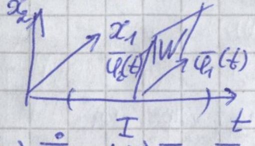
17.11.2010 Лекция №12.

Определитель Вронского (вронскиан) вектор-функции.

Определение

Пусть $\bar{\varphi}_1, \dots, \bar{\varphi}_n : I \to \mathbb{R}^n$. Тогда определителем Вронского функций $\bar{\varphi}_1, \dots, \bar{\varphi}_n$ называется $W_{\bar{\varphi}_1, \dots, \bar{\varphi}_n}(t) = \det(\underbrace{\bar{\varphi}_1(t), \dots, \bar{\varphi}_n(t)}_{\text{вектор-столбцы}})$

$n = 2$



$W(t)$ – объём (со знаком) параллелепипеда, натянутого на вектора $\bar{\varphi}_1(t), \dots, \bar{\varphi}_n(t)$.

(*) $\dot{\bar{x}} = A(t)\bar{x}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $A : I \to \operatorname{End} \mathbb{R}^n$, $A \in C^0(I)$, $A = (a_{ij})$, $a_{ij} : I \to \mathbb{R}$, $a_{ij} \in C(I)$

Теорема 1

Пусть $\bar{\varphi}_1, \dots, \bar{\varphi}_n : I \to \mathbb{R}^n$ – решения системы (*). Тогда следующие утверждения равносильны:

1) $\bar{\varphi}_1, \dots, \bar{\varphi}_n$ линейно зависимы ($\exists C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R}$, не все равные нулю, $C_1\bar{\varphi}_1(t) + \dots + C_n\bar{\varphi}_n(t) = 0 \ \forall t \in I$)
2) $W_{\bar{\varphi}_1, \dots, \bar{\varphi}_n}(t) = 0 \quad \forall t \in I$.
3) $\exists t_0 \in I \quad W_{\bar{\varphi}_1, \dots, \bar{\varphi}_n}(t_0) = 0$.

Доказательство:

1) $\Rightarrow$ 2) очевидно.
2) $\Rightarrow$ 3) аналогично.
3) $\Rightarrow$ 1) $W_{\bar{\varphi}_1 \dots \bar{\varphi}_n}(t_0) = 0 \Rightarrow \exists C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R}$, не все равные нулю, $C_1\bar{\varphi}_1(t_0) + \dots + C_n\bar{\varphi}_n(t_0) = 0$. $C_1\bar{\varphi}_1(t) + \dots + C_n\bar{\varphi}_n(t)$ – решение, по теореме единственности $(C_1\bar{\varphi}_1 + \dots + C_n\bar{\varphi}_n)(t) \equiv 0$.

Теорема 2 (Формула Лиувилля–Остроградского)

Если $\bar{\varphi}_1, \dots, \bar{\varphi}_n : I \to \mathbb{R}^n$ – решения системы ЛОУ (*), то

1) $\dot{W}_{\bar{\varphi}_1, \dots, \bar{\varphi}_n}(t) = \operatorname{tr} A(t) \cdot W_{\bar{\varphi}_1, \dots, \bar{\varphi}_n}(t) \quad \forall t \in I \quad (\dot{W} = \operatorname{tr} A \cdot W)$
2) $W(t) = W(t_0) \exp \int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(\tau)\, d\tau \quad \forall t, t_0 \in I$

Замечание.

2) $\Rightarrow (W(t) = 0 \Leftrightarrow W(t_0) = 0)$

Доказательство.

1) $\Rightarrow$ 2) является решением ЛОУ 1).

1): $W(t) = \det \Phi(t)$, $\Phi(t) = (\bar{\varphi}_1, \dots, \bar{\varphi}_n)$, $\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t)$.

$\Phi(t + \Delta t) = \Phi(t) + \dot{\Phi}(t)\Delta t + \bar{\bar{o}}(\Delta t)_{\Delta t \to 0}$.

