20.10.2010 Лекция №7

Уравнения, не разрешимые относительно производных (I порядка)

Речь идёт об уравнениях $F(x,y,y')=0$, где $F: W\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$.

Определение

$\varphi: I\to\mathbb{R}$, $\varphi\in\mathcal{D}(I)$ есть решение уравнения $F(x,y,y')=0$, если $\forall x\in I$ $(x,\varphi(x),\varphi'(x))\in W$ и $F(x,\varphi(x),\varphi'(x))=0$.

Пример:

$(y')^2-y=0$ $(\Leftrightarrow y'=\pm\sqrt{y})$ $y=\frac{1}{4}(x+c)^2$, $y=0$.

Задача Коши

Пусть $(x_0,y_0,p_0)\in W$, $F(x_0,y_0,p_0)=0$. Решить задачу Коши с начальным условием (x_0,y_0,p_0) означает найти решение уравнения $F(x,y,y')=0$ с условием $\varphi(x_0)=y_0$, $\varphi'(x_0)=p_0$.

Теорема

Пусть $F\in C^1(W)$, $(x_0,y_0,p_0)\in W$, $F(x_0,y_0,p_0)=0$, $\frac{\partial F}{\partial p}(x_0,y_0,p_0)\neq 0$. Тогда:

1) $\exists$ решение задачи Коши с начальными условиями (x_0,y_0,p_0): $(\exists\varphi: I\to\mathbb{R}$, $\varphi(x_0)=y_0$, $\varphi'(x_0)=p_0$, $F(x,\varphi(x),\varphi'(x))=0)$
2) φ – локально единственно ($\forall$ два решения совпадают в некоторой окрестности x_0)

Доказательство:

Пусть $\frac{\partial F}{\partial p}(x_0,y_0,p_0)>0$ (случай <0 разбирается аналогично)

U – окрестность (x_0,y_0), $\varepsilon>0$ такое, что

1) $\frac{\partial F}{\partial p}(x,y,p)>0$ $\forall x,y\in U$ (если $|p-p_0|<\varepsilon$)
2) $F(x,y,p_0+\varepsilon)>0$ $\forall x,y\in U$
3) $F(x,y,p_0-\varepsilon)<0$ $\forall x,y\in U$.

В U $F(x,y,p)=0$ можно разрешить относительно p – $p=f(x,y)$, $f\in C^1(U)$.

$$\begin{cases} F(x,y,p)=0 \\ (x,y)\in U\end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} |p-p_0|<\varepsilon,\ p=f(x,y) \\ |p-p_0|>\varepsilon,\ p\neq f(x,y).\end{array}\right.$$

Лемма

Пусть $\varphi\in D(I)$, $x_0\in I$, $\forall x\in I$ $(x,\varphi(x))\in U$ и $y_0=\varphi(x_0)$, $p_0=\varphi'(x_0)$.

Тогда φ — решение уравнения $y'=f(x,y)$ ~~тогда~~ тогда и только тогда, когда φ — решение уравнения $F(x,y,y')=0$

Доказательство:

$\Rightarrow$ очевидно

$\Leftarrow$ Пусть φ — решение $F(x,y,y')=0$, но не решение $y'=f(x,y)$.

Тогда $\exists\, x_1\in I:\ \varphi'(x_1)=f(x_1,\varphi(x_1))$,

$\varphi'(x_0)=p_0$ $\quad |\varphi'(x_1)-p_0|>\varepsilon$

$\Rightarrow$

$$\exists\, x_*: |\varphi'(x_*)-p_0|=\varepsilon$$

$$F(x_*,\varphi(x_*),\varphi'(x_*))=0$$

$$(x_*,\varphi(x_*))\subset U$$

Лемма доказана.

С помощью неё доказывается теорема.

Определение

Особое решение — это решение, которое в каждой своей точке касается другого решения, не совпадающим с данным в любой окрестности рассматриваемой точки.

