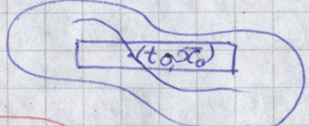
06.10.10 Лекция 6

I. 1) Продолжение решений СДУ

Теорема 1

Пусть $U \subset \mathbb{R}^{1+n}$ – область, $v_i, \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \in C(U)$, $\overline{v} = (v_1, \dots, v_n) : U \to \mathbb{R}^n$; $K \subset U$, K – компакт, $(t_0, \overline{x}_0) \in K$. Тогда график единственного непродолжаемого решения ~~с нач~~ СДУ $\dot{\overline{x}} = \overline{v}(t, \overline{x})$ с начальным условием $(t_0, \overline{x}_0)$ пересекает дополнение компакта $U \setminus K$ как при $t > t_0$, так и при $t < t_0$.



~~Доказательство:~~

2) Лемма об интегральном уравнении.

Пусть $v_i \in C(U)$, $(t_0, \overline{x}_0) \in U$. Тогда $\overline{\varphi} : I \to \mathbb{R}^n$ – решение СДУ $\dot{\overline{x}} = \overline{v}(t, \overline{x})$ с начальным условием $\overline{\varphi}(t_0) = \overline{x}_0$ тогда и только тогда, когда 1) $\overline{\varphi} \in C(I)$; 2) $\overline{\varphi}(t) = \overline{x}_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \overline{v}(t, \varphi(\tau))\, d\tau$ $\forall t \in I$, $(I = (a, b))$

Доказательство:

$\Rightarrow$ $\overline{\varphi}$ – решение $\Rightarrow \overline{\varphi}(t_0) = \overline{x}_0$, $\dot{\overline{\varphi}}(t) = \overline{v}(t, \overline{\varphi}(t))$

Но $\overline{\varphi}$ непрерывна и дифференцируема, $\overline{v} \in C(U)$, значит, $\overline{v}(t, \overline{\varphi}(t)) \in C(I) \Rightarrow \dot{\overline{\varphi}} \in C(I)$

Тогда $\overline{\varphi}(t) - \underbrace{\overline{\varphi}(t_0)}_{\overline{x}_0} = \int\limits_{t_0}^{t} \overline{v}(\tau, \overline{\varphi}(\tau))\, d\tau$.

$\Leftarrow$: $\overline{\varphi} \in C(I)$, $\dot{\overline{v}} \in C(U) \Rightarrow \overline{v}(t, \overline{\varphi}(t)) \in C(U) \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{\varphi}(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \overline{v}(\tau, \overline{\varphi}(\tau))\, d\tau \in \mathcal{D}(I)$ и $\dot{\overline{\varphi}}(t) = \overline{v}(t, \overline{\varphi}(t))$

$\Rightarrow \overline{\varphi}$ – решение.

Кроме того, $\overline{\varphi}(t_0) = \overline{x}_0$, что и требовалось.

3) Доказательство (теоремы 1)

$(t_0,\bar{x}_0)\in K$, $\bar\varphi: I\to\mathbb{R}^n$, $I=(a,b)$, $\bar\varphi(t_0)=\bar{x}_0$

~~Предположим противное~~

Пусть $t>t_0$, $t<b$ и $(t,\bar\varphi(t))\in K\ \forall t>t_0$.

Тогда $b<+\infty$ и $\bar\varphi$ можно продолжить на интервале $(a, b+\varepsilon)$ для некоторого $\varepsilon>0$.

Действительно, ~~$b<+\infty$~~ $\bar\varphi(t)=\bar{x}_0+\int_{t_0}^{t}\bar v(\tau,\bar\varphi(\tau))\,d\tau\quad \forall t\in[t_0,b)$.

Но $\bar\varphi$ ограничена на K $\Rightarrow$ $\bar v(\tau,\bar\varphi(\tau))$ ограничена на $[t_0,b)$ (и непрерывна на $[t_0,b)$)

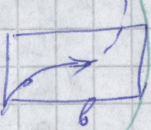
Пусть $\bar\varphi(b)=\bar{x}_0+\int_{t_0}^{b}\bar v(\tau,\bar\varphi(\tau))\,d\tau$

Тогда $\bar\varphi\in C([t_0,b])$ (т.к. $\int_{t_0}^{b}$ сходится)

Теперь надо решить уравнение с начальным условием $(b,\bar\varphi(b))$ на интервале $(b-\varepsilon,b+\varepsilon)$

$$\bar\psi(t)=\bar\varphi(b)+\int^{t}\bar v(\tau,\bar\psi(\tau))\,d\tau\quad\forall t\in(b-\varepsilon,b+\varepsilon)$$

(используется теорема существования).



Пусть $\bar\Phi(t)=\begin{cases}\bar\varphi(t), & t<b\\ \bar\psi(t), & t\geq b\end{cases}\quad\forall t\in(a,b+\varepsilon)$

$\bar\Phi$ — решение, т.к.

если $t\in(a,b)$, очевидно, т.к. $\bar\Phi(t)=\bar\varphi(t)$

если $t\geq b$, то $\underbrace{\bar\Phi(t)}_{=\bar\psi(t)}=\bar\varphi(b)+\int_{b}^{t}\bar v(\tau,\underbrace{\bar\Phi(\tau)}_{=\bar\psi(\tau)})\,d\tau=$

$$=\bar\varphi(t_0)+\int_{t_0}^{b}\bar v(\tau,\underbrace{\bar\Phi(\tau)}_{=\bar\varphi(\tau)})\,d\tau+\int_{b}^{t}\bar v(\tau,\bar\Phi(\tau))\,d\tau=$$

$$=\underbrace{\bar\varphi(t_0)}_{=\bar{x}_0}+\int_{t_0}^{t}\bar v(\tau,\bar\Phi(\tau))\,d\tau\ \Rightarrow\ \bar\Phi\text{ — решение задачи Коши}$$

(по лемме об интегральном уравнении)

Значит, решение $\bar\varphi$ можно продолжить и $\bar\varphi$ не может быть непродолжаемым.

