

УДК 517.925

АСИМПТОТИКИ И РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ
ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

А. Д. Брюно

Рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение весьма общего вида. Показывается, как с помощью алгоритмов степенной геометрии вблизи любого конечного или бесконечного значения независимой переменной находить: (а) все степенные асимптотики решений такого уравнения; (b) все степенно-логарифмические разложения решений, имеющих степенную асимптотику; (с) все нестепенные (экспоненциальные и логарифмические) асимптотики решений такого уравнения; (d) некоторые экспоненциально малые добавки к степенно-логарифмическому разложению решения, соответствующие экспоненциально близким решениям. Кроме теории и алгоритмов приводятся примеры вычислений указанных объектов для одного и того же уравнения. Основной упор делается на объяснение алгоритмов таких вычислений.

Библиография: 42 названия.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	32
§ 1. Степенные асимптотики решений	33
§ 2. Примеры вычисления степенных асимптотик	39
§ 3. Степенно-логарифмические разложения решений	43
§ 4. Примеры вычисления разложений	49
§ 5. Нестепенные асимптотики решений	56
§ 6. Примеры вычисления нестепенных асимптотик	62
§ 7. Асимптотически близкие решения	70
§ 8. Пример вычисления экспоненциальных добавок	75
Заключение	78
Список литературы	78

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-01067).

Введение

В классическом анализе для решений регулярных (квазилинейных и аналитических) уравнений были получены локальные разложения по целым степеням независимой переменной (теоремы Коши о неявной функции и о решениях обыкновенных дифференциальных уравнений). В более сложных случаях получались локальные разложения решений по дробным степеням независимой переменной (ряды Пюизё). Теперь на основе степенной геометрии разработаны общие алгоритмы, позволяющие вычислять асимптотики решений, а также локальные асимптотические разложения решений существенно нелинейных или сингулярных уравнений. Оказалось, что для широкого круга дифференциальных уравнений эти разложения являются степенно-логарифмическими, т.е. по комплексным степеням независимой переменной с коэффициентами, являющимися многочленами от логарифмов этой переменной. И если для алгебраических кривых типичным является разложение по дробным степеням, то для решений обыкновенных дифференциальных уравнений типичным является указанное степенно-логарифмическое разложение. Однако встречаются решения более сложной структуры, у которых указанное степенно-логарифмическое разложение имеется только для кратного логарифма решения.

В настоящей статье рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

весьма общего вида, где x – независимая, а y – зависимая переменные. Показывается, как с помощью алгоритмов степенной геометрии при $x \rightarrow 0$ или ∞ находить:

- a) все степенные асимптотики решений $y(x)$ такого уравнения (§§ 1, 2);
- b) все степенно-логарифмические разложения решений, имеющих степенную асимптотику (§§ 3, 4);
- c) все нестепенные (экспоненциальные и логарифмические) асимптотики решений такого уравнения (§§ 5, 6);
- d) некоторые экспоненциально малые добавки к степенно-логарифмическому разложению решения, соответствующие экспоненциально близким решениям (§§ 7, 8).

При этом в §§ 1, 3, 5, 7 излагаются соответствующая теория и алгоритмы, а в §§ 2, 4, 6, 8 даны примеры вычислений указанных объектов для одного и того же уравнения. Основной упор делается на объяснение алгоритмов вычисления. Поэтому не для всех утверждений даны полные доказательства. Поскольку тут только две малые или большие координаты, то используется только двумерная степенная геометрия, иллюстрированная 15 рисунками, что, как надеется автор, делает изложение геометрически наглядным и более понятным. Похожее изложение (для других задач) см. в главах I и II книги [1].

Заметим, что далеко не все задачи, имеющиеся для обыкновенного дифференциального уравнения, решаются методами, излагаемыми в настоящей статье. Таковой является, например, проблема различения центра и фокуса [1; гл. II, § 4]. В ней излагаемые здесь методы позволяют найти только комплексные сепаратрисы, которых не достаточно для решения этой проблемы.

