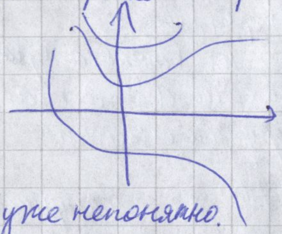
08.12.2010 Лекция №15

Классификация изолированных особых точек линейных систем с постоянными коэффициентами на плоскости

$\dot{\bar{x}} = \bar{v}_2(\bar{x})$ $\rightarrow$ фазовые кривые не пересекаются

$\bar{x} \in \mathbb{R}^2$



$\dot{\bar{x}} = \bar{v}_1(t, \bar{x})$ – тут уже непонятно.

Пример:

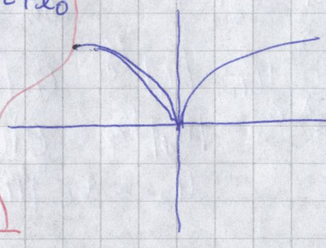
1) $\ddot{x} = 1$ $\quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = \frac{t^2}{2} + y_0 t + x_0 \\ y = t + y_0 \end{cases}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \Rightarrow y\,dy = dx \quad \frac{y^2}{2} = x + C$

2) $\ddot{x} = t$ $\quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = t \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = \frac{t^3}{6} + y_0 t + x_0 \\ y = \frac{t^2}{2} + y_0 \end{cases}$

$t=0 \quad x_0 = 0 \quad y_0 = 0 \quad \begin{cases} y = \frac{t^2}{2} \\ x = \frac{t^3}{6} \end{cases}$

Задача: $t = 1 \quad \begin{cases} y = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \\ x = \frac{t^3}{6} - \frac{1}{2}t + \frac{1}{3} \end{cases}$



$\dot{\bar{x}} = A\bar{x}, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^2, \quad A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2.$

$\det A \neq 0 \Rightarrow$ прямой ноль изолирован, и особая точка

Классификация (λ_1, λ_2 – собственные числа матрицы A)

~~Неустойчив~~	Неустойчивая	Устойчивая
седло	$\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$	
центр		$\mathrm{Re}\,\lambda_{1,2} = 0, \mathrm{Im}\,\lambda_{1,2} \neq 0$
узел	$\lambda_2 > \lambda_1 > 0$	$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$
Вырожденный узел	$\lambda_2 = \lambda_1 > 0$, A – жорданова клетка	$\lambda_2 = \lambda_1 < 0$, A – жорданова клетка
Дикритический узел	$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, A – скалярная	$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$, A – скалярная
фокус	$\mathrm{Im}\,\lambda_{1,2} \neq 0, \mathrm{Re}\,\lambda_{1,2} > 0$	$\mathrm{Im}\,\lambda_{1,2} \neq 0, \mathrm{Re}\,\lambda_{1,2} < 0$

т.к. A невырожденна, то $\lambda_{1,2}\neq 0$,
комплексные корни сопряжены, т.к. оператор действительный
$(\operatorname{Im} \lambda_{1,2} \neq 0)$

Рисунки фазовых кривых.

$\dot{\bar{x}} = A\bar{x}$ $\qquad$ $\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$

$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$

можно из второго уравнения выразить x_1
(или, если $a_{21}=0$, то просто решить)

Но будем решать другим способом.

Замена

$\bar{x} = T\bar{u}$, $\det T \neq 0$, T – матрица перехода.

$T\dot{\bar{u}} = AT\bar{u}$, $\quad \dot{\bar{u}} = T^{-1}AT\bar{u}$.

1) Седло: A диагонализируема $\left(\exists T: T^{-1}AT = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\right)$

$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ (жорданова форма такого вида)

тогда $\begin{cases}\dot{u}_1 = \lambda_1 u_1\\ \dot{u}_2 = \lambda_2 u_2,\end{cases}$ $\quad \bar{u} = (u_1, u_2)$, $\bar{x} = T\bar{u}$

$u_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}$

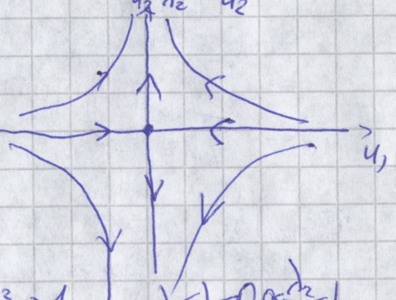
$u_2 = C_2 e^{\lambda_2 t}$ $\qquad \dfrac{du_1}{du_2} = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\dfrac{u_1}{u_2}$ $\qquad \dfrac{1}{\lambda_1}\dfrac{du_1}{u_1} = \dfrac{1}{\lambda_2}\dfrac{du_2}{u_2}$

