03.11.2010. Лекция №9

Теорема 0

Непродолжаемые решения линейного однородного уравнения определены на $\mathbb{R}$ и образуют векторное пространство над $\mathbb{C}$ размерности n с базисом $e^{\lambda_k t} t^{l_k}$, λ_k – корень уравнения $\chi(\lambda)=0$ кратности μ_k, $l_k = 0, \ldots, \mu_k - 1$.

Доказательство:

Указанные функции $e^{\lambda_k t} t^{l_k}$ линейно независимы.

I.) В самом деле, если $\xi_i = (e^{\lambda_k t} t^{l_k})_i$, то

$$\underbrace{c_1\xi_1 + \ldots}_{\lambda_1} + \underbrace{\ldots}_{\lambda_2} + \ldots + \underbrace{c_n \xi_n}_{\lambda_n} = 0$$

элементарные квазимногочлены $\Rightarrow$ они все равны 0 (теорема 1, лекция 8). Тогда все $c_i = 0$

II. (другое доказательство)

$e^{\lambda_k t} t^{l_k}$ – корневой вектор оператора $\frac{d}{dt}$ с собственным значением λ_k высоты $l_k + 1$. …

Лемма 1

Пусть P – множество всех квазимногочленов,

$\frac{d}{dt} - \lambda\, id : P \to P \quad p(t)e^{\gamma t} \mapsto q(t)e^{\gamma t}$

тогда $\deg q = \begin{cases} \deg p, & \lambda \neq \gamma \\ \deg p - 1, & \lambda = \gamma \end{cases}$ (считаем $\deg q < 0 \Leftrightarrow q \equiv 0$)

Доказательство:

$p(t)e^{\gamma t} \mapsto p'(t)e^{\gamma t} + \gamma p(t) e^{\gamma t} - \lambda p(t) e^{\gamma t}$

$\deg p' = \deg p - 1, \quad \deg((\gamma - \lambda)p) = \deg p, \ \gamma \neq \lambda,$

если $\gamma = \lambda$, то ~~deg~~ $(\gamma-\lambda)p = 0$.

Лемма ~~2~~ 2'

Пусть оператор $D = \left(\frac{d}{dt}\right)^n + a_1\left(\frac{d}{dt}\right)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\frac{d}{dt} + a_n\, id = \chi\left(\frac{d}{dt}\right)$. Тогда ξ – решение дифференциального уравнения тогда и только тогда, когда $D\xi = 0$

Очевидно

Лемма 2

D переводит $p(t)e^{\gamma t} \mapsto q(t)e^{\gamma t}$, $\deg q = \deg p$, если γ не является корнем χ, $\deg q = \deg p - s$, если γ – корень χ кратности s.

Доказательство

$\chi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\mu_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_m)^{\mu_m}$ тогда $D = \left(\frac{d}{dt} - \lambda_1 id\right)^{\mu_1} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{d}{dt} - \lambda_m id\right)^{\mu_m}$

Каждая скобка уменьшает на 1 степень, если $\gamma = \lambda_i$, и не уменьшает, если $\gamma \neq \lambda_i$ (Лемма 1)

4) Доказательство теоремы 0.

$\mathcal{D}\xi = 0 \Rightarrow \xi$ продолжается до квазимногочлена (т.к. ξ - решение однородного уравнения, в правой части 0 - квазимногочлен)

Пусть $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_N$, $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_N$ - различные показатели ($\gamma_i \neq \gamma_j$)

$\mathcal{D}\xi = \mathcal{D}\xi_1 + \mathcal{D}\xi_2 + \ldots + \mathcal{D}\xi_N$, с теми же показателями (Лемма 2)

$\mathcal{D}\xi = 0 \Leftrightarrow \mathcal{D}\xi_i = 0 \; \forall i = 1, \ldots, N$ (Теорема 1, лекция 8)

Если $\xi_i = p_i(t)e^{\gamma_i t}$, то $\mathcal{D}\xi_i = 0 \Leftrightarrow \gamma_i = \lambda_j$, $d_i < \mu_j$, где $d_i = \deg p_i$, μ_j - кратность λ_j.

и ξ есть линейная комбинация указанных в теореме функций.

Пример:

$\dddot{z} + 2\ddot{z} + \dot{z} = 0$

$\chi(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = 0$

$\lambda = 0 \quad \lambda = -1$

$\mu = 1 \quad \mu = 2$

$e^{0 \cdot t} = 1 \quad e^{-t}, te^{-t}$

Общее решение: $C_1 + C_2 e^{-t} + C_3 t e^{-t}$

Линейные неоднородные уравнения с квазимногочленом в правой части

$z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}\dot{z} + a_n z = b(t)$ $\quad a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$

$b(t)$ квазимногочлен

по теореме 2 лекции 8 любое решение продолжается до квазимногочлена

Теорема 1

Пусть S_b - пространство всех решений неоднородного уравнения

S_0 - пространство всех решений однородного уравнения с теми же коэффициентами

η^* - какое-нибудь решение неоднородного уравнения (η^* частное решение)

тогда $S_b = \eta^* + S_0$ (общее решение неоднородного уравнения есть частное решение неоднородного уравнения + общее решение однородного уравнения)

Доказательство.