§ 1. Степенные асимптотики решений

1.1. Постановка задачи. Сначала напомним некоторые понятия степенной геометрии [1], [2]. Пусть x – независимая и y – зависимая переменные, $x, y \in \mathbb{C}$. Положим $X = (x, y)$. Дифференциальным мономом $a(x, y)$ называется произведение обычного монома

$$cx^{r_1}y^{r_2} \stackrel{\text{def}}{=} cX^R, \tag{1.1}$$

где $c = \text{const} \in \mathbb{C}$, $R = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2$, и конечного числа производных вида

$$d^l y / dx^l, \quad l \in \mathbb{N}. \tag{1.2}$$

Сумма дифференциальных мономов

$$f(X) = \sum a_i(X) \tag{1.3}$$

называется *дифференциальной суммой*.

Пусть задано обыкновенное дифференциальное уравнение

$$f(X) = 0, \tag{1.4}$$

где $f(X)$ – дифференциальная сумма, в которую y входит в целых степенях. Положим

$$\omega = \begin{cases} -1, & \text{если } x \rightarrow 0, \\ 1, & \text{если } x \rightarrow \infty. \end{cases} \tag{1.5}$$

Пусть $x \rightarrow 0$ или ∞ и решение уравнения (1.4) имеет вид

$$y = c_r x^r + o(|x|^{r+\varepsilon}), \tag{1.6}$$

где коэффициент $c_r = \text{const} \in \mathbb{C}$, $c_r \neq 0$, показатели степени $r, \varepsilon \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon\omega < 0$. Тогда выражение

$$y = c_r x^r, \quad c_r \neq 0 \tag{1.7}$$

является *степенной асимптотикой* решения (1.6).

Задача 1. Для заданного уравнения (1.4) найти все степенные асимптотики (1.7) его решений вида (1.6).

Для решения задачи 1 степенная геометрия дает теорию и алгоритмы, основанные на выделении укороченных уравнений.

1.2. Выделение укороченных уравнений. Каждому дифференциальному моному $a(X)$ ставится в соответствие его (векторный) *показатель степени* $Q(a) = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$ по следующим правилам. Для монома вида (1.1)

$$Q(cX^R) = R,$$

т.е. $Q(cx^{r_1}y^{r_2}) = (r_1, r_2)$; для производной (1.2)

$$Q(d^l y/dx^l) = (-l, 1);$$

при умножении дифференциальных мономов их показатели степени складываются как векторы:

$$Q(a_1 a_2) = Q(a_1) + Q(a_2).$$

Множество $\mathbf{S}(f)$ показателей степеней $Q(a_i)$ всех дифференциальных мономов $a_i(X)$, входящих в дифференциальную сумму (1.3), называется *носителем суммы* $f(X)$. Очевидно, $\mathbf{S}(f) \in \mathbb{R}^2$. Через $f_Q(X)$ обозначим сумму тех мономов $a_i(X)$ из (1.3), у которых $Q(a_i) = Q$. Тогда дифференциальную сумму (1.3) можно записать в виде

$$f(X) = \sum f_Q(X) \text{ по } Q \in \mathbf{S}(f).$$

Замыкание выпуклой оболочки $\Gamma(f)$ носителя $\mathbf{S}(f)$ называется *многоугольником суммы* $f(X)$. Граница $\partial\Gamma(f)$ многоугольника $\Gamma(f)$ состоит из вершин $\Gamma_j^{(0)}$ и ребер $\Gamma_j^{(1)}$. Их называют (обобщенными) *гранями* $\Gamma_j^{(d)}$, где верхний индекс указывает размерность грани, а нижний – ее номер. Каждой грани $\Gamma_j^{(d)}$ соответствуют *граничное подмножество* $\mathbf{S}_j^{(d)} = \mathbf{S}(f) \cap \Gamma_j^{(d)}$ множества \mathbf{S} и *укороченная сумма*

$$\hat{f}_j^{(d)}(X) = \sum a_i(X) \text{ по } Q(a_i) \in \mathbf{S}_j^{(d)}. \quad (1.8)$$