4) Переформулировка

Определение

Решение с начальным условием $(t_0, \bar{x}_0)$ продолжается вперёд (назад) до множества $\Gamma \subset U$, если у него есть продолжение, график которого пересекает Γ при некотором $t_* > t_0$ $(t_* < t_0)$.

Следствие (из Теоремы 1)

Решение СДУ $\dot{\bar{x}} = \bar{v}(t, \bar{x})$ с начальным условием из внутренности компакта $K \subset U$ продолжается единственным образом вперёд и назад до его границы, если $v_i, \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \in C(U)$.

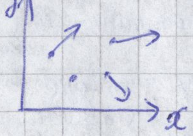
II. Автономные системы дифференциальных уравнений

Определение

Система $\dot{\bar{x}} = \bar{v}(\bar{x})$, где $\bar{v}: W \to \mathbb{R}^n$, $W \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{x} \in W$, называется автономной.

Замечание $U = \underbrace{\mathbb{R}}_{t} \times \underbrace{W}_{\bar{x}}$.

$\bar{v}$ трактуется как векторное поле, в каждой точке $\bar{x} \in W$ задан вектор $\bar{v}(\bar{x})$, который называют фазовой скоростью.



Определение

Если $\bar{v}(\bar{x}_*) = 0$, то $\bar{x}_*$ — особая точка векторного поля $\bar{v}$.

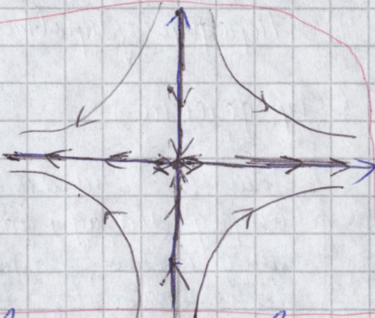
Определение

Если $v_i, \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \in C(W)$ (или просто $\bar{v} \in C^1(W)$), то

образ непродолжаемого решения $\bar{\varphi}: I \to W$ называется фазовой кривой.

Пример

$$\begin{cases}\dot{x}=x\\ \dot{y}=-y\end{cases}\qquad \begin{matrix}x=x_0e^{t}\\ y=y_0e^{-t}\end{matrix}\qquad xy=x_0y_0$$



$(0,0)$ - особая точка

Утверждение

Особая точка векторного поля является его фазовой кривой

9 фазовых кривых на рисунке.

Теорема 2

Если $\bar{v}\in C^1(W)$, то через каждую точку $\bar{x}_0\in W$ проходит ровно одна фазовая кривая.

Доказательство:

Пусть

$\bar{\varphi}: I\to\mathbb{R}^n$ — непродолжаемое решение, $\dot{\bar{x}}=\bar{v}(\bar{x})$, $\bar{\varphi}(t_0)=\bar{x}_0$, $t_0\in I$

$\bar{\psi}: J\to\mathbb{R}^n$ — непродолжаемое решение, $\bar{\psi}(t_1)=\bar{x}_0$.

Уравнение инвариантно относительно сдвигов.

$\frac{d\bar{x}}{dt}=v(\bar{x})$ при сдвигах $t\mapsto t+s$ не меняется $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ непродолжаемое решение при сдвигах переходит в непродолжаемое

Рассмотрим решение $\bar{\varphi}^{t_1-t_0}(t)=\bar{\varphi}(t-t_0+t_1)$

$\bar{\varphi}^{t_1-t_0}$ - непродолжаемое, $\bar{\varphi}^{t_1-t_0}(t_1)=\bar{x}_0$

Значит, $\bar{\varphi}^{t_1-t_0}=\bar{\psi}$ по теореме единственности. Но образ $\bar{\psi}=$ $=$ образ $\bar{\varphi}^{t_1-t_0}$ $=$ образ $\bar{\varphi}^{t}$ $\Rightarrow$ фазовые кривые, определяемые $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$ совпадают.

Утверждение

Если фазовая кривая - не точка, то 1) она не проходит через особые точки (по теореме единственности)

2) касается векторного поля (является интегральной кривой поля направлений, определяемого этим векторным полем)

3) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dx_1}{v_1}=\frac{dx_2}{v_2}=\ldots=\frac{dx_n}{v_n}$$

Практически:

$$\begin{cases}\dot{x}_1=v_1(x_1,x_2)\\ \dot{x}_2=v_2(x_1,x_2)\end{cases}\quad \begin{matrix}\frac{dx_1}{dt}=v_1(x_1,x_2)\\ \frac{dx_2}{dt}=v_2(x_1,x_2)\end{matrix}\;\rightarrow\;\frac{dx_1}{dx_2}=\frac{v_1}{v_2}\iff\frac{dx_1}{v_1}=\frac{dx_2}{v_2}$$

Задача: Нарисовать фазовые кривые для простейшей модели хищник-жертва $\begin{cases}\dot{x}=bx-Axy\\ \dot{y}=-ay+Bxy\end{cases}$, $a,b,A,B>0$ $=1$