$\dfrac{u_1^{\lambda_2}}{u_2^{\lambda_1}} = \dfrac{C_1^{\lambda_2}}{C_2^{\lambda_1}} = C$ $\qquad \ln|u_1|^{1/\lambda_1} = \ln|u_2|^{1/\lambda_2} + c$

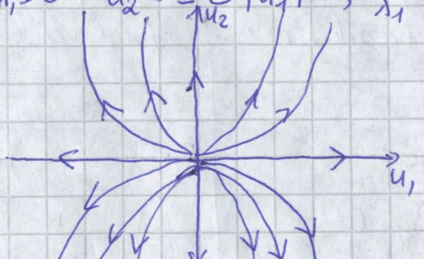
$|u_2|^{1/\lambda_2} = C|u_1|^{1/\lambda_1}$

$u_2 = \pm C|u_1|^{\lambda_2/\lambda_1}$

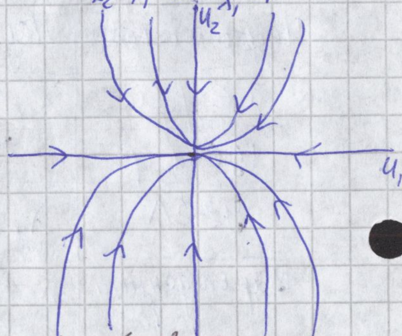
$\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} < 0.$



3) Узел $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ $\quad u_2 = \pm C|u_1|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$, $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1$ $\qquad \lambda_2 < \lambda_1 < 0$ $\quad 0 < \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} < 1$

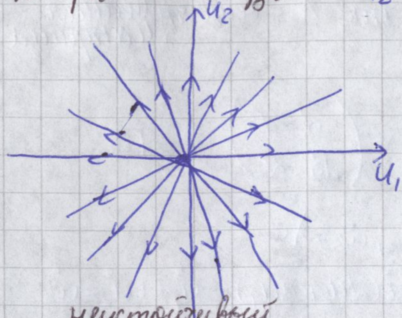


Неустойчивый узел

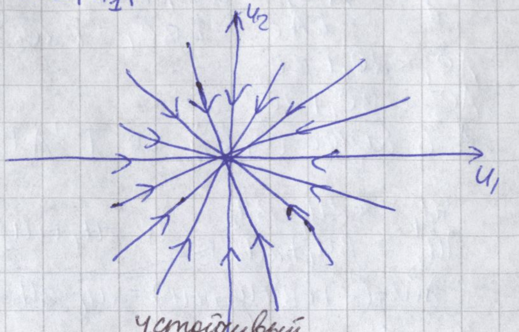


Устойчивый узел

5) Дикритический узел $u_2 = \pm C|u_1|$



неустойчивый



устойчивый

4) Вырожденный узел

$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$, TAT^{-1} жорданова клетка $= \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

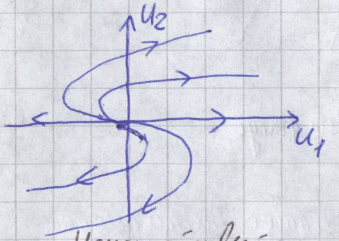
$$\begin{cases} \dot u_1 = \lambda u_1 + u_2 \\ \dot u_2 = \lambda u_2 \end{cases} \qquad \frac{du_1}{du_2} = \frac{u_1}{u_2} + \frac{1}{\lambda}$$

$$\frac{du_1}{du_2} = \frac{u_1}{u_2} \qquad u_1 = C u_2$$

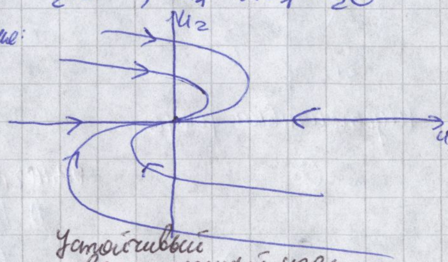
$$C' u_2 + C = C + \frac{1}{\lambda} \qquad C' = \frac{1}{\lambda u_2} \Rightarrow C = \frac{\ln|u_2|}{\lambda} + C_1$$

$$u_1 = \frac{1}{\lambda} u_2 \ln|u_2| + C_1 u_2$$

~~Частное~~ пол решение системы: $u_2 = C_2 e^{\lambda t}$, $\dot u_1 = \lambda u_1 + C_2 e^{\lambda t}$



Частное решение:
$u_2 \equiv 0$
$u_1 = C_1 e^{\lambda t}$



Неустойчивый узел вырожденный

Устойчивый вырожденный узел

2,6) Центр, фокус $\operatorname{Im} \lambda_{1,2} \neq 0$.

