24.11.2010 Лекция № 13

Автономные системы и уравнения

~~Оп~~ Автономные системы – $\dot{\bar{x}} = \bar{v}(\bar{x})$.

Теорема

Система $\dot{\bar{x}} = \bar{v}(t,\bar{x})$ является автономной тогда и только тогда, когда она инвариантна относительно всех сдвигов независимой переменной: $t \longmapsto t+s,\ s\in\mathbb{R}$

Доказательство:

$\Rightarrow$ очевидно

$\Leftarrow$ Если $\dot{\bar{x}} = \bar{v}(t,\bar{x})$ инвариантна относительно $t\mapsto t+s$, то $\dot{\bar{x}} \mapsto \dot{\bar{x}}$, т.е. $\bar{v}(t+s,\bar{x}) = \bar{v}(t,\bar{x}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{v}(t,\bar{x}) = \bar{v}(\bar{x})$

Теорема

Автономное уравнение – $x^{(n)} = f(x,\dot{x},\ldots,x^{(n-1)})$

Уравнение $x^{(n)} = f(t,x,\dot{x},\ldots,x^{(n-1)})$ автономное тогда и только тогда, когда оно инвариантно относительно сдвигов t.

Линейные системы и уравнения

Утверждение

а) Система $\dot{\bar{x}} = A(t)\bar{x}$ автономная тогда и только тогда, когда её коэффициенты $A(t) \equiv const$.

б) Уравнение $x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(t)\dot{x} + a_n(t)x = 0$ является автономным тогда и только тогда, когда его коэффициенты не зависят от t, $a_i(t) \equiv const$.

Уравнение Эйлера

$$x^n\frac{d^n}{dx^n}y + c_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}y + \ldots + c_{n-1}x\frac{d}{dx}y + c_ny = 0$$ – уравнение Эйлера, $x>0$

Теорема

При замене $x = e^t$ уравнение Эйлера становится ЛОУ с постоянными коэффициентами

Доказательство:

1) Уравнение Эйлера инвариантно относительно растяжений $x\mapsto \alpha x$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Следовательно, после замены $x=e^t$ ~~оно~~ станет инвариантно относительно сдвигов $t\mapsto \ln\alpha + t$, $\alpha>0$, $s\in\mathbb{R}$.

значит, уравнение Эйлера станет ЛОУ с постоянными коэффициентами (после замены ЛОУ $\mapsto$ ЛОУ) (Если старший коэффициент a_0 не равен 1, на него можно разделить, и получится ЛОУ)

2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dt}{dx}\cdot\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{e^t} = e^{-t}\dfrac{dy}{dt}$

$c_k x^k \dfrac{d^k y}{dx^k} \mapsto c_k e^{kt}\cdot\Big(\underbrace{e^{-t}\dfrac{d}{dt}\Big)^k}_{\frac{d^k}{dx^k}} y$

$k=2 \quad c_2 e^{2t}\cdot\left(e^{-t}\dfrac{d}{dt}\right)^2 y = c_2 e^{2t}\left(e^{-t}\dfrac{d}{dt}\right)\left(e^{-t}\dfrac{dy}{dt}\right) =$

$= c_2 e^{2t}\left(e^{-t}(-e^{-t})\dfrac{dy}{dt} + e^{-t}e^{-t}\dfrac{d^2y}{dt^2}\right) = -c_2\dfrac{dy}{dt} + c_2\dfrac{d^2y}{dt^2}$

$\ldots e^{kt}\cdot e^{-kt}$ везде сокращаются.

Замечание

a_0 останется равным 1

Характеристический многочлен полученного ЛОУ с постоянными коэффициентами.

Подставляем в уравнение $y=e^{\lambda t}$, получаем условие на λ: $\chi(\lambda)=0$

$y=x^\lambda$ – подставляем, получаем условие на λ.

Определитель Вронского. (системы функций)

Определение

Пусть даны $\varphi_1,\ldots,\varphi_n : I\to\mathbb{R}$, $\varphi_k\in\mathcal{D}^{n-1}(I)$, $k=1,\ldots,n$.
Тогда их определителем Вронского называется

$$W_{\varphi_1,\ldots,\varphi_n}(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \ldots & \varphi_n(t) \\ \dot\varphi_1(t) & \ldots & \dot\varphi_n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

Теорема 3

Пусть $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ – решения линейного уравнения порядка n с переменными коэффициентами
$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(t)\dot x + a_n(t)x = 0$ $\quad a_k\in C(I)$, $k=1,\ldots,n$
Тогда следующие ~~условия~~ утверждения эквивалентны:
1) $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ линейно зависимы
2) $W_{\varphi_1,\ldots,\varphi_n}\equiv 0$
3) $\exists t_0\in I: W_{\varphi_1,\ldots,\varphi_n}(t_0)=0$.

Доказательство

Следует из аналогичной теоремы для систем.

Переходим к системе специального вида $\dot{\bar x} = A(t)\bar x$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \ldots & & -a_1 \end{pmatrix}$

$\bar\varphi_k = \begin{pmatrix} \varphi_k \\ \dot\varphi_k \\ \vdots \\ \varphi_k^{(n-1)} \end{pmatrix}$ – решения системы, $W_{\bar\varphi_1,\ldots,\bar\varphi_n} = W_{\varphi_1\ldots\varphi_n}$

1) ⇒ 2) ⇒ 3) очевидно 3) ⇒ 1) линейно зависимы столбцы начальных условий от t_0, их ненулевая линейная комбинация – тоже решение, по теореме единственности тождественно 0