Пусть плоскость \mathbb{R}_*^2 сопряжена плоскости \mathbb{R}^2 так, что для $P = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}_*^2$ и $Q = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$ определено скалярное произведение

$$\langle P, Q \rangle \stackrel{\text{def}}{=} p_1 q_1 + p_2 q_2.$$

Каждой грани $\Gamma_j^{(d)}$ в плоскости \mathbb{R}_*^2 соответствуют: свое *нормальное подпространство*

$$\mathbf{N}_j^{(d)} = \{P : \langle P, Q \rangle = \langle P, Q' \rangle \text{ по } Q, Q' \in \mathbf{S}_j^{(d)}\}$$

и свой *нормальный конус*

$$\mathbf{U}_j^{(d)} = \left\{ P : \begin{array}{l} \langle P, Q \rangle = \langle P, Q' \rangle, \quad Q, Q' \in \mathbf{S}_j^{(d)}, \\ \langle P, Q \rangle > \langle P, Q'' \rangle, \quad Q'' \in \mathbf{S}(f) \setminus \mathbf{S}_j^{(d)} \end{array} \right\}.$$

Пусть вектор N_j – это внешняя нормаль к ребру $\Gamma_j^{(d)}$. Для ребра $\Gamma_j^{(1)}$ нормальное подпространство $\mathbf{N}_j^{(1)}$ – это прямая, проходящая через начало координат $P = 0$ и точку $P = N_j$, а нормальный конус – это тот луч прямой $\mathbf{N}_j^{(1)}$, который направлен от ребра $\Gamma_j^{(1)}$ наружу многоугольника $\Gamma(f)$, т.е. натянут на вектор N_j . Для вершины $\Gamma_j^{(0)}$ нормальное подпространство $\mathbf{N}_j^{(0)} = \mathbb{R}_*^2$, а нормальный конус $\mathbf{U}_j^{(0)}$ – это открытый сектор (угол) на плоскости \mathbb{R}_*^2 с вершиной в нуле $P = 0$, ограниченный лучами, являющимися нормальными конусами ребер, примыкающих к вершине $\Gamma_j^{(0)}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. Если носитель $\mathbf{S}(f)$ состоит из одной вершины $\Gamma_1^{(0)}$, то нормальный конус $\mathbf{U}_1^{(0)} = \mathbb{R}_*^2$, т.е. в $\mathbf{U}_1^{(0)}$ лежат оба вектора $\pm R$. В противном случае раствор угла $\mathbf{U}_j^{(0)}$ меньше π , т.е. из двух векторов $\pm R$ в нормальный конус $\mathbf{U}_j^{(0)}$ попадает только один. Здесь вектор $R \neq 0$, $R \in \mathbb{R}_*^2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. Если многоугольник $\Gamma(f)$ состоит из одного ребра $\Gamma_1^{(1)}$, то нормальный конус $\mathbf{U}_1^{(1)}$ — это прямая, т.е. в $\mathbf{U}_1^{(1)}$ лежат оба вектора $\pm R$. В противном случае в нормальном конусе $\mathbf{U}_j^{(1)}$ лежит только один из векторов $\pm R$. Здесь вектор $R \neq 0$ является нормалью к ребру $\Gamma_j^{(1)}$.

Итак, каждой грани $\Gamma_j^{(d)}$ соответствуют: нормальное подпространство $\mathbf{N}_j^{(d)}$ и нормальный конус $\mathbf{U}_j^{(d)}$ в \mathbb{R}_*^2 и укороченное уравнение

$$\hat{f}_j^{(d)}(X) = 0. \quad (1.9)$$

Носитель степенной асимптотики (1.7) состоит из двух точек $E_2 \stackrel{\text{def}}{=} (0, 1)$ и $(r, 0)$. Их выпуклая оболочка является ребром, которое обозначим $\gamma_1^{(1)}$. Его нормальное подпространство \mathbf{n} является прямой, натянутой на вектор $(1, r)$. Нормальным конусом \mathbf{u} решения вида (1.6) назовем луч $\lambda\omega(1, r)$, где ω определено по (1.5) и $\lambda > 0$.

ТЕОРЕМА 1.1 [2; гл. VI, теорема 1.1]. Если уравнение (1.4) имеет решение (1.6) и $\mathbf{u} \in \mathbf{U}_j^{(d)}$, то укорочение (1.7) решения (1.6) является решением укороченного уравнения (1.8), (1.9).

