27.10.2010 Лекция №8.

Определение:

Дифференциальным уравнением порядка n называется уравнение $x^{(n)}=f(t,x,\dot{x},\ldots,x^{(n-1)})$, $f: U\subset\mathbb{R}^{1+n}\to\mathbb{R}$

Определение

$\varphi\in D(I)$, $\varphi: I\to\mathbb{R}$ называется решением дифференциального уравнения порядка n, если
1) $\forall t\in I$ $(t,\varphi(t),\dot{\varphi}(t),\ldots,\varphi^{(n-1)}(t))\in U$
2) $\forall t\in I$ $\varphi^{(n)}(t)=f(t,\varphi(t),\dot{\varphi}(t),\ldots,\varphi^{(n-1)}(t))$

Пример:

$\ddot{x}=0$ $\quad x=C_1t+C_2$

$\varphi(0)=C_2$, $\dot{\varphi}(0)=C_1$

Задача Коши:

Найти решение, удовлетворяющее начальным условиям:
$\varphi(0)=x_0$, $\dot{\varphi}(0)=\dot{x}_0,\ldots,\varphi^{(n-1)}(0)=x_0^{(n-1)}$ ($x_0,\dot{x}_0,\ldots,x_0^{(n-1)}$ – какие-то числа)

Обозначение: $f(t,x^0,x^1,\ldots,x^{n-1})$ индексы переменных.

Теорема

Если $f\in C(U)$, $\frac{\partial f}{\partial x^0},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x^{n-1}}\in C(U)$, то задача Коши для уравнения $x^{(n)}=f(t,x,\dot{x},\ldots,x^{(n-1)})$ имеет единственное непродолжаемое решение.

Доказательство:

Сведём уравнение к системе, пусть $\dot{x}^0=x^1$, $\dot{x}^1=x^2,\ldots,\dot{x}^{n-2}=x^{n-1}$,
$\dot{x}^{n-1}=f(t,x^0,x^1,\ldots,x^{n-1})$

Независимая переменная t,
зависимые переменные $x^0,x^1,\ldots,x^{n-1}$

Задача Коши сводится к задаче Коши для системы.

Линейные уравнения с постоянными комплексными коэффициентами

Определение Линейным неоднородным уравнением с постоянными коэффициентами порядка n называется

$(*)$ $z^{(n)}+a_1z^{(n-1)}+a_2z^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}\dot{z}+a_nz=b(t)$, $z,a_i\in\mathbb{C}$, $b: I\to\mathbb{C}$, $I\subset\mathbb{R}$

Решение: $z=\xi(t)$, $\xi: J\to\mathbb{C}$, $J\subset I$

Определение

Если $b(t)\equiv0$, то это – линейное однородное уравнение

Как решать линейные однородные уравнения?

Поищем экспоненциальное решение.

$$z=e^{\lambda t}, \quad \lambda=\alpha+i\beta \quad e^{\lambda t}=e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t)$$

$\frac{d}{dt}(e^{\lambda t})=\lambda e^{\lambda t}$ (проверяется непосредственно

после подстановки $z=e^{\lambda t}$ в (*) получится:
при $b(t)\equiv 0$

$\lambda^n e^{\lambda t}+a_1\lambda^{n-1}e^{\lambda t}+\ldots+a_{n-1}\lambda e^{\lambda t}+a_n e^{\lambda t}=0$. т.к. $e^{\lambda t}\neq 0\ \forall t$, то

$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n=0 \iff e^{\lambda t}$ – решение

Определение

Пусть есть линейное однородное уравнение с ~~однород~~ постоянными коэффициентами $z^{(n)}+a_1z^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}\dot z+a_nz=0$. ~~то его~~ Его характеристическим многочленом называется многочлен $\chi(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_n$.

Характеристическим уравнением называется уравнение $\chi(\lambda)=0$

Замечание

Решения линейного однородного уравнения образуют векторное пространство (если они определены на одном и том же интервале.