$W(t + \Delta t) = \det \Phi(t + \Delta t) = \det(\Phi(t) + \dot{\Phi}(t)\Delta t) + \bar{\bar{o}}(\Delta t) =$

Определитель – многочлен от переменных матрицы

$\left| a_{ij}^0 + a_{ij}^1 \Delta t + \bar{\bar{o}}(\Delta t) \right|$ если откинуть $\bar{\bar{o}}(\Delta t)$, откинется $o(t)$

$= \det(\Phi(t) + A(t)\Phi(t)\Delta t) + \bar{\bar{o}}(\Delta t) =$
$= \det[(\mathbb{1} + A(t)\Delta t)\Phi(t)] + \bar{\bar{o}}(\Delta t) = \underbrace{\det \Phi(t)}_{W(t)} \det(\mathbb{1} + \Delta t A(t)) +$
$+ \bar{\bar{o}}(\Delta t) =$ см. сл. стр. $= W(t)(1 + \Delta t \operatorname{tr} A(t)) + \bar{\bar{o}}(t)$

$$\det(\mathbb{I}+A(t)\Delta t)=\begin{vmatrix}1+\Delta t a_{11} & \Delta t a_{12} & \cdots & \Delta t a_{1n}\\ \vdots & \ddots & & \vdots\\ \Delta t a_{n1} & \Delta t a_{n2} & \cdots & 1+\Delta t a_{nn}\end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}(1+\Delta t a_{ii})+\bar{o}(\Delta t)=$$

$$=1+\Delta t\sum_{i=1}^{n}a_{ii}+\bar{o}(\Delta t)$$

$$\dot{w}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{w(t+\Delta t)-w(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{w(t)+\Delta t\cdot \operatorname{tr}A(t)\,w(t)+\bar{o}(\Delta t)-w(t)}{\Delta t}=$$

$$=\operatorname{tr}A(t)\cdot w(t).$$

Замечание к Теореме 1.

Если $\bar{\varphi}_1,\dots,\bar{\varphi}_n$ — произвольные вектор-функции (не решения)

$1)\Rightarrow 2)\Rightarrow 3)$
лин. зав. $\quad W(t)\equiv 0 \quad w(t_0)=0$

$\boxed{3)\Rightarrow 1) \text{ неверно}}$

$3)\not\Rightarrow 2)$, т.к. если $\bar{\varphi}_1=t$, $n=1$, $W_{\bar{\varphi}}(t)=t$.

$2)\not\Rightarrow 1)$, т.к. если $\bar{\varphi}_1(t)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\bar{\varphi}_2(t)=\begin{pmatrix}t\\0\end{pmatrix}$, то $W_{\bar{\varphi}_1,\bar{\varphi}_2}(t)=0$, но $\bar{\varphi}_1(t)$ и $\bar{\varphi}_2$ не линейно зависимы.

Линейные уравнения порядка n с переменными коэффициентами

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\dots+a_{n-1}(t)\dot{x}+a_n(t)x=b(t),\quad a_i: I\to\mathbb{R},\ a_i\in C^0(I).$$

Тезис: уравнение — частный случай системы

$x_k=x^{(k)}$. Тогда
$$\begin{cases}\dot{x}_0=x_1\\ \dot{x}_1=x_2\\ \vdots\\ \dot{x}_{n-2}=x_{n-1}\\ \dot{x}_{n-1}=-a_n(t)x_0-a_{n-1}(t)x_1-\dots-a_1(t)x_{n-1}+b(t).\end{cases}$$

$\dot{\bar{x}}=A(t)\bar{x}+\bar{B}(t)$,

$\bar{x}=\begin{pmatrix}x_0\\x_1\\ \vdots\\x_{n-1}\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\ \cdots&&&&\cdots\\0&0&0&\cdots&1\\-a_n&-a_{n-1}&-a_{n-2}&\cdots&-a_1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\0\\b\end{pmatrix}$, ψ — решение уравнения $\Rightarrow\begin{pmatrix}\psi\\ \dot{\psi}\\ \vdots\\ \psi^{(n-1)}\end{pmatrix}$ — решение системы.

Теорема 1'

Непродолжаемые решения ЛОУ ($b\equiv 0$) определены на I.
(Следует из теоремы 1 для систем)

Теорема 2'

1) Пространство решений ЛОУ ($b\equiv 0$) является векторным пространством
2) $B_{t_0}:\ \psi\longmapsto\begin{pmatrix}\psi(t_0)\\ \dot{\psi}(t_0)\\ \vdots\\ \psi^{(n-1)}(t_0)\end{pmatrix}$, $S\to\mathbb{R}^n$, S — пространство решений. — изоморфизм

Доказательство.

