 1. 01.09.2010

Дифференциальные уравнения

Определение 1

Дифференциальным уравнением I порядка в нормальной форме называется запись вида

$$\dot{x} = f(t, x),$$

где $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ – функция,

t – независимая переменная (обычно время),

x – зависимая переменная

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(t, x)\}$ – расширенная фазовая плоскость,

$\mathbb{R} = \{x\}$ – фазовая прямая,

U – область (открытое связное множество)

Определение 2

Решением дифференциального уравнения $\dot{x} = f(t,x)$ называется дифференцируемая функция φ, заданная на интервале $I = (a,b)$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, такая, что

1) $\forall t \in I \quad (t, \varphi(t)) \in U$

2) При подстановке в дифференциальное уравнение вместо x $\varphi(t)$ получается тождество, т.е.

$$\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t)) \quad \forall t \in I.$$

Замечание

Иногда говорят, что дифференциальное уравнение $\dot{x} = f(t,x)$ – это уравнение на неизвестную функцию $x(t)$.

Примеры:

1) $\dot{x} = v(t)$. Решение $-$ $\varphi(t) = \int v(t)dt$
v непрерывна.

2) (уравнение с разделяющимися переменными).
$\dot{x} = \alpha(t)\beta(x)$, α, β – непрерывные функции.

Ищем решение, исходя из искомого:

$$\dot{x} = \alpha(t)\beta(x)\Big|_{x=\varphi(t)}$$ (тождество)

$$\Downarrow$$

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(t)\beta(x)\Big|_{x=\varphi(t)}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dx}{\beta(x)} = \alpha(t)dt\Big|_{x=\varphi(t)} \quad (*)$$ если $\beta(x) \neq 0$

Это – эквивалентная запись $\dot{x} = \alpha(t)\beta(x)$.
(Подставив $\varphi(t)$ в $(*)$, получим $\dfrac{d\varphi(t)}{\beta(x)} = \alpha(t)dt$, т.е.

$$\frac{\dot{\varphi}(t)\,dt}{\beta(x)} = \alpha(t)dt \text{ и } \dot{\varphi}(t) = \alpha(t)\beta(x))$$

$$\frac{dx}{\beta(x)}\Big|_{x=\varphi(t)} = \alpha(t)dt$$

$$\Downarrow$$

$$\int\left(\frac{dx}{\beta(x)}\Big|_{x=\varphi(t)}\right) = \int\alpha(t)dt$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\int\frac{dx}{\beta(x)}\right)\Big|_{x=\varphi(t)} = \int\alpha(t)dt.$$ Обозначим за $A(t) = \int\alpha(t)dt$,
$B(x) = \int\dfrac{dx}{\beta(x)}$

Имеем $B(x)\Big|_{x=\varphi(t)} = A(t) + C$

$B(x) = A(t) + C$ – неявное уравнение на $x = \varphi(t)$.
Особый случай – когда $\beta(x_*) = 0$, $\varphi(t) = x_*$ – решение исходного уравнения

Определение 3

Число $x_* \in \mathbb{R}$ называется особой точкой (положением равновесия) тогда и только тогда, когда $\beta(x_*)=0$.

Определение 4

Если $\varphi(t) \equiv x_*$, то $\varphi(t)$ – стационарное решение

3) $\dot{x} = kx, \quad k \in \mathbb{R}$

Если $k>0$, то ~~уравнение называется~~ это уравнение размножения, где x – численность

Если $k<0$, то ~~уравнение называется~~ это уравнение радиоактивного распада

$$dx = kx\,dt$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int k\,dt$$

$$\ln|x| = kt + C$$

$$|x| = e^{C+kt} \Rightarrow x = \pm e^{C} \cdot e^{kt}$$

$$x = C_1 \cdot e^{kt}, \quad C_1 \neq 0.$$

Но C_1 может быть равным 0 – при делении на x потеряли корень.

$$x = C_1 \cdot e^{kt}, \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

4) $\dot{x} = x^2$ (уравнение взрыва, сверхбыстрого размножения)

$$\frac{dx}{x^2} = dt \Rightarrow \int \frac{dx}{x^2} = \int dt \Rightarrow -\frac{1}{x} = t - c \Rightarrow x = \frac{1}{c-t}$$

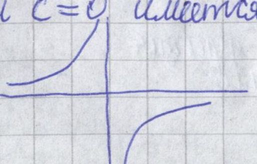
Также $x=0$ – решение.

Замечание

Найти все решения = найти общее решение

Замечание

При $c=0$ имеется 2 решения (2 ветви)



Определение 5

Начальным условием называется условие вида $\varphi(t_0)=x_0$, накладываемое на решение дифференциального уравнения.

