29.09.2010 Лекция 5

1) Квазиоднородные формы степени d с весами $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha^2+\beta^2\neq 0$

Пусть $g(x,y)=(\lambda^\alpha x,\lambda^\beta y)$, $\lambda>0$

Определение

ω – квазиоднородная форма степени d с весами α и β, если $g^*\omega=\lambda^d\omega$ $\forall\lambda>0$

2) Пусть $\omega=M\,dx+N\,dy$, $M,N\in\mathbb{R}[x,y]$.

Тогда $\omega=\sum\limits_{k,l} a_{kl}x^{k-1}y^l\,dx+b_{kl}x^ky^{l-1}\,dy$

Определение

Диаграммой Ньютона формы ω называется множество $\{(k,l)\in\mathbb{Z}^2 \mid a_{kl}^2+b_{kl}^2\neq 0\}$

Теорема

Если диаграмма Ньютона формы ω лежит на прямой $\alpha k+\beta l=d$, то ω – квазиоднородная форма степени d.

Доказательство

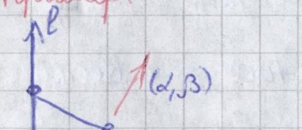
Пусть g – квазиоднородное растяжение ($g(x,y)=(\lambda^\alpha x,\lambda^\beta y)$)

Тогда $g^*(x^{k-1}y^l\,dx)=\lambda^{k\alpha+l\beta}(x^{k-1}y^l\,dx)$

$g^*(x^ky^{l-1}\,dy)=\sim(x^ky^{l-1}\,dy)$,

т.е. $g^*\omega=\lambda^d\omega$

Пример:



$x^3dx+xy\,dx+y\,dy$

$k=4\ l=0\quad k=2\ l=1\quad k=0\ l=2\qquad \alpha=1\ \beta=2\ d=4$

3) Решение уравнений с симметрией

а) $\dot x=v(x)$ (автономное)

Утверждение

$\dot x=v(t,x)$ автономное $\Leftrightarrow$ оно инвариантно относительно сдвигов $(t,x)\mapsto(t+s,x)$

Действительно, $dx=v(t,x)\,dt\mapsto dx=v(t+s,x)\,dt$

$\Updownarrow$

$v(t,x)=v(t+s,x)$

б) Если $y' = v(x,y)$ - квазиоднородное с весами $\alpha = 1, \beta = 0$, то $\frac{dy}{dx} = v(x,y)$; $g(x,y) = (\lambda x, y) \longmapsto \frac{1}{\lambda}\frac{dy}{dx} = v(\lambda x, y) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \lambda v(\lambda x, y) \Leftrightarrow v(\lambda x, y) = \frac{1}{\lambda} v(x,y)$, т.е. $\deg v = \beta - \alpha = -1$.

$v(x,y) = \frac{1}{x} v(1,y) \ \forall x > 0$.

Замечание 1)

$M dx + N dy = 0$ степени d с весами α, β $\Rightarrow \begin{cases} M \text{ степени } d-\alpha \\ N \text{ степени } d-\beta. \end{cases}$

тогда $\frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N}$, $\deg\left(-\frac{M}{N}\right) = (d-\alpha) - (d-\beta) = \beta - \alpha$.

Замечание 2

Если сделать замену $\ln x = s$, то растяжение превращается в сдвиг $(x \mapsto \lambda x \Rightarrow s \mapsto s + \ln\lambda)$

тогда $y' = \frac{1}{x} v(1,y)$ $dy = \frac{dx}{x} v(1,y) = ds \cdot v(1,y)$ - автономное уравнение.

в) $\frac{dy}{dx} = v\left(\frac{y}{x}\right)$ - однородное уравнение (с весами $\alpha = 1, \beta = 1$) - сводится заменой $k = \frac{y}{x}$ к квазиоднородному уравнению с весами $\deg x = 1$, $\deg k = 0$.

г) $\frac{dy}{dx} = v(x,y)$ - квазиоднородное уравнение с весами α, β, $\deg v = \beta - \alpha$

$y = k x^{\beta/\alpha}$ $\left(k = \frac{y}{x^{\beta/\alpha}}\right)$ приводит к тому, что в координатах (x,k) уравнение - с весами $\deg x = \alpha$, $\deg k = 0$.

Задача

В какой системе координат квазиоднородное растяжение с весами α, β становится сдвигом вдоль одной из осей?

4) Теоремы существования и единственности

Теорема 1 (Существования)

Если $\dot{\bar{x}} = \bar{v}(t, \bar{x})$ - система дифференциальных уравнений $\bar{v}(t,\bar{x}) = (v_1(t,\bar{x}), \ldots, v_n(t,\bar{x}))$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $v_1, \ldots, v_n \in C(U)$, то задача Коши для уравнения $\dot{\bar{x}} = \bar{v}(t,\bar{x})$ имеет решение

Будет доказана в конце семестра.

