Вариант 1

Задачи

1. (**4**) Найдите решение задачи Коши

$$\ddot{x} = e^{-x} - e^{-2x}, \quad x(0) = \ln 2, \quad \dot{x}(0) = 1/2.$$

2. (**2**) Найдите все особые точки системы

$$\begin{cases} \dot{x} &= y - x^2 \\ \dot{y} &= 3\ln 2 - 3\ln(x^2+1) \end{cases},$$

определите их типы и исследуйте на устойчивость. При исследовании на устойчивость для каждой особой точки нужно указать, является ли она: а) асимптотически устойчивой; б) устойчивой, но не асимптотически; в) неустойчивой.

(**2**) Нарисуйте фазовый портрет системы.

3. (**4**) Найдите производную по параметру ε при $\varepsilon = 0$ решения уравнения

$$x^2y'' - xy' + y = \varepsilon y^2$$

с начальными условиями $y(1) = \cos\varepsilon$, $y'(1) = 1$.

Вопросы

4. (**2**) Нарисуйте эскиз интегральных кривых логистического уравнения с линейным коэффициентом размножения $k(x) = 4 - x$.

5. (**3**) Являются ли независимыми функции

$$x + y + z, \quad xy + xz + yz, \quad x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

в окрестности точки $x = 0$, $y = 1$, $z = -1$?

6. (**3**) Устойчивы ли по Ляпунову решения уравнения $\dot{x} = (\sin t + \sin 2t)x + \sin\sqrt{3}t$? Устойчивы ли они асимптотически?

7. (**4**) Для каждого натурального n найдите число решений задачи Коши

$$2y\frac{\partial u}{\partial x} - 3x\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u\,|_{y=0} = x^n,$$

определённых в какой-нибудь окрестности точки $x = y = 0$.

Вариант 2

Задачи

8. (**2**) Нарисуйте (не находя общего решения) интегральные кривые уравнения

$$\dot{x} = \sqrt[3]{x^5(x^4-1)}.$$

(**2**) Найдите все точки локальной единственности.

9. (**2**) Исследуйте на устойчивость систему

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + y - 2z + \sin^2 t \\ \dot{y} = x + ay - 2z + \sin^4 t \\ \dot{z} = x + y + (a-3)z + \sin^6 t \end{cases}$$

при различных значениях параметра $a \in \mathbb{R}$. При исследовании на устойчивость нужно для каждого значения параметра указать, является ли система: а) асимптотически устойчивой; б) устойчивой, но не асимптотически; в) неустойчивой.

(**2**) При каких a система имеет единственное периодическое решение с периодом π?

10. (**4**) Найдите производные $\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}$ и $\frac{\partial y}{\partial \varepsilon}$ по параметру ε при $\varepsilon = 0$ решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} = \cos x \operatorname{tg} y - \ln(1+xy) \\ \dot{y} = \sin x + e^t \operatorname{arctg} \varepsilon \end{cases}$$

с начальными условиями $x(0) = \varepsilon$, $y(0) = e^{\varepsilon} - 1$.

Вопросы

11. (**2**) Фазовые кривые каких типов имеет система $\dot{x} = -2y$, $\dot{y} = 3x$?

12. (**3**) Можно ли выпрямить векторное поле $\dot{x} = 2x + 1$ в окрестности точки $x = 0$? Если да, укажите выпрямляющую замену координаты.

13. (**3**) В проколотой окрестности особой точки непрерывно дифференцируемое векторное поле на плоскости имеет положительную дивергенцию. Может ли особая точка быть центром?

14. (**4**) Векторное поле на плоскости обращается в нуль в начале координат, а каждая из двух его компонент — многочлен с неотрицательными коэффициентами, среди которых есть хотя бы один положительный. Докажите, что начало координат неустойчиво.

Вариант 3

Задачи

15. (**4**) Найдите общее решение уравнения с частными производными:

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + (3y - 2x)\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

при $x > 0$.

16. (**2**) На фазовой плоскости уравнения

$$\ddot{x} = \pi \sin x - 2x$$

найдите все особые точки, определите их типы и исследуйте на устойчивость. При исследовании на устойчивость для каждой особой точки нужно указать, является ли она: а) асимптотически устойчивой; б) устойчивой, но не асимптотически; в) неустойчивой.

(**2**) Нарисуйте фазовый портрет уравнения.

17. (**4**) Найдите $\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}|_{\varepsilon=0}$, если $\begin{cases} \dot{x} = xy + \varepsilon y^3 \\ \dot{y} = y/t + \varepsilon^2 \end{cases}$ и $\begin{cases} x(1) = 1 - \varepsilon \\ y(1) = \cos\varepsilon \end{cases}$.

Вопросы

18. (**2**) Найдите изоклину дифференциального уравнения $y' = (y + x^2)/(1 + x^2)$, проходящую через точку $(1, 3)$.

19. (**3**) Укажите область определения непродолжаемого решения уравнения $\dot{x} = x^2 + 1$ с начальным условием $t_0 = 0$, $x_0 = 0$.

20. (**3**) Укажите функцию Ляпунова для нулевого положения равновесия системы:

$$\begin{cases} \dot{x} &= -3x + 10x^3 \\ \dot{y} &= -5y + 4xy^5 \end{cases}.$$

21. (**4**) Правые части автономной системы на плоскости бесконечно дифференцируемы и ограничены. Верно ли, что любое решение такой системы продолжается вперёд неограниченно?