Лекция 3. 15.09.2010 Системы ОДУ

Определение 1

Нормальной системой обыкновенных дифференциальных уравнений I порядка (системой ОДУ в нормальной форме, обыкновенным дифференциальным уравнением в векторной нормальной форме) называется выражение вида $\dot{\overline{x}} = \overline{v}(t, \overline{x})$, где $\overline{v}: U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^{1+n}$, t - независимая переменная, $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$ - фазовое пространство, $\mathbb{R}^{1+n}$ - расширенное фазовое пространство.

Определение 2

Решением СОДУ называется дифференцируемая функция $\overline{\varphi}: I \to \mathbb{R}^n$, $I = (a, b)$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ и $\forall t \in I$ $(t, \overline{\varphi}(t)) \in U$, $\dot{\overline{\varphi}}(t) = \overline{v}(t, \overline{\varphi}(t))$.

Замечания:

1) $$\dot{\overline{x}} = \overline{v}(t, \overline{x}) \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = v_1(t, x_1, \ldots, x_n) \\ \dot{x}_2 = v_2(t, x_1, \ldots, x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n = v_n(t, x_1, \ldots, x_n) \end{cases}, \text{ где } \overline{v} = (v_1, \ldots, v_n)$$

2) при $n > 1$ поле направлений задаётся направляющими векторами $(1, v_1, \ldots, v_n)$ (через точку $(t, \overline{x})$),

или $$\frac{dt}{1} = \frac{dx_1}{v_1(t, \overline{x})} = \ldots = \frac{dx_n}{v_n(t, \overline{x})}$$

Если $\frac{dt}{1}$ заменить на $\frac{dx_0}{v_0(t, \overline{x})}$, получится система ОДУ в симметричной форме.

Теорема единственности.

Определение 3

Говорят, что для системы дифференциальных уравнений $\dot{\overline{x}} = \overline{v}(t, \overline{x})$ $(\overline{v} : U \to \mathbb{R}^n)$ выполнена локальная теорема единственности в точке $(t_0, \overline{x_0}) \in U$, если любые 2 решения задачи Коши с начальным условием $\overline{\varphi}(t_0) = \overline{x_0}$ совпадают в некоторой окрестности t_0

Определение 4

Говорят, что для системы дифференциальных уравнений $\dot{\overline{x}} = \overline{v}(t, \overline{x})$, $(\overline{v} : U \to \mathbb{R}^n)$ выполнена глобальная теорема единственности, если любые 2 решения, совпадающие в какой-нибудь точке, совпадают и на пересечении их областей определения.

Теорема 1

Глобальная единственность эквивалентна локальной единственности в каждой точке

Доказательство:

$\Rightarrow$ очевидно

$\Leftarrow$ Пусть $\overline{\varphi} : I \to \mathbb{R}^n$, $\overline{\psi} : J \to \mathbb{R}^n$ – решения, $\overline{\varphi}(t_0) = \overline{\psi}(t_0)$.

Положим $K = \{ t \in I \cap J \mid \overline{\varphi}(t) = \overline{\psi}(t) \}$

1) $K \neq \varnothing$, т.к. $t_0 \in K$.
2) Т.к. $\overline{\varphi}$ и $\overline{\psi}$ непрерывны, то K замкнуто в $I \cap J$.
3) K – открытое подмножество $I \cap J$ в силу локальности.

Т.к. $I \cap J$ связно, то $K = I \cap J$.

Лемма (о дифференциальном неравенстве)

Пусть $\bar{r}: I \to \mathbb{R}^n$, $\bar{r} \in \mathcal{D}(I)$, $I = (a, b)$, $\|\dot{\bar{r}}(t)\| \leq M \|\bar{r}(t)\|$ $\forall t \in I$. Тогда справедлива оценка $\|\bar{r}(t_*)\| \leq e^{M|t_* - t_0|} \cdot \|\bar{r}(t_0)\|$ $\forall t_*, t_0 \in I$.
($M = const > 0$, $\|\cdot\|$ - евклидова норма в $\mathbb{R}^n$)

Доказательство:

0) Если $t_* = t_0$, то очевидно

1) Можно считать, что $t_* > t_0$ (иначе рассмотрим $r(-t)$).

2) Рассмотрим $t_1 = \max(\{t \in [t_0, t_*] \mid \bar{r}(t) = 0\} \cup \{t_0\})$
Такой max существует, т.к. $\bar{r} \in C(I)$.

