16.11.2010 Лекция №11.

Системы линейных однородных уравнений I порядка с переменными коэффициентами

(*) $\dot{\bar{x}} = A(t)\bar{x}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $A: I \to \operatorname{End} \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{n^2}$ – пространство матриц

$A \in C^0(I)$ $\quad (a_{ij} \in C^0(I),\ A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n})$

$\boxed{\dot{\bar{x}} = \bar{v}(t,\bar{x}),\ a_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j},\ v: U \to \mathbb{R}^n,\ U \subseteq \mathbb{R}^n}$ сейчас $\bar{v}(t,\bar{x}) = A(t)\bar{x}$

$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = a_{ij}(t)\ldots$ $\quad v_i = a_{i1}(t)x_1 + \ldots + a_{in}(t)x_n$

Теорема 1

Все непродолжаемые решения системы (*) определены на I.

Доказательство.

Пусть $\bar{\varphi}: J \to \mathbb{R}^n$ – решение, $J \subset I$, $t_0 \in J$, $\bar{\varphi}(t_0) = \bar{x}_0$, $t_1 < t_0 < t_2$, $t_1, t_2 \in I$

Докажем, что $\bar{\varphi}$ продолжается до t_1 и t_2.

Пусть $M = \max\limits_{t\in[t_1,t_2]} \|A(t)\| = \max\limits_{t\in[t_1,t_2]} \max\limits_{|\bar{x}|=1} |A(t)x| = \max\limits_{(t,\bar{x})\in[t_1,t_2]\times S_1^{n-1}} |A(t)x|$

$[t_1,t_2]\times S_1^{n-1}$ – компакт в $I\times\mathbb{R}^n$

(M существует)

Тогда ~~по т~~ $|\dot{\bar{x}}| \le M|\bar{x}|$ $\forall t \in [t_1,t_2]$ $\quad (\|A\| \le M)$

$\Downarrow$ теорема о дифференциальном неравенстве

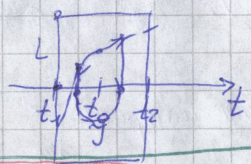
(**) $|\varphi(t)| \le e^{M|t-t_0|}|\varphi(t_0)| \le e^{M|t_2-t_1|}|\bar{x}_0|$ $\quad \forall t \in [t_1,t_2]$.

$\exists L > e^{M|t_2-t_1|}|\bar{x}_0|$, L – const.

Теперь применяем теорему о продолжении

Возьмём компакт $K = [t_1,t_2]\times Ш_L \subset I\times\mathbb{R}^n$.

шар радиуса L



Тогда, продолжая ~~до t_2 и до t_1~~ вперёд и назад решение, мы обязательно дойдём до $t=t_1$ и t_2, т.к. попадание на $|\bar{x}| = L$ запрещено неравенством (**).

Теорема 2

Пусть S – множество непродолжаемых решений системы (*). Тогда:

1) S – векторное пространство

2) $B_{t_0}: \bar{\varphi} \mapsto \bar{\varphi}(t_0)$ $(S \to \mathbb{R}^n)$ изоморфизм $\forall t_0 \in I$.

Доказательство

1) Если $\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2$ – решения системы (*). Тогда $\lambda_1\bar{\varphi}_1 + \lambda_2\bar{\varphi}_2$ – решение (*) $\forall \lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}$.

2) а) Очевидно B_{t_0} – линейный оператор.

б) $\operatorname{Ker} B_{t_0} = 0$ – по теореме единственности. (решение полностью определяется значением в t_0)

в) $\operatorname{Im} B_{t_0} = \mathbb{R}^n$ – по теореме существования.

Определение

Фундаментальной системой решений системы (*) называется базис пространства S.

Следствия теоремы 2.

1. Всякая система (*) имеет фундаментальную систему решений
2. Количество элементов в фундаментальной системе решений системы (*) равно n.
3. Если $\overline{\varphi}_1, \dots, \overline{\varphi}_m \in S$, то они линейно зависимы при $m > n$.
4. Решения (*) линейно зависимы тогда и только тогда, когда они зависимы хотя бы в одной точке.

Доказательство:

$\Rightarrow$ очевидно

$\Leftarrow$ Пусть $t_0 \in I$, $\overline{\varphi}_1(t_0), \dots, \overline{\varphi}_m(t_0)$ линейно зависимы.
Тогда $\underbrace{B^{-1}(\overline{\varphi}_1(t_0))}_{\overline{\psi}_1}, \dots, \underbrace{B^{-1}(\overline{\varphi}_m(t_0))}_{\overline{\varphi}_m}$ линейно зависимы.

Пример:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + yt \\ \dot{y} = -\frac{y}{t} \end{cases} \quad I = (C, +\infty). \quad A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & -\frac{1}{t} \end{pmatrix}$$

$\dot{y} = -\frac{1}{t} y \qquad y = \frac{C_2}{t}$ – решение

$\dot{x} = x + \frac{C_2}{t} t$, $\dot{x} = x + C_2$

ОРО: $\dot{x} = x$, $x = C_1 e^t$

ЧРН: $\dot{x}_2 = A$, $0 = A + C_2 \Rightarrow x_2 = -C_2$

ОРН: $x = C_1 e^t - C_2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^t - C_2 \\ \frac{C_2}{t} \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{t} \end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1/t \end{pmatrix}$ – фундаментальная система решений (одна из возможных)

Фундаментальная матрица

1) Набор решений $\overline{\varphi}_1, \dots, \overline{\varphi}_m$ можно записать в виде матрицы $\begin{pmatrix} \varphi_{11} & \dots & \varphi_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{1n} & \dots & \varphi_{mn} \end{pmatrix} = (\overline{\varphi}_1, \dots, \overline{\varphi}_m)$

вектора-столбцы.