1) $S_b \subset \eta^* + S_0$: $\eta \in S_b \Leftrightarrow \mathcal{D}\eta = b \Leftrightarrow \mathcal{D}(\eta - \eta^*) = b - b = 0$ (т.к. $\mathcal{D}\eta^* = b$ по условию) $\Leftrightarrow \eta - \eta^* \in S_0$

2) $\eta^* + S_0 \subset S_b$: $\xi \in S_0 \Leftrightarrow \mathcal{D}\xi = 0 \Leftrightarrow \mathcal{D}(\xi + \eta^*) = 0 + b = b \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \xi + \eta^* \in S_b$

Замечание

S_b – аффинное пространство

Теорема 2

$S_{b_1+\dots+b_N} = S_0 + \eta_1^* + \eta_2^* + \dots + \eta_N^*$, где $D\eta_i^* = b_i$

~~Доказательство~~: Если $D\eta = b_1 + \dots + b_N$, ~~($\eta = \eta_1 + \dots$)~~ то Общее решение есть общее решение неоднородного уравнения $+ \eta_1^* + \dots + \eta_N^*$, где η_i^* – частное решение $D\eta = b_i$

Доказательство

η_i^* – частное решение $D\eta = b_i \Rightarrow \eta^* = \eta_1^* + \dots + \eta_N^*$ – частное решение $D\eta = b_1 + \dots + b_N$.

Лемма 3 (для теоремы 0, улучшения понимания)

$D[p(t)e^{\gamma t}] = 0 \Leftrightarrow \deg p < s$, где s – кратность корня γ характеристического многочлена χ.

Доказательство

следствие леммы 2.

Теорема 3

Пусть $b(t) = q(t) = e^{\gamma t}$, $\deg q = d$.
Тогда существует единственное частное решение η^* уравнения $D\eta = b$ вида $t^s p(t) e^{\gamma t}$, где $\deg p = d$, s – кратность корня γ у χ

Доказательство:

Пусть $D\eta = b$, $\eta^* = t^s p(t) e^{\gamma t}$ (по теореме 2, лекция 8)

1) $\exists\, \eta^* = r(t) e^{\gamma t}, \deg r = d + s$

В самом деле, если $\exists\, \eta^* = \eta_0^* + \eta_1^* + \dots + \eta_N^*$ ~~то~~

$\gamma \dots \gamma_1 \dots \gamma_N$

т.к. нужно, чтобы $D\eta_i^* = 0$ при $i \geq 1$, то можно искать $\eta^* = \eta_0^*$.

~~$\deg \eta_0^* \leq d + s$~~ $\deg \eta_0^* = d + s$ по лемме 2, а это и есть степень r.

2) $\exists\, r = p \cdot t^s, \deg q = d$, т.к. $D(e^{\gamma t}) = D(te^{\gamma t}) = \dots = D(t^{s-1} e^{\gamma t}) = 0$,

т.к. все эти функции – решения однородного уравнения (по теореме 0)

3) p единственно

Если $p_1 \neq p_2$, $\deg p_1 = \deg p_2 = d$, то $\deg(t^s p_1 - t^s p_2) \geq s$.

Но $D(t^s p_1 e^{\gamma t} - t^s p_2 e^{\gamma t}) = 0$. Противоречие с леммой 2.

$b - b = 0$

Примеры:

Решить уравнение $\ddot{z} + z = e^{it} + e^t$

1) общее решение однородного уравнения

$$\ddot{z} + z = 0$$

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda = \pm i \text{ (кратности 1)}$$

Базис пространства решений e^{it}, e^{-it}

$$ОРО = C_1 e^{it} + C_2 e^{-it}$$

2) ЧРН $\ddot{z} + z = e^{it}$ $\gamma = i$, $s = 1$, $d = \deg q = 0$.

$$\eta^* = t p(t) e^{it}, \deg p = 0 \Rightarrow p = A \in \mathbb{C}$$

$$\eta^* = Ate^{it}$$

Подставим: (ищем частное решение для $\ddot{z} + z = e^{it}$)

$$(Ate^{it})^{\cdot\cdot} + Ate^{it} = e^{it}$$

$$2Aie^{it} - Ate^{it} + Ate^{it} = e^{it}$$

$$A = -\frac{i}{2}$$

$$\eta^* = -\frac{i}{2} te^{it}$$

3) ЧРН $\ddot{z} + z = e^t$ $\gamma = 1$, $s = 0$, $\deg q = 0$

$$z = Be^t \quad (t^s p(t) e^t, \deg p = 0)$$

$$Be^t + Be^t = e^t$$

$$B = \frac{1}{2}$$

Замечание: Число неизвестных коэффициентов = число коэффициентов p_d = $d+1$

Ответ: $\boxed{ОРН = C_1 e^{it} + C_2 e^{-it} - \frac{i}{2} te^{it} + \frac{1}{2} e^t}$