Пример

а) $\ddot z-z=0 \quad \chi(\lambda)=\lambda^2-1 \quad \lambda^2-1=0 \iff \lambda=\pm1$

тогда $\xi=C_1e^t+C_2e^{-t}$ – решение. $(C_1,C_2\in\mathbb{C})$

б) $\ddot z+z=0 \quad \chi(\lambda)=\lambda^2+1 \quad \lambda^2+1=0 \iff \lambda=\pm i$

$\xi=C_1e^{it}+C_2e^{-it}$ – решение $(C_1,C_2\in\mathbb{C})$

$$\begin{cases}\cos t=\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\\ \sin t=\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\end{cases} \Leftarrow \begin{cases}e^{it}=\cos t+i\sin t\\ e^{-it}=\cos t-i\sin t\end{cases}$$

$\xi=\tilde C_1\cos t+\tilde C_2\sin t, \quad \tilde C_1,\tilde C_2\in\mathbb{C}$

в) $\dddot z-2\dot z+z=0, \quad \chi(\lambda)=\lambda^2-2\lambda+1 \quad \chi(\lambda)=0 \iff \lambda=1$

$\xi=C_1e^t$ – решение. // А где II-е решение?

Изменим немного коэффициенты, чтобы корни $\chi(\lambda)=0$ были λ и $\lambda+\Delta\lambda$. Тогда $e^{\lambda t}$ и $e^{(\lambda+\Delta\lambda)t}$ решения

Неприятность при $\Delta\lambda\to0$. Можно хитро обойти:

~~Т.е.~~ Рассмотреть $\frac{e^{(\lambda+\Delta\lambda)t}-e^{\lambda t}}{\Delta\lambda}$, а это $\xrightarrow[\Delta\lambda\to0]{} te^{\lambda t}$ –

это и есть II решение

$\xi=C_1e^t+C_2te^t$

Теорема

Непродолжаемые решения линейного однородного уравнения порядка n с постоянными ~~коэффициентами~~ комплексными определены на $\mathbb{R}$ и образуют векторное пространство над $\mathbb{C}$ размерности n с базисом $e^{\lambda_k t} t^{l_k}$, где λ_k - корень характеристического уравнения $\chi(\lambda)=0$ кратности μ_k, с $l_k=0,\dots,\mu_k-1$.

Замечание

число элементов базиса равно $\mu_1+\dots+\mu_m=n$, где m - число различных корней $\chi(\lambda)=0$

Квазимногочлен

Определение

Элементарным квази многочленом степени d с показателем λ называется функция из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{C}$ вида $p(t)e^{\lambda t}$, где p - многочлен степени d, $t\in\mathbb{R}$, $p\in\mathbb{C}[t]$

Определение

Квазимногочленом называется конечная сумма элементарных квазимногочленов (с различными показателями) произвольных степеней.

Теорема 1

Элементарные (ненулевые) квазимногочлены ~~все~~ с различными показателями линейно независимы над $\mathbb{C}$.

~~Пример~~ **Доказательство (теоремы 1)** ~~пусть~~

1) ~~$e^{\lambda t}$~~ Пусть $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ - попарно различные числа и пусть

$$C_1e^{\lambda_1 t}+\dots+C_ne^{\lambda_n t}=0$$

Тогда $C_1\lambda_1e^{\lambda_1 t}+\dots+C_n\lambda_ne^{\lambda_n t}=0$ (производная)

$$C_1\lambda_1^{n-1}e^{\lambda_1 t}+\dots+C_n\lambda_n^{n-1}e^{\lambda_n t}=0$$

Положим $t=0$. Тогда имеем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} C_1+\dots+C_n=0\\ C_1\lambda_1+\dots+C_n\lambda_n=0\\ \dots\\ C_1\lambda_1^{n-1}+\dots+C_n\lambda_n^{n-1}=0\end{cases} \quad \text{с матрицей} \begin{pmatrix}1 & 1 & \dots & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1}\end{pmatrix},$$

её определитель - определитель Ван-дер-Монда равен $\prod_{i>j}(\lambda_i-\lambda_j)\neq0$, значит (единственность решения системы) $C_1=\dots=C_n=0$, т.е. $\{e^{\lambda_i t}\}$ линейно независимы.