$\operatorname{Im} \lambda_1 \neq 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\beta > 0$, $\pm\beta = \operatorname{Im} \lambda_{1,2}$

Матрица A диагонализируема, приводится к $\begin{pmatrix} \alpha + i\beta & 0 \\ 0 & \alpha - i\beta \end{pmatrix}$.

Т.к. T вещественная, то надо действовать по-другому.

Пусть $\bar\xi$ — собственный вектор A, $\bar\xi \in \mathbb{C}^2$

$A\bar\xi = (\alpha + i\beta)\bar\xi$, $\bar\xi = \bar e_1 - i\bar e_2$, $\bar e_1, \bar e_2 \in \mathbb{R}^2$

Упражнение

Доказать, что $\bar e_1$ и $\bar e_2$ линейно независимы, если $\bar\xi \neq 0$.

тогда $\{\bar e_1, \bar e_2\}$ — новый базис, $\bar x = u_1 \bar e_1 + u_2 \bar e_2$

$A(\bar{e}_1 - i\bar{e}_2) = (\alpha + i\beta)(\bar{e}_1 - i\bar{e}_2)$

тогда $A\bar{e}_1 = \alpha\bar{e}_1 + \beta\bar{e}_2$,

$-iA\bar{e}_2 = i\beta\bar{e}_1 - i\alpha\bar{e}_2$, т.к. A – вещественная матрица.

$A\bar{e}_1 = \alpha\bar{e}_1 + \beta\bar{e}_2$

$A\bar{e}_2 = -\beta\bar{e}_1 + \alpha\bar{e}_2$

A в базисе $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$, т.е. $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, $\bar{x} = T\bar{u}$.

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \alpha u_1 - \beta u_2 \\ \dot{u}_2 = \beta u_1 + \alpha u_2 \end{cases} \xrightarrow{w = u_1 + iu_2} \dot{w} = \lambda w.$$

$\lambda w = (\alpha + i\beta)(u_1 + iu_2) = \alpha u_1 - \beta u_2 + i(\alpha u_2 + \beta u_1) = \dot{u}_1 + i\dot{u}_2 = \dot{w}$

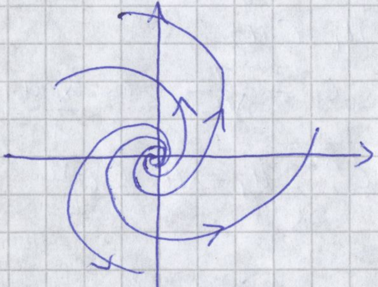
$w \in \mathbb{C}$

$w = Ce^{\lambda t}$

$|w| = |C| \cdot |e^{\lambda t}| = |C| \cdot e^{\alpha t}$

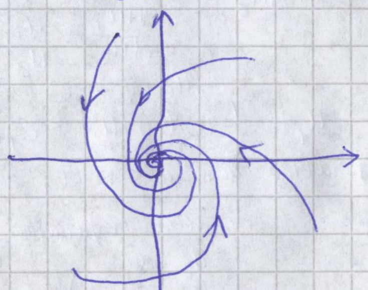
$2\pi m + \arg w = \arg C + \arg e^{\lambda t} = \arg C + \beta t$

$\alpha > 0$



неустойчивый фокус

$\alpha < 0$



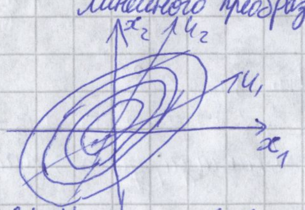
устойчивый фокус

$\alpha = 0$

центр.

Замечания

1) Наши картинки также с точностью до линейного преобразования



Например, в центре окружности могут стать эллипсами.

2) Вырожденный узел $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+\varepsilon \end{pmatrix}}_{\text{узел}}$, $\overset{A_\varepsilon}{=}$, $|\varepsilon| \ll 1$

выpожд. узел

При $\varepsilon \to 0$ $A_\varepsilon \to A \Rightarrow$ узел $\to$ вырожденный узел

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = (1+\varepsilon)x_2 \end{cases}$$

Собственный вектор $(1,0)$ соответствует 1

$(1, \varepsilon)$ – соответствует $1+\varepsilon$