Лекция 4. 22.09.2010

Дифференциальные формы

1) **Определение**

Дифференциальной формой на U называется линейная форма с функциональными коэффициентами
$\omega = \sum M_i(\overline{x})\, dx_i$ $(\overline{x} \in U \subset \mathbb{R}^n,\ \overline{x} = (x_1, \dots, x_n),\ n = 1, 2)$
$\omega\colon U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\quad \omega(\overline{x}, \overline{\xi}) = \sum M_i(\overline{x})\, \xi_i,\ \overline{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$

2) Если $F\colon U \to \mathbb{R}$, $F \in C^1(U)$, то $dF = \sum\limits_i \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i$

3) Пусть $\overline{g}\colon U \to V$, $U \subseteq \mathbb{R}^k$, $V \subseteq \mathbb{R}^l$, $g \in C^1(U)$, ω – дифференциальная форма на V.

Определение

Форма $g^*\omega$ есть прообраз ω при отображении g (т.е. $g^*\omega = \sum\limits_i M_i(\overline{y})\, dy_i \Big|_{\substack{y_i = g_i(\overline{x}) \\ \overline{y} \in V}}$, если $\omega = \sum\limits_i M_i(\overline{y})\, dy_i$)
$\overline{g}(\overline{x}) = (g_1(\overline{x}), \dots, g_l(\overline{x}))$

Пример:

$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ g(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3,\ \omega = dy$
тогда $g^*\omega = g^* dy = \cancel{g^*} d(x_1^3 + x_2^3) = 3x_1^2 dx_1 + 3x_2^2 dx_2$.

4) Свойства g^*.

Определение

Если $f\colon V \to \mathbb{R}$, то $g^* f = f \circ g$

а) $g^* df = d(f \circ g) = d(g^* f)$ (по определения) // инвариантность I дифференциала

б) $\begin{tikzcd} U \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "h \circ g"] & V \arrow[r, "h"] & W \end{tikzcd}$

$g^*(h^*\omega) \qquad h^*\omega \qquad \omega$

$g^*(h^*\omega) = (h \circ g)^*\omega$, т.е. $(h \circ g)^* = g^* h^*$

5) Пусть ω — дифференциальная форма.
Тогда $\omega=0$ — дифференциальное уравнение.
$\tilde{\omega}$ — поле направлений

Пусть $\omega = M\,dx + N\,dy$, $M^2+N^2 \neq 0$,
$\tilde{\omega}$ — поле направлений вектора $(N, -M)$
Рассмотрим $\bar{\gamma} : I \to \mathbb{R}^2$.

$$\bar{\gamma} \text{ — решение } \omega=0 \iff \bar{\gamma}^*\omega = 0$$

Пусть $\bar{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$,
$\omega = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$.

$$\bar{\gamma}^*\omega = M(\bar{\gamma}(t))\cdot\dot{\gamma}_1(t)\,dt + N(\bar{\gamma}(t))\cdot\dot{\gamma}_2(t)\,dt =$$
$$= dt\,\left(M(\bar{\gamma}(t))\,\dot{\gamma}_1(t) + N(\bar{\gamma}(t))\cdot\dot{\gamma}_2(t)\right)$$

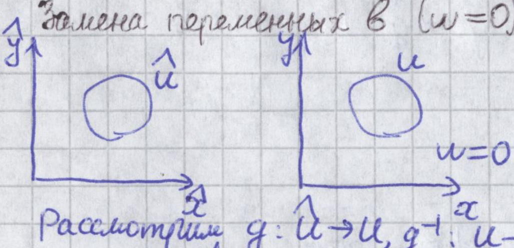
6) Определение

$\omega=0$ — дифференциальное уравнение в полных дифференциалах
$\iff \omega = dF$, где $F \in C^1(U)$

Решение уравнения в полных дифференциалах:

$$\gamma^* dF = 0 \iff d(\gamma^* F) = 0 \iff F\circ\gamma = \gamma^* F = \text{const}$$
$$F(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$$

7) Замена переменных в $(\omega=0)$.



Рассмотрим $g: \hat{U} \to U$, $g^{-1}: U \to \hat{U}$, $g, g^{-1} \in C^1$
Тогда на $\hat{U}$ определено уравнение $g^*\omega = 0$.

Пример:

$\omega = x\,dy$.
$g(\hat{x},\hat{y}) = (\hat{x}^2+\hat{y}^2, \hat{x}^2-\hat{y}^2)$ $\quad g^*\omega = (\hat{x}^2+\hat{y}^2)\,d(\hat{x}^2-\hat{y}^2)$

Основное свойство:

$\gamma: I \to \hat{U}$ — решение $g^*\omega=0 \iff g\circ\gamma$ — решение $\omega=0$

$$\iff \gamma^*(g^*\omega) = 0 \iff (g\circ\gamma)^*\omega = 0 \iff$$

Геометрический смысл – строить поле направлений $g^*\omega$ надо отыскать прообраз $\omega=0$, провести касательную.