Теорема 2 (Единственности)

Пусть $\dot{\bar{x}} = \bar{v}(t,\bar{x})$. Если $\bar{v}$ удовлетворяет условию Липшица, то для уравнения выполнена глобальная теорема единственности.

Доказана

Теорема 3 (Единственности)

Если $\dot{\bar{x}} = \bar{v}(t,\bar{x})$ - уравнение, $\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \in C(U)$ $\forall i,j = 1, \ldots, n$, то в каждой точке U выполнена локальная теорема единственности, а значит, выполнена глобальная теорема единственности.

Доказана по модулю.

Леммы из математического анализа

Если $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ ограничены в $\underset{t,\bar{x}}{(n+1)}$-мерном кубе, то вектор-функция $\bar{v}$ удовлетворяет условию Липшица по $\bar{x}$ $\|\bar{v}(t,\bar{x}) - \bar{v}(t,\bar{y})\| \leq M\|\bar{x} - \bar{y}\|$ $\forall (t,\bar{x}), (t,\bar{y})$ из куба.

Задача:

Доказать лемму.

5) Продолжение решений систем дифференциальных уравнений

Определение

Пусть $\bar{\varphi}: I \to \mathbb{R}^n$, $\bar{\psi}: J \to \mathbb{R}^n$ - решения СДУ.
$\bar{\varphi}$ является продолжением решения $\bar{\psi}$, если $I \supset J$ и $\bar{\varphi}\big|_J = \bar{\psi}$

Определение

Решение $\bar{\varphi}$ называется непродолжаемым, если у него нет продолжений, отличных от него самого (т.е. если $\bar{\Theta}$ - продолжение $\bar{\varphi}$, то $\bar{\Theta} = \bar{\varphi}$)

Теорема единственности в целом

Пусть $\dot{\bar{x}} = \bar{v}(t, \bar{x})$ – СДУ, $\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \in C(U)$.
Тогда задача Коши для $\dot{\bar{x}} = \bar{v}(t, \bar{x})$ в U имеет не более одного непродолжаемого решения.

Доказательство:

Пусть $\bar{\varphi}: I \to \mathbb{R}^n$, $\bar{\psi}: I \to \mathbb{R}^n$ – непродолжаемые решения, $t_0 \in I \cap J$, $\bar{\varphi}(t_0) = \bar{\psi}(t_0)$.
Тогда по теореме единственности $\bar{\varphi}|_{I \cap J} = \bar{\psi}|_{I \cap J}$.
Рассмотрим $\bar{\Phi}(t) = \begin{cases} \bar{\varphi}(t), t \in I \\ \bar{\psi}(t), t \in J \end{cases}$
$\bar{\Phi}$ определена корректно в силу $\bar{\varphi}|_{I \cap J} = \bar{\psi}|_{I \cap J}$
$\bar{\Phi}$ – решение (т.к. $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$ решения).
Тогда $\bar{\Phi}$ продолжение и $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$ $\Rightarrow$ $\bar{\Phi} = \bar{\varphi} = \bar{\psi}$.

Теорема существования ~~и един~~ в целом

Если $\dot{\bar{x}} = \bar{v}(t, \bar{x})$ – СДУ, $v_i, \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \in C(U)$, то для задачи Коши существует непродолжаемое решение.

Доказательство:

Пусть $S = \{\bar{\varphi}: I_{\bar{\varphi}} \to \mathbb{R}^n \mid \bar{\varphi}$ – решение, $\bar{\varphi}(t_0) = \bar{x}_0, t_0 \in I_{\bar{\varphi}}\}$
Пусть $J = \bigcup_{\varphi \in S} I_{\bar{\varphi}}$. $J \neq \varnothing$ по теореме существования
Положим $\forall t \in J$ $\bar{\psi}(t) = \bar{\varphi}(t)$, если $t \in I_{\bar{\varphi}}$.
По теореме единственности определение корректно (если $t \in I_{\bar{\varphi}} \cap I_{\bar{\psi}}$, то $\bar{\varphi}(t) = \bar{\psi}(t)$),
$\bar{\psi}$ – решение т.к. все $\bar{\varphi}$ – решения.
Тогда $\bar{\psi}$ – решение, являющееся продолжением любого решения $\Rightarrow$ $\bar{\psi}$ непродолжаемое

// отсюда следует и единственность непродолжаемого решения.

Пример: $\dot{x} = x^2$, $x = \frac{1}{c-t}$ – общее решение $\frac{1}{1-t}$ – 2 непродолжаемых решения –
каждое единственно.

// если нет прав о единственности, то про непродолжаемые решения непонятно ничего.