Поэтому для нахождения всех укороченных решений (1.7) уравнения (1.4) надо вычислить: носитель $\mathbf{S}(f)$, многоугольник $\Gamma(f)$, все его грани $\Gamma_j^{(d)}$, внешние нормали N_j к ребрам $\Gamma_j^{(1)}$, нормальные конусы ребер $\mathbf{U}_j^{(1)}$ и нормальные конусы вершин $\mathbf{U}_j^{(0)}$. Затем для каждого укороченного уравнения (1.8), (1.9) надо найти все его решения (1.7), у которых вектор $(1, r)$ лежит в $\mathbf{N}_j^{(d)}$, и из них отобрать те, у которых один из векторов $\pm(1, r)$ лежит в нормальном конусе $\mathbf{U}_j^{(d)}$. Если $d = 0$, то это означает, что один из векторов $\pm(1, r)$ лежит в $\mathbf{U}_j^{(d)}$. Если $d = 1$, то это свойство всегда выполнено. При этом согласно предложениям 1.1 и 1.2 определяется также значение ω .

1.3. Решение укороченного уравнения. Здесь рассмотрим по отдельности два случая: вершины $\Gamma_j^{(0)}$ и ребра $\Gamma_j^{(1)}$.

Вершине $\Gamma_j^{(0)} = \{Q\}$ соответствует укороченное уравнение (1.9) с точечным носителем Q и с $d = 0$. Положим $g(X) \stackrel{\text{def}}{=} X^{-Q} \hat{f}_j^{(0)}(X)$, тогда решение (1.7) уравнения (1.9) удовлетворяет уравнению

$$g(X) = 0.$$

Подставляя $y = cx^r$ в $g(X)$, получаем, что $g(x, cx^r)$ не зависит от x и c и является многочленом от r , т.е.

$$g(x, cx^r) \equiv \chi(r),$$

где $\chi(r)$ – характеристический многочлен дифференциальной суммы $\hat{f}_j^{(0)}(X)$. Следовательно, для решения (1.7) уравнения (1.9) показатель r является корнем характеристического уравнения

$$\chi(r) \stackrel{\text{def}}{=} g(x, x^r) = 0, \quad (1.10)$$

а коэффициент c_r – произвольный. Из корней r_i уравнения (1.10) надо отобрать только те, для которых один из векторов $\omega(1, r)$, где $\omega = \pm 1$, лежит в нормальном конусе $\mathbf{U}_j^{(0)}$ вершины $\Gamma_j^{(0)}$. При этом согласно предложению 1.1 значение ω определяется однозначно. Соответствующие выражения (1.7) с произвольной константой c_r являются кандидатами на роль укороченных решений уравнения (1.4). При этом согласно (1.5) если $\omega = -1$, то $x \rightarrow 0$, а если $\omega = 1$, то $x \rightarrow \infty$.

Укороченное уравнение (1.9) называется *алгебраическим*, если оно не содержит производных.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1 [2]. Если укороченное уравнение (1.9) с $d = 0$ является алгебраическим, то оно не имеет решений вида (1.7). Поэтому укорочения, состоящие из одного алгебраического монома, можно не рассматривать.

Ребру $\Gamma_j^{(1)}$ соответствует укороченное уравнение (1.9) с $d = 1$, нормальный конус $\mathbf{U}_j^{(1)}$ которого является лучом $\{\lambda N_j, \lambda > 0\}$. Нормальный конус \mathbf{u} укороченного решения (1.7) пересекается с $\mathbf{U}_j^{(1)}$ только если вектор $\omega(1, r) \in \mathbf{U}_j^{(1)}$. Согласно предложению 1.2 этим однозначно определяются показатель степени r укороченного решения (1.7) и значение $\omega = \pm 1$ в (1.5). Для определения коэффициента c_r надо выражение (1.7) подставить в укороченное уравнение (1.9). После сокращения на некоторую степень x получаем алгебраическое *определяющее уравнение* для коэффициента c_r

$$\tilde{f}(c_r) \stackrel{\text{def}}{=} x^{-s} \hat{f}_j^{(1)}(x, c_r x^r) = 0. \quad (1.11)$$

Каждому его корню $c_r = c_r^{(i)} \neq 0$ соответствует свое выражение (1.7), которое является кандидатом на роль укороченного решения уравнения (1.4). При этом согласно (1.5) если в нормальном конусе $\mathbf{U}_j^{(1)}$ координата $p_1 < 0$, то $x \rightarrow 0$, а если $p_1 > 0$, то $x \rightarrow \infty$.