Таким образом, особое решение — это решение, в каждой точке которого не выполняется локальная теорема единственности.

Определение

Решение называется вырожденным, если $\forall x\in I$

$$\frac{\partial F}{\partial p}(x,\varphi(x),\varphi'(x))=0$$

Теорема 2

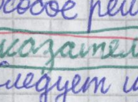
Особое решение является вырожденным, если $F\in C^1(U)$.

Доказательство.

Следует из теоремы 1.

Геометрическая теория УНОП I порядка

Пусть $F(x,y,p)=0$ — гладкая поверхность в $V\subset\mathbb{R}^3$.



$F_x\ne0$
$F_y\ne0$ для (x,y,p): $F(x,y,p)=0$
$F_p\ne0$ $=0$ — прямая в плоскости (x,y)

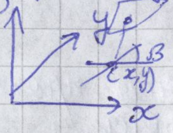
$F_p=0$ $\quad F_x dx+F_y dy+F_p dp=0$

1) 1 — струя функции $\varphi: I \to \mathbb{R}$ в точке $x_0 \in I$ = $(x_0, \varphi(x_0), \varphi'(x_0))$

2) Пространство всех струй всевозможных функций
$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, p)\}$

3) Контактная ~~формула~~ в пространстве 1-струй
$\alpha = p\,dx - dy$

4) уравнение $\alpha = 0$ определяет поле контактных плоскостей
$(p\,dx - dy) = 0$



$\operatorname{tg} \beta = p$

5) лежандрова кривая — это кривая, которая в каждой точке касается контактной плоскости, заданной в этой точке.

6) Примеры:

а) $(x, \varphi(x), \varphi'(x))$ $\quad \varphi \in C^\infty(I),\ \varphi: I \to \mathbb{R}$

$1, \varphi'(x_0), \varphi''(x_0)$

$p = \varphi'(x_0)$ $\qquad p\,dx - dy = 0$

$\varphi'(x_0) - 1 - \varphi'(x_0) = 0$

$\gamma: I \to \mathbb{R}^3$ лежандрова $\Leftrightarrow$ $\gamma^*\gamma = 0$ (равносильное определение)

$\gamma: x = x \quad y = \varphi(x) \quad p = \varphi'(x) \quad \varphi'(x)dx - d\varphi(x) = 0$

б) $x = 3t^2,\ y = 2t^3,\ p = t$

$t\, d(3t^2) = d(2t^3)$

7) кривая $\gamma(x) = (x, \varphi(x), \varphi'(x))$ — 1-струйное расширение функций $\varphi \in C^\infty$.

8) лежандрова кривая вида $\gamma(x) = (x, \varphi(x), \psi(x))$, где $\varphi, \psi \in C^\infty(I)$ является 1-струйным расширением функции φ, если $\psi(x)dx - d\varphi(x) = 0$, т.е. $\psi(x) = \varphi'(x)$.

9) Решить уравнение $F(x, y, y') = 0$ равносильно найти на поверхности $F(x, y, p) = 0$ лежандрову кривую вида $(x, \varphi(x), \psi(x))$.

10) пересечение контактной плоскости и касательной к поверхности – направление, касательное к поверхности, т.е. на поверхности возникает поле направлений класса C^1, если $F \in C^1$.

11) Решение $F(x, y, y')=0$ – интегральные кривые в поле направлений, полученном в 10)

12) Поле направлений не определяется там, где контактная и касательная плоскости совпадают.
(в частности, если касательная плоскость вертикальна, т.е. $F_p = 0$)

13) 1-струйное расширение особого решения проходит через такие, где $F_p=0$ состоит из точек

14) Пример:

$y=(y')^2 \qquad (y')^2-y=0 \qquad p^2-y=0$

(x, p) – координаты на $F=0$

$y=p^2$

$$pdx-dy=0$$
$$pdx-2pdp=0$$
$$p=0 \qquad x=2p+C.$$