2) Если $\overline{\varphi}_1, \dots, \overline{\varphi}_m$ – набор решений, то его матрица $\overline{\Phi}(t) = (\overline{\varphi}_1(t) \dots \overline{\varphi}_m(t))$ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\underset{n\times m}{\dot{\overline{\Phi}}(t)} = \underset{n\times n}{A(t)}\ \underset{n\times m}{\overline{\Phi}(t)} \quad (\dot{\Phi} = A\Phi)$$

3) Определение

Фундаментальной матрицей называется матрица фундаментальной системы решений.

Пример: $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & -1 \\ 0 & 1/t \end{pmatrix}$ – из примера.

4) Любое решение – линейная комбинация столбцов фундаментальной матрицы.

$$\overline{\psi} = \Phi(t)\,\overline{C} = C_1 \overline{\varphi}_1(t) + C_2 \overline{\varphi}_2(t) + \dots + C_n \overline{\varphi}_n(t), \quad \overline{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}, \quad \Phi = (\overline{\varphi}_1, \dots, \overline{\varphi}_n).$$

Замечание: $\dot{\overline{\Phi}} = A\Phi \Rightarrow \dot{\Phi}\overline{C} = A\Phi\overline{C} \Rightarrow \dot{\Phi}\overline{C} = A(\Phi\overline{C}) \Rightarrow A\,\overline{\psi}$

5) Если $\overline{\Phi}$ – фундаментальная матрица, то $\forall t_0 \in I \ \det \Phi(t_0) \neq 0$.
(по свойству (4)).
(если $\exists C_1, \dots, C_n : C_1\overline{\varphi}_1(t_0) + \dots + C_n\overline{\varphi}_n(t_0) = 0$, то
$C_1\overline{\varphi}_1(\cancel{t_0}) + \dots + C_n\overline{\varphi}_n \equiv 0$ (по теореме единственности))

Вариация постоянных

(***) $\dot{\overline{x}} = A(t)\overline{x} + B(t), \quad B : I \to \mathbb{R}^n$
(система линейных неоднородных уравнений)

Пусть $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица системы $\dot{\overline{x}} = A(t)x$.
Ищем решения исходной системы в виде

$$\overline{x} = \Phi(t)\overline{C}(t).$$

Тогда после подстановки в (***) получаем:
$\dot{\Phi}\overline{C} + \Phi\dot{\overline{C}} = A\Phi\overline{C} + B$, тогда, т.к. $\dot{\Phi} = A\Phi$, то $\Phi\dot{\overline{C}} = B$ и
$\dot{\overline{C}} = \Phi^{-1}B$ (т.к. $\det \Phi(t) \neq 0 \ \forall t \in I$) и
$\overline{C} = \int \Phi^{-1}(t)B(t)dt \Rightarrow \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)B(t)dt$ – решение исходной системы.

Пример:

$\begin{cases} \dot{x} = x + ty + 1/t \\ \dot{y} = -\frac{y}{t} - \frac{1}{t^2} \end{cases}$, $B = \begin{pmatrix} 1/t \\ -\frac{1}{t^2} \end{pmatrix}$, $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & -1 \\ 0 & 1/t \end{pmatrix}$, $\det \Phi(t) = \frac{e^t}{t}$, $\Phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & t \end{pmatrix}$

$\Phi^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{t} \end{pmatrix}$ $\quad \int \Phi^{-1}B\,dt = \begin{pmatrix} 0 \\ -\ln t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix}$
$t > 0$

$$\Phi \int \Phi^{-1}B\,dt = \begin{pmatrix} e^t & -1 \\ 0 & 1/t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t & -1 \\ 0 & 1/t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -\ln t \end{pmatrix} =$$

$$= D_1\begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix} + D_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1/t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \ln t \\ -\frac{\ln t}{t} \end{pmatrix}$$

$\begin{cases} x = \ln t \\ y = -\frac{\ln t}{t} \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{t} \\ \dot{y} = -\frac{1}{t^2} + \frac{\ln t}{t^2} \end{cases}$

$\dot{x} = x + ty + \frac{1}{t}$
$\frac{1}{t} = \ln t - \frac{t \ln t}{t} + \frac{1}{t}$
$\dot{y} = -\frac{y}{t} - \frac{1}{t^2}$
$-\frac{1}{t^2} + \frac{\ln t}{t^2} = \frac{\ln t}{t^2} - \frac{1}{t^2}$

Решение задачи Коши

$\dot{\overline{x}} = A(t)\overline{x}$, $\overline{\varphi}(t_0) = \overline{x}_0$.
Общее решение $\overline{\varphi} = \Phi(t)\overline{C}$
$\Phi(t_0)\overline{C} = \overline{x}_0$ – начальное условие, $\quad \overline{C} = \Phi^{-1}(t_0)\overline{x}_0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\overline{x}_0$ – решение задачи Коши