Итак, каждое укороченное уравнение (1.9) имеет несколько подходящих решений (1.7) с $\mathbf{u} \subset \mathbf{U}_j^{(d)}$. Объединим их в непрерывные по ω , r , c_r и параметрам уравнения (1.4) семейства, которые обозначим $\mathcal{F}_j^{(d)} k$, где $k = 1, 2, \dots$.

Если нас интересуют не все решения (1.6) уравнения (1.4), а только те, у которых нормальный конус \mathbf{u} лежит в некотором заданном конусе \mathcal{K} , то \mathcal{K} называется *конусом задачи* [2; гл. I, § 6]. Например, для укороченного уравнения (1.9) нормальный конус $\mathbf{U}_j^{(d)}$ является конусом задачи, если нет других ограничений.

1.4. Критические числа укороченного решения. Если найдено укороченное решение (1.7), то замена

$$y = c_r x^r + z \quad (1.12)$$

приводит уравнение (1.4) к виду

$$\tilde{f}(x, z) \stackrel{\text{def}}{=} f(x, c_r x^r + z) = 0, \quad (1.13)$$

где $\tilde{f}(x, z)$ – дифференциальная сумма, все точки $Q = (q_1, q_2)$ ее носителя $\mathbf{S}(\tilde{f})$ имеют целую неотрицательную координату q_2 . К уравнению (1.13) можно применить описанные выше вычисления (т.е. вычисления носителя, многоугольника, укорочений и т. д.) и получить для решения (1.6) следующий член разложения $c_{k_0} x^{k_0}$, у которого $k_0 > r$, если $x \rightarrow 0$, и $k_0 < r$, если $x \rightarrow \infty$. Следовательно, получилась задача 1 для уравнения (1.13), но теперь с конусом задачи

$$\mathcal{K} = \left\{ P = (p_1, p_2) : \begin{array}{l} p_2/p_1 > r, p_1 < 0, \text{ если } x \rightarrow 0; \\ p_2/p_1 < r, p_1 > 0, \text{ если } x \rightarrow \infty \end{array} \right\}.$$

Согласно (1.5) для $k = p_2/p_1$ этот конус задачи можно записать в виде

$$\mathcal{K} = \{k = p_2/p_1 : k\omega < r\omega, p_1\omega > 0\}. \quad (1.14)$$

Однако во многих случаях дифференциальная сумма $\tilde{f}(x, z)$ имеет специальный вид, что позволяет существенно сократить вычисления разложений решения (1.6). Предположим, что уравнение (1.13) имеет вид

$$\tilde{f}(x, z) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}(x)z + h(x, z) = 0, \quad (1.15)$$

где $\mathcal{L}(x)$ – линейный дифференциальный оператор, и носитель $\mathbf{S}(\mathcal{L}z)$ состоит из одной точки $(v, 1)$, являющейся вершиной $\tilde{\Gamma}_1^{(0)}$ многоугольника $\Gamma(\tilde{f})$, у всех точек $Q = (q_1, q_2)$ носителя $\mathbf{S}(h)$ координата $q_2 \geq 0$ и нет точки $Q = (v, 1)$, нормальный конус вершины $\tilde{\Gamma}_1^{(0)}$ содержит вектор $P = (p_1, p_2)$ с $p_1\omega > 0$.

По аналогии с известной в функциональном анализе производной Фреше [42] мы введем формальную *производную Фреше* (или *первую вариацию*) $\delta f(x, y)/\delta y$ дифференциальной суммы $f(x, y)$, которая обладает следующими свойствами и определяется ими:

$$\begin{aligned} \delta(cx^{q_1}y^{q_2})/\delta y &= cq_2x^{q_1}y^{q_2-1}, \\ \delta(d^l y/dx^l)/\delta y &= d^l/dx^l, \\ \delta(f+g)/\delta y &= \delta f/\delta y + \delta g/\delta y, \\ \delta(fg)/\delta y &= (\delta f/\delta y)g + f(\delta g/\delta y). \end{aligned}$$

В дальнейшем изложении прилагательное “формальная” ради краткости опускается. Согласно второму свойству производная Фреше – это линейный дифференциальный оператор, т.е. имеет вид

$$\sum_{k=0}^l g_k(x, y) \frac{d^k}{dx^k},$$

где $g_k(x, y)$ суть дифференциальные суммы.