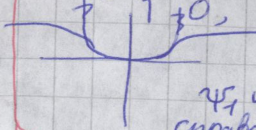
Замечание

Если $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ – не решения, а произвольные функции, то
3) $\not\Rightarrow$ 2), $\varphi_1=t$, $W_{\varphi_1}=t$, т.к. $\boxed{\text{разрешенное}}$ относительно производной
$I=\mathbb{R}$, $W_{\varphi_1}(0)=0$, но $W_{\varphi_1}\not\equiv 0$! линейное уравнение написать нельзя (не разрешенное – $t\dot x = x$ есть)

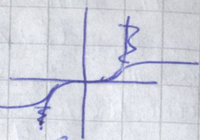
Замечание

а) Для произвольных функций 2) $\not\Rightarrow$ 1)

$$\psi_1 = \begin{cases} e^{-1/|t|}, & t \neq 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases} \qquad \psi_2 = \begin{cases} e^{-1/|t|}, & t > 0 \\ -e^{-1/|t|}, & t < 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$



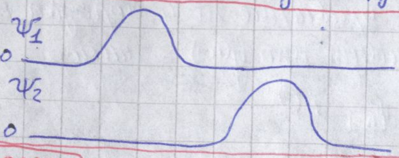
$\psi_1, \psi_2 \in C^\infty(\mathbb{R})$



ψ_1 и ψ_2 линейно независимы, т.к. слева их сумма 0, справа разность 0, а при $t>0$, $t<0$, $t=0$ $W_{\psi_1,\psi_2} = 0$

б) Для "конечно"-гладких функций $\psi_1 = t^2$, $\psi_2 = t|t|$, $\in C^1(\mathbb{R})$

в)



линейно независимы, но на любом маленьком интервале линейно зависимы.

Задача

Доказать, что если $\psi_1, \dots, \psi_n$ аналитические, то 2) $\Rightarrow$ 1)

Определение

Функция f называется **аналитической**, если она равна сумме своего ряда Тейлора в некоторой окрестности произвольной точки.

Теорема 4 (формула Лиувилля-Остроградского)

Если $\psi_1, \dots, \psi_n$ — решения ЛОУ $x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = 0$, то

1) $\dot{W}(t) = -a_1(t)W(t)$, $W = W_{\psi_1, \dots, \psi_n}$

2) $W(t) = W(t_0)\exp\left(-\int\limits_{t_0}^{t} a_1(\tau)d\tau\right)$

Доказательство

1) $\Rightarrow$ 2): решаем уравнение 1) и получаем 2)

Докажем 1)

Способ а). Переходим к системе специального вида и применяем формулу Лиувилля-Остроградского для систем.

Т.к. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix}$, $\operatorname{tr} A = -a_1$

Способ б).

$$W = \begin{vmatrix} \psi_1 & \dots & \psi_n \\ \dot{\psi}_1 & \dots & \dot{\psi}_n \\ \ddot{\psi}_1 & \dots & \ddot{\psi}_n \\ & & \\ \psi_1^{(n-1)} & \dots & \psi_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

W — полилинейная функция от вектор строк $\Rightarrow$ можно применить правило Лейбница

$$\dot{W} = \begin{vmatrix} \psi_1 & \dots & \psi_n \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_1^{(n-2)} & \dots & \psi_n^{(n-2)} \\ \psi_1^{(n)} & \dots & \psi_n^{(n)} \end{vmatrix} = -a_1 W$$

$\psi_i^{(n)} = -a_1\psi_i^{(n-1)} - a_2\psi_i^{(n-2)} - \dots - a_n\psi_i$

Теорема 5

Пусть $\psi_1, \dots, \psi_n : I \to \mathbb{R}$, $\psi_k \in C^{n-1}(I)$,
$W_{\psi_1, \dots, \psi_{n-1}}(t) \neq 0 \ \forall t \in I$, $W_{\psi_1, \dots, \psi_n}(t) = 0 \ \forall t \in I$
тогда $\psi_1, \dots, \psi_n$ линейно зависимы на I.

Доказательство.

Рассмотрим ЛОУ $W_{\psi_1, \dots, \psi_{n-1}, y} = 0$.

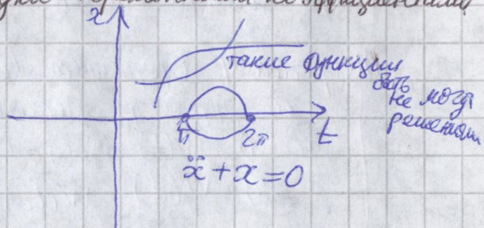
$$\begin{vmatrix} \psi_1 & \dots & \psi_{n-1} & y \\ \dot\psi_1 & \dots & \dot\psi_{n-1} & \dot y \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_1^{(n-1)} & \dots & \psi_{n-1}^{(n-1)} & y^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0$$

— линейное уравнение по y порядка $n-1$.
Коэффициент при $y^{(n-1)}$ — минор $W_{\psi_1 \dots \psi_{n-1}} \neq 0$.

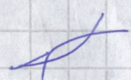
Разделив на $W_{\psi_1 \dots \psi_{n-1}}$, получим уравнение
$y^{(n-1)} + a_1(t) y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(t) y = 0$.
$\psi_1, \dots, \psi_{n-1}$ — решения этого уравнения (в определителе одинаковые столбцы), ψ_n — решение по условию $\Rightarrow$ $\psi_1, \dots, \psi_n$ линейно зависимы, т.к. они решения линейного однородного уравнения порядка $n-1$.

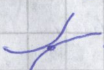
Линейные уравнения II порядка с переменными коэффициентами

$\ddot x + a(t)\dot x + b(t)x = 0.$ $(a, b \in C(I))$



Т.к. уравнение линейно, можно умножать на числа.

Такой картинки  быть не может, т.к. умножим что-нибудь для касания

 А такая картинка невозможна

Раскачивание качелей: $\ddot x + \omega^2(t) x = 0$