1) аналогично
2) B_{t_0} линейный (аналогично), $\operatorname{Ker}B_{t_0}=0$ по теореме единственности, $\operatorname{Im}B_{t_0}=\mathbb{R}^n$ по теореме существования

Определение

Фундаментальной системой решений ЛОУ ($b \equiv 0$) ~~является~~ называется базис пространства всех непродолжаемых решений.

Свойства:

1) Всякое ЛОУ порядка n имеет ФСР из n решений.
2) Любые m решений линейно зависимы, если $m>n$.
3) Любое решение есть линейная комбинация решений из ФСР.

Вариация постоянных

Теорема 3

Пусть $\psi_1, \dots, \psi_n$ — Фундаментальная система решений ЛОУ ($b \equiv 0$), тогда $\tilde{\psi}$ — решение ЛНУ ($b \not\equiv 0$) тогда и только тогда, когда $\tilde{\psi} = c_1(t)\psi_1(t) + \dots + c_n(t)\psi_n(t)$, где $c_1, \dots, c_n$ удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} \dot{c}_1 \psi_1 + \dots + \dot{c}_n \psi_n = 0 \\ \dot{c}_1 \dot{\psi}_1 + \dots + \dot{c}_n \dot{\psi}_n = 0 \\ \vdots \\ \dot{c}_1 \psi_1^{(n-1)} + \dots + \dot{c}_n \psi_n^{(n-1)} = b \end{cases}$$

Доказательство.

Перейдем к системе

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} \psi_i \\ \dot{\psi}_i \\ \vdots \\ \psi_i^{(n-1)} \end{pmatrix}$ — решение ЛОС $\dot{\bar{x}} = A\bar{x}$, а $\Phi(t) = \begin{pmatrix} \psi_1(t) & \dots & \psi_n(t) \\ \dot{\psi}_1(t) & \dots & \dot{\psi}_n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_1^{(n-1)}(t) & \dots & \psi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$ — фундаментальная матрица $\dot{\bar{x}} = A\bar{x}$

теперь к системе $\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B$ применяем вариацию постоянных

$\bar{x} = \Phi(t)\,C(t)$ — решение $\Leftrightarrow \Phi(t)\,\dot{\bar{C}}(t) = B(t)$, $\dot{\bar{c}}(t) = \Phi^{-1}(t)\,B(t)$

Итак, $\Phi\dot{\bar{C}} = 0 \Leftrightarrow \Phi\bar{C}$ — решение ЛНС

$\Updownarrow$

$c_1\psi_1 + \dots + c_n\psi_n$ — решение ЛНУ.

Уравнения Эйлера

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + c_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + c_{n-1} x \frac{dy}{dx} + c_n y = 0, \quad x > 0$$

$$\chi(\lambda) = \underbrace{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1)}_{n} + c_1 \underbrace{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+2)}_{n-1} + \dots + c_{n-2}\lambda(\lambda-1) + c_{n-1}\lambda + c_n$$

Теорема 4

Заменой $x = e^t$, $t = \ln x$, наше уравнение сводится к линейному уравнению порядка n с постоянными коэффициентами и характеристическим многочленом χ

Доказательство:

После замены получится линейное уравнение

$$D_t y = 0, \quad D_t = \sum_{k=0}^{n} a_k(t) \frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}}$$

$$(a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = 0)$$

$\tilde{\chi}(\lambda)$ — характеристический многочлен нового уравнения.

$$\tilde{\chi}(\lambda) = e^{-\lambda t}(D_t e^{\lambda t})$$

$$D_t y = 0$$

$$= x^{-\lambda}(D_x x^\lambda) \quad e^{\lambda t} = x^\lambda, \quad D_x = \sum_{k=0}^{n} c_k(x) x^{n-k} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}$$

$$= \chi(\lambda) \Rightarrow \tilde{\chi}(\lambda) \text{ с постоянными коэффициентами} \Rightarrow a_i \equiv const$$