3) Если $t_1 = t_*$, то очевидно

4) Если $t_2 \in I$ и $\bar{r}(t_2) \neq 0$, то $\|\bar{r}(t)\|^{\cdot} \leq \|\dot{\bar{r}}(t)\|$
Действительно, $\|\bar{r}(t)\| = \sqrt{(\bar{r}(t), \bar{r}(t))}$,
$$\|\bar{r}\|^{\cdot} = \frac{(\dot{\bar{r}}, \bar{r}) + (\bar{r}, \dot{\bar{r}})}{2\sqrt{(\bar{r}, \bar{r})}} = \frac{(\dot{\bar{r}}, \bar{r})}{\sqrt{(\bar{r}, \bar{r})}} \underset{\text{Коши-Буняк.}}{\leq} \frac{\|\dot{\bar{r}}\| \cdot \|\bar{r}\|}{\|\bar{r}\|} = \|\dot{\bar{r}}\|$$

5) Из 4) и условия следует, что $\forall t \in (t_1, t_*]$ $\|\bar{r}(t)\|^{\cdot} \leq M \|\bar{r}(t)\|$

6) Тогда $\|\bar{r}(t_*)\| \leq e^{M(t_* - t_1)} \|\bar{r}(t_1)\|$
Действительно, если $R(t) = e^{-Mt} \|\bar{r}(t)\|$, ($t \in (t_1, t_*]$) то
$$\dot{R}(t) = -Me^{-Mt} \|\bar{r}(t)\| + e^{-Mt} \|\bar{r}(t)\|^{\cdot} =$$
$$= e^{-Mt}(-\|\bar{r}(t)\| \cdot M + \|\bar{r}(t)\|^{\cdot}) \leq 0$$

7) $R \in C([t_1, t_*])$, $\dot{R}(t) \leq 0$ $\forall t \in (t_1, t_*]$ $\overset{\text{по 5)}}{\Longrightarrow}$ $R(t_*) \leq R(t_1)$

8) Из 7) следует, что $e^{-Mt_*} \|\bar{r}(t_*)\| \leq e^{-Mt_1} \|\bar{r}(t_1)\|$,
т.е. $\|\bar{r}(t_*)\| \leq e^{M(t_* - t_1)} \|\bar{r}(t_1)\|$

Если $t_1 = t_0$, то лемма доказана,
если $t_1 > t_0$, то, т.к. $\|\bar{r}(t_1)\| = 0$, то лемма доказана.

Теорема 2

Пусть правая часть СОДУ $\dot{\overline{x}} = \overline{v}(t, \overline{x})$, $\overline{v}: U \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяет условию Липшица, т.е. $\forall \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n$ $\|\overline{v}(t,\overline{x}) - \overline{v}(t,\overline{y})\| \leq M \|\overline{x} - \overline{y}\|$. Тогда для этой системы выполнена глобальная теорема единственности.

Доказательство:

Пусть $\overline{\varphi}: I \to \mathbb{R}^n$, $\overline{\psi}: J \to \mathbb{R}^n$ — решения, $\exists t_0 \in I \cap J: \overline{\varphi}(t_0) = \overline{\psi}(t_0)$.
$\forall t \in I \cap J$ введём $\overline{r}(t) = \overline{\varphi}(t) - \overline{\psi}(t)$.
$\|\dot{\overline{r}}(t)\| = \|\dot{\overline{\varphi}}(t) - \dot{\overline{\psi}}(t)\| = \|\overline{v}(t, \overline{\varphi}(t)) - \overline{v}(t, \overline{\psi}(t))\| \leq M\|\overline{\varphi}(t) - \overline{\psi}(t)\| = M\|\overline{r}(t)\|$.

По лемме о дифференциальном неравенстве
$\|\overline{r}(t_*)\| \leq e^{M|t_* - t_0|}\|\overline{r}(t_0)\|$ $\forall t_* \in I \cap J \Rightarrow \forall t_* \in I \cap J$ $\overline{r}(t_*) = 0$
(т.к. $\overline{r}(t_0) = 0$)

Теорема 3

Пусть $\dot{\overline{x}} = \overline{v}(t, \overline{x})$, $\overline{v}: U \to \mathbb{R}^n$, $\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \in C(U)$, $i, j = 1, \dots, n$
Тогда для СДУ выполнена глобальная теорема единственности

Доказательство:

Пусть $(t_0, \overline{x}_0) \in U$, докажем локальную теорему единственности в точке $(t_0, \overline{x}_0)$.

Рассмотрим $\underset{\subset U}{K} = (t_0, \overline{x}_0) + [-\varepsilon, \varepsilon]^{1+n}$ (куб с центром $(t_0, \overline{x}_0)$ и ребром 2ε)

Т.к. $\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \in C(U)$, $K \subset U$ — компакт, то $\exists A = \max\limits_{\substack{(t,\overline{x}) \in K \\ i,j = 1,\dots,n}} \left|\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right|(t, \overline{x})$

$\forall (t, \overline{x}), (t, \overline{y}) \in K$ верно $\|\overline{v}(t, \overline{x}) - \overline{v}(t, \overline{y})\| \leq n^2 A \|\overline{x} - \overline{y}\|$
(будет, возможно, доказано позже)

Тогда по теореме 2 внутри K решения $\overline{\varphi}$ и $\overline{\psi}$ задачи Коши с начальным условием $(t_0, \overline{x}_0)$ (если существуют) совпадают.

$\forall (t_0, \overline{x}_0) \in U$
Теорема о локальной единственности в точке $(t_0, \overline{x}_0)$ доказана.
Тогда по теореме 1 выполнена глобальная теорема.