Определение 6

Задачей Коши называется задача нахождения решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальному условию (ям)

Примеры (решения задач Коши)

1) $\dot{x}=v(t)$. Общее решение $x=\int v(t)dt$

Решение задачи Коши $x=x_0+\int\limits_{t_0}^{t} v(t)dt$

(условие $\varphi(t_0)=x_0$)

2) $\dot{x}=\alpha(t)\beta(x)$

Неявное выражение $\int\limits_{x_0}^{x}\frac{dx}{\beta(x)}=\int\limits_{t_0}^{t}\alpha(t)dt$

3) $\dot{x}=kx$

Общее решение $x=Ce^{kt}$

Решение задачи Коши – из условия

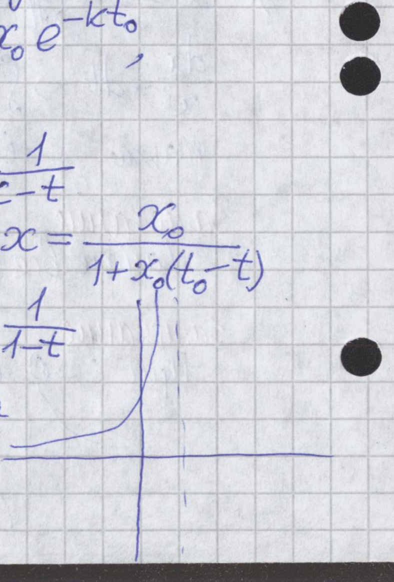
$x_0=Ce^{kt_0}$ находим $C=x_0e^{-kt_0}$,

имеем $x=x_0e^{k(t-t_0)}$

4) $\dot{x}=x^2$ Общее решение $x=\frac{1}{c-t}$

$x_0=\frac{1}{c-t_0}$, $c=t_0+\frac{1}{x_0}$, $x=\frac{x_0}{1+x_0(t_0-t)}$

При $t_0=0, x_0=1$ имеем $x=\frac{1}{1-t}$

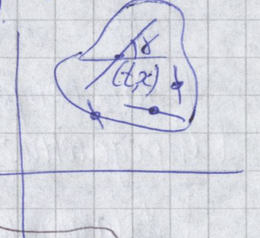


NB! Только 1 линия, т.к. функция должна быть на интервале (включающем $t_0=0$).

Геометрический смысл дифференциальных уравнений.

Рассмотрим область U, для уравнения $\dot{x} = v(t,x)$ и точки (t,x) рассмотрим прямую через эту точку, с тангенсом угла наклона $\operatorname{tg}\gamma = v(t,x)$.

Получается поле направлений.



Определение 7

Полем направлений в области U называется отображение $U \to \mathbb{R}P^1$ (мн-во прямых)

Дифференциальному уравнению $\dot{x} = v(t,x)$ соответствует поле направлений $\tilde{v}: U \to \mathbb{R}P^1$

$\tilde{v}(t,x) = (1 : v(t,x))$ — коэффициенты в однородных координатах.

Определение 8

Интегральной кривой поля направлений называется кривая, в каждой точке касающаяся направления в этой точке.

Тезис:

Решение дифференциального уравнения $\dot{x} = v(t,x)$ — это функция, график которой является интегральной кривой в поле направлений $\tilde{v}$.

Замечание

Для нормальной формы задания дифференциальных уравнений получается невертикальное поле направлений.

Дифференциальные уравнения в симметричной форме (запись в дифференциалах)

В нормальной форме уравнение задавалось в виде

$\frac{dx}{dt} = v(t,x)$, т.е. $dx = v(t,x)dt$.

Рассмотрим другой вариант записи – $u(t,x)dx = v(t,x)dt$

Определение 9

Дифференциальным уравнением в симметричной форме называется запись вида $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, где $M, N: U \to \mathbb{R}$ – функции, $M^2 + N^2 \neq 0$.

Определение 10

Решением дифференциального уравнения называется параметризованная кривая ($y = \varphi(x)$, $x = \psi(y)$ или $\begin{cases} x = \xi(t) \\ y = \eta(t) \end{cases}, t \in I$), дающая тождество после подстановки, т.е. $M(\xi(t), \eta(t))\xi'(t)\cancel{dt} + N(\xi(t), \eta(t))\eta'(t)\cancel{dt} = 0$ (это – условие касания решения к полю направлений, заданному направляющим вектором $(N, -M)$)

Дифференциальная форма $\omega = M(x,y)dx + N(x,y)dy$,

$\omega: \underset{(x,y)}{U} \times \underset{(a,b)}{\mathbb{R}^2} \to \mathbb{R}$; $\omega(x,y,a,b) = M(x,y)a + N(x,y)b$

(т.к. $dx(a,b) = a$, $dy(a,b) = b$)

Поле направлений – $\tilde{\omega}(x,y) = \{(a,b) \mid M(x,y)a + N(x,y)b = 0\}$

Уравнение с разделяющимися переменными в симметричной форме

$$\alpha(x)\beta(y)dx + \gamma(x)\delta(y)dy = 0$$

$$\frac{\alpha(x)dx}{\gamma(x)} + \frac{\delta(y)dy}{\beta(y)} = 0 \Rightarrow \int \frac{\alpha(x)dx}{\gamma(x)} + \int \frac{\delta(y)dy}{\beta(y)} = 0$$

При этом теряются решения: $\{x_* \mid \gamma(x_*) = 0\}$ и $\{y_* \mid \beta(y_*) = 0\}$

(При подстановке, например, x_*, имеем $dx = 0$, $\gamma(x_*) = 0$, т.е. верное тождество)