ТЕОРЕМА 1.2 [3]–[5]. Пусть (1.7) – решение укороченного уравнения (1.9) с $\mathbf{u} \in \mathbf{U}_j^{(d)}$. Тогда в уравнении (1.15) оператор

$$\mathcal{L}(x) = \frac{\delta \hat{f}_j^{(d)}(x, y)}{\delta y} \quad \text{на} \quad y = c_r x^r, \quad (1.16)$$

т.е. равен первой вариации, вычисленной на решении (1.7). При этом $\mathbf{S}(\mathcal{L}z) = (v, 1)$, где $v = \langle Q_1, (1, r) \rangle - r$ с $Q_1 \in \Gamma_j^{(d)}$.

Следовательно, после подстановки (1.13) уравнение (1.4) принимает вид (1.15), если

$$\mathcal{L}(x) \neq 0.$$

Пусть $\nu(k)$ – характеристический многочлен дифференциальной суммы $\mathcal{L}(x)z$, т.е.

$$\nu(k) = x^{-v-k} \mathcal{L}(x)x^k. \quad (1.17)$$

Если $\nu(k) \neq 0$, то корни k_1, \dots, k_s многочлена $\nu(k)$ называются *собственными значениями укороченного решения* (1.7). Те из вещественных собственных чисел k_i , которые лежат в конусе задачи, т.е. удовлетворяют неравенствам (1.14), называются *критическими числами*. Они играют важную роль при нахождении разложения решения (1.6), что будет показано в §3.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Степенное решение (1.7) алгебраического укороченного уравнения (1.9) с $d = 1$ не имеет собственных значений и критических чисел, ибо для него

$$\nu(k) \equiv \nu_0 = \text{const} = \frac{\partial \hat{f}_j^{(1)}}{\partial y}(1, c_r).$$

Если c_r – простой корень уравнения (1.11), то $\nu_0 \neq 0$. Если c_r – кратный корень уравнения (1.11), то $\nu_0 = 0$.

Если $\mathcal{L}(x) \neq 0$, то $\nu(k) \neq 0$. Если же $\mathcal{L}(x) \equiv 0$, то для уравнения (1.13) надо решать задачу 1, как описано в пп. 1.2 и 1.3 с учетом конуса задачи (1.14).

1.5. Решения с комплексными показателями степени. В задаче 1 п. 1.1 искались только решения вида (1.6) с вещественными показателями r . Теперь рассмотрим решения вида

$$y = c_\rho x^\rho + o(|x|^{r+\varepsilon}), \quad c_\rho \neq 0, \quad (1.18)$$

с комплексным показателем $\rho = r + is$, где $\varepsilon\omega < 0$. Их асимптотики имеют вид

$$y = c_\rho x^\rho, \quad c_\rho \neq 0. \quad (1.19)$$

Для таких решений справедливо все сказанное в предыдущих пунктах, если $r = \text{Re } \rho$.

Уточним только, что решения вида (1.19) укороченного уравнения (1.9) возникают только для вершин $\Gamma_j^{(0)}$, т.е. для $d = 0$. В этом случае характеристическое уравнение (1.10) может иметь комплексные корни, которые обозначим ρ_1, \dots, ρ_l . Подходящим корнем ρ_i является такой, для которого один из векторов $\pm(1, \text{Re } \rho_i)$ лежит в нормальном конусе $\mathbf{U}_j^{(0)}$. Если вместо (1.12) сделать замену

$$y = c_\rho x^\rho + z, \quad (1.20)$$

то дифференциальная сумма $\tilde{f}(x, z) \stackrel{\text{def}}{=} f(x, c_\rho x^\rho + z)$ будет содержать обычные мономы вида $cx^{r_1} z^{r_2}$ с комплексными r_1 . Теорема 1.2 сохраняется, только производную Фреше надо вычислять на решении (1.19). Характеристический многочлен $\nu(k)$ также определяется по (1.17). Его корни k_i также являются собственными значениями укороченного решения (1.19). Те из них, у которых вещественные части $\text{Re } k_i$ лежат в конусе задачи, т.е. удовлетворяют неравенствам (1.14), называются критическими числами укороченного решения (1.19).