2) Пусть $\mathcal{P}$ - пространство всех квазимногочленов оператор дифференцирования на нём $\frac{d}{dt}:\mathcal{P}\to\mathcal{P}$ (производная квазимногочлена - квазимногочлен)

Рассмотрим оператор $\left(\frac{d}{dt}-\lambda\cdot id_p\right)$. $\left(\frac{d}{dt}-\lambda\cdot id_p\right)\left(p(t)e^{\lambda t}\right)=$
$=p'(t)e^{\lambda t}+\lambda p(t)e^{\lambda t}-\lambda p(t)e^{\lambda t}=p'_{\text{квази}}(t)e^{\lambda t}$, т.е. он уменьшает степень элементарного многочлена с показателем λ на 1.
т.е. Элементарный квазимногочлен с показателем λ степени d является корневым вектором оператора $\frac{d}{dt}$ высоты $d+1$ с собственным значением λ, а корневые вектора с различными собственными значениями линейно независимы (Алгебра, жорданов базис).

Теорема 1 доказана.

Теорема 2

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами, правая часть которого — квазимногочлен (м.б. нулевой, м.б. неэлементарный). Тогда любое его решение продолжается до квазимногочлена.

Доказательство:

1) Пусть $n=1$ (порядок уравнения), $\dot{z}-az=b(t)$, $b(t)$ квазимногочлен
$z=Ce^{at}$ — решение однородного уравнения. $z=C(t)e^{at}$ ← подставим (вариация постоянной)
$\dot{C}e^{at}+aCe^{at}-aCe^{at}=b(t)$, $\dot{C}=e^{-at}b(t)$ ← квазимногочлен, общее решение
$C=\int e^{-at}b(t)\,dt$ — квазимногочлен $\Rightarrow C(t)e^{at}$ — квазимногочлен.

2) ~~Пусть~~ $n\geq 2$. $\underset{n\text{ степень}}{\chi(\lambda)}=(\lambda-\lambda_0)\chi_{n-1}(\lambda)$, $\chi_n(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_n$
$\chi_{n-1}(\lambda)=\lambda^{n-1}+\tilde{a}_1\lambda^{n-2}+\ldots+\tilde{a}_{n-1}$

λ_0 — корень уравнения $\chi(\lambda)=0$,
λ_0 существует по основной теореме алгебры

$z=\xi(t)$ — решение дифференциального уравнения $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \left(\chi_n\left(\frac{d}{dt}\right)\right)(\xi)(t)=0$, где χ_n — его характеристический многочлен
(Важно, что a_i — числа, а не функции).

$\chi_n(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)\chi_{n-1}(\lambda)$

$\chi_n\left(\frac{d}{dt}\right)=\left(\frac{d}{dt}-\lambda_0 id\right)\chi_{n-1}\left(\frac{d}{dt}\right)$ (a_i — числа) $\dot{\xi}-a_2(t)\xi$

Замечание $\ddot{\xi}-a_2(t)\dot{\xi}-\dot{a}_2\xi-a_1(t)\dot{\xi}+a_1a_2\xi$

Если a_i — функции, то $\left(\frac{d}{dt}-a_1(t)id\right)\left(\frac{d}{dt}-a_2(t)id\right)\xi=$
$=\left(\frac{d^2}{dt^2}-a_2(t)\frac{d}{dt}-a_2'(t)id-a_1(t)\frac{d}{dt}+a_1(t)a_2(t)id\right)\xi$
$=\ddot{\xi}-a_2(t)\dot{\xi}-\underbrace{a_2'(t)\xi}_{\text{мешает}}-a_1(t)\dot{\xi}+a_1(t)a_2(t)\xi$

Если верно для $k=n-1$, то ~~надо~~
$\left(\frac{d}{dt}-\lambda_0 id\right)\chi_{n-1}\left(\frac{d}{dt}\right)(\xi)(t)=b(t)$.

Тогда $\chi_{n-1}\left(\frac{d}{dt}\right)(\xi)(t)$ — квазимногочлен (по случаю $n=1$)

Тогда $\xi(t)$ — квазимногочлен по предположению индукции.