γ касается $g^*\omega$ в точке $(\hat{x}_0, \hat{y}_0) \Leftrightarrow g\circ\gamma$ касается $\widetilde{\omega}$ в точке $g(\hat{x}_0, \hat{y}_0)$.

Симметрии дифференциальных уравнений.

Определение

$g: U \to V$ – диффеоморфизм $\Leftrightarrow g \in C^1(U)$, $\exists g^{-1}: V \to U$, $g^{-1} \in C^1(V)$.
// Иногда вместо C^1 рассматривают D.

Определение

Пусть $g: U \to U$ – диффеоморфизм, тогда g – симметрия дифференциального уравнения $\omega = 0 \Leftrightarrow g^*\omega = \widetilde{\omega}$
В этом случае говорят, что уравнение $\omega=0$ инвариантно относительно g.

Примеры:

Автономные уравнения инвариантны относительно всех сдвигов независимой переменной $(t,x) \longmapsto (t+s, x)$ $\forall s \in \mathbb{R}$

$\dot{x} = v(x)$ $\quad$ $dx = v(x)dt$. Прообраз – $dx = v(x)d(t+s)$.
Т.к. $s = const$, то $dt = d(t+s)$.

Если $x = \varphi(t)$ – решение, то $x = \varphi(t+s)$ – решение
$\left(\frac{d\varphi(t+s)}{dt} = \dot{\varphi}(t+s) = v(\varphi(t+s)) \Rightarrow \varphi(t+s) \text{ – решение}\right)$

Упражнение

Почему это неверно при $\dot{x} = v(t,x)$?

Свойство симметрии:

Если g – симметрия ДУ, γ – его решение, то $g^{-1}\gamma$ – решение

Определение

Уравнение называется однородным, если оно инвариантно относительно всех растяжений $(x,y)\mapsto(\lambda x,\lambda y)\ \forall\lambda>0$. (Решения ДУ переходят в решения при растяжениях)

Примеры:

а) $\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)$ $\quad d(\lambda y)=f\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right)d(\lambda x)\Leftrightarrow dy=f\left(\frac{y}{x}\right)dx$.

б) **Определение**

Функция (на плоскости) называется однородной степени d, если $f(\lambda\bar{x})=\lambda^d f(\bar{x})\ \forall\lambda>0$.

Многочлен все мономы которого степени d, однородный степени d

$x^2y+y^3+x^3$ – однородный степени 3.

Если M, N однородны степени d, то $M\,dx+N\,dy=0$ однородно степени $d+1$.

Определение

Уравнение называется квазиоднородным с весами $\alpha,\beta\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, если оно инвариантно относительно квазиоднородных растяжений с весами $\alpha,\beta\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, т.е. $(x,y)\mapsto(\lambda^\alpha x,\lambda^\beta y),\ \lambda>0$.

Квазиоднородные функции степени d с весами α,β – $f(\lambda^\alpha x,\lambda^\beta y)=\lambda^d f(x,y)\ \forall\lambda>0$

Пример:

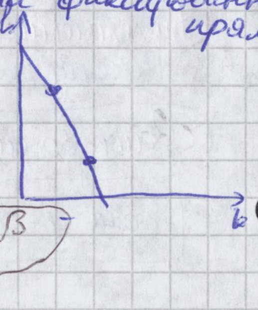
$\alpha=2\ \beta=1\ d=3 \qquad xy+y^3$.

Теорема

Многочлен от x,y является квазиоднородной функцией степени d с весами α,β, когда все его мономы x^ky^l удовлетворяют равенству $\alpha k+\beta l=d$.

Диаграммы Ньютона

Каждый моном x^ky^l (с ненулевым коэффициентом) обозначается точкой (k,l). Тогда теореме удовлетворяют многочлены, все мономы которого лежат на фиксированной прямой



Пример (квазиоднородного уравнения)

$y'=f(x,y)$, f – квазиоднородная функция с весами α,β степени $\beta-\alpha$

$(dy=f(x,y)dx,\ \lambda^\beta dy=\lambda^d f(x,y)\cdot\lambda^\alpha dx$.
$d=\beta-\alpha\Rightarrow\lambda$ сокращается)

Квазиоднородные формы степени d с весами α,β –
$g:(x,y)=(\lambda^\alpha x,\lambda^\beta y),\ g^*\omega=\lambda^d\omega$

Пример: $x^ky^l dx$ – $d=\alpha k+\beta l+\alpha$
$x^ky^l dy$ $\quad d=\alpha k+\beta l+\beta$

Тезис: Квазиоднородные формы задают квазиоднородные уравнения.