Для укороченного уравнения (1.9), соответствующего ребру $\Gamma_j^{(1)}$, ищутся только решения (1.7) с вещественным показателем r , который однозначно определяется нормалью к этому ребру.

§ 2. Примеры вычисления степенных асимптотик

Методами § 1 были найдены степенные асимптотики решений первого уравнения Пенлеве $-y'' + 6y^2 + x = 0$ в [2; гл. VI, § 1, пример 1.1] и четвертого уравнения Пенлеве $-2yy'' + y'^2 + 3y^4 + 8xy^3 + 4(x^2 - a)y^2 + 2b = 0$ в [3; § 7]. Однако первые четыре уравнения Пенлеве [40] не имеют слишком сложных решений, они хороши для иллюстрации степенных разложений решений, но не пригодны для иллюстрации степенно-логарифмических разложений (см. [36], [24]). Пятое и шестое уравнения Пенлеве имеют достаточно сложные решения, но сами уравнения слишком громоздки, чтобы служить иллюстрацией (см. [25], [22]). Поэтому здесь в качестве примера рассмотрим уравнение

$$f(X) \stackrel{\text{def}}{=} x^2 y'^2 - 2x^2 y y'' + ay^2 + x^2 y^2 - x^4 = 0, \quad (2.1)$$

в котором a – вещественный параметр. В [2; гл. VI] вычислены степенные асимптотики решений уравнения Эмлена–Фаулера $y'' = ax^\sigma y^\mu$ (примеры 1.2 и 2.1) и его обобщения $y''' = x^\sigma y^\mu$ (§ 4).

2.1. Многоугольник и нормальные конусы граней. Легко видеть, что в уравнении (2.1) $f(X)$ является дифференциальной суммой. Найдем показатели степеней $Q = (q_1, q_2)$ для ее дифференциальных мономов. Первые три монома имеют показатель $Q_1 = (0, 2)$, показатель четвертого монома есть $Q_2 = (2, 2)$, а у пятого он равен $Q_3 = (4, 0)$. Следовательно, носитель $\mathbf{S}(f)$ состоит из трех точек

$$Q_1 = (0, 2), \quad Q_2 = (2, 2), \quad Q_3 = (4, 0), \quad (2.2)$$

показанных на рис. 1. Их выпуклая оболочка – это треугольник $\Gamma(f)$ с вершинами Q_1, Q_2, Q_3 (заштрихован на рис. 1). Его граница состоит из трех вершин $\Gamma_j^{(0)} = Q_j$, $j = 1, 2, 3$, и трех ребер $\Gamma_j^{(1)}$ (см. рис. 1). Ребро $\Gamma_1^{(1)}$ соединяет точки Q_1 и Q_3 . Поскольку разность $Q_1 - Q_3 = (-4, 2) = 2(-2, 1)$, то вектор $R = (-2, 1)$ является направляющим для этого ребра. Следовательно, нормальным к ребру $\Gamma_1^{(1)}$ является вектор $\tilde{N}_1 = (1, 2)$ и нормальное подпространство $\mathbf{N}_1^{(1)} = \{P = \mu \tilde{N}_1, \mu \in \mathbb{R}\}$. Но вектор \tilde{N}_1 направлен от ребра $\Gamma_1^{(1)}$ внутрь многоугольника $\Gamma(f)$. Внешней же нормалью к ребру $\Gamma_1^{(1)}$ является вектор $N_1 = -\tilde{N}_1 = (-1, -2)$. Следовательно, для ребра $\Gamma_1^{(1)}$ нормальный конус $\mathbf{U}_1^{(1)} = \{P = \lambda N_1, \lambda > 0\}$, т.е. это луч, показанный на рис. 2. Аналогично находим нормальные конусы

$$\mathbf{U}_j^{(1)} = \{P = \lambda N_j, \lambda > 0\}, \quad j = 2, 3, \quad (2.3)$$

где

$$N_2 = (0, 1), \quad N_3 = (1, 1). \quad (2.4)$$

Нормальный конус $U_j^{(0)}$ вершины $\Gamma_j^{(0)}$ – это сектор, ограниченный лучами, которые являются нормальными конусами ребер, примыкающих к этой вершине (рис. 2).

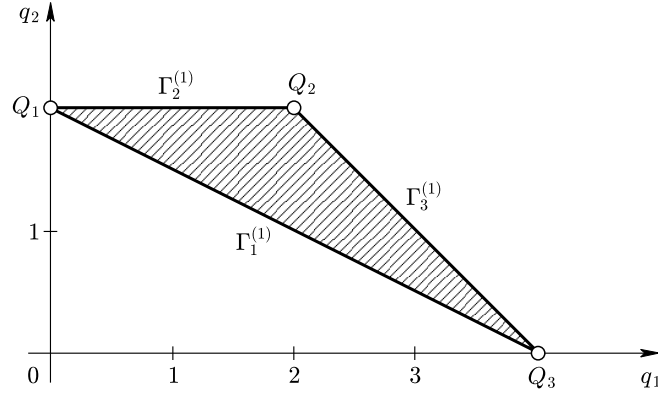


Рис. 1.

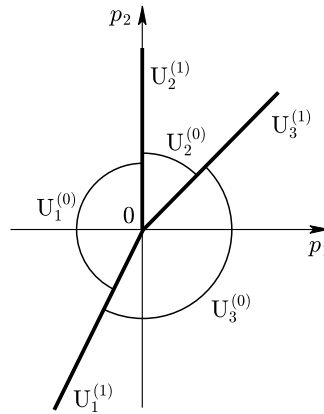


Рис. 2.

Теперь для каждой обобщенной грани $\Gamma_j^{(d)}$ найдем подходящие укороченные решения (1.7) соответствующего укороченного уравнения (1.9) и критические числа решения (1.7).

2.2. Вершина $\Gamma_1^{(0)}$. Ей соответствует укороченное уравнение

$$\hat{f}_1^{(0)}(X) \stackrel{\text{def}}{=} x^2 y'^2 - 2x^2 y y'' + ay^2 = 0. \quad (2.5)$$

Согласно рис. 2 у всех векторов $P = (p_1, p_2) \in U_1^{(0)}$ всегда $p_1 < 0$ и $p_2/p_1 < 2$. Поэтому здесь $x \rightarrow 0$ и $\omega = -1$. Подставляя $y = x^\rho$ в $\hat{f}_1^{(0)}(X)$ и сокращая результат

на $x^{2\rho}$, получаем характеристическое уравнение

$$\chi(\rho) \stackrel{\text{def}}{=} \rho^2 - 2\rho(\rho - 1) + a = -[\rho^2 - 2\rho - a] = 0. \quad (2.6)$$

Его корни

$$\rho_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + a}. \quad (2.7)$$

Если $a > -1$, то оба корня вещественны и различны, т.е. $r_i = \rho_i$. Если $a \in (-1, 0)$, то оба вектора $-(1, \rho_1)$ и $-(1, \rho_2)$ лежат в $\mathbf{U}_1^{(0)}$. Если $a \in [0, +\infty)$, то в $\mathbf{U}_1^{(0)}$ лежит только один вектор $-(1, \rho_2) = (-1, -1 + \sqrt{1 + a})$. Итак, для $a > -1$ имеются два семейства подходящих степенных решений (1.7)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1^{(0)} 1 &= \{y = cx^{r_1}, \omega = -1, a \in (-1, 0)\}, \\ \mathcal{F}_1^{(0)} 2 &= \{y = cx^{r_2}, \omega = -1, a \in (-1, +\infty)\}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где $c \neq 0$ – любая постоянная из \mathbb{C} .

Если $a = -1$, то характеристическое уравнение имеет двукратный корень $\rho = 1$ и вектор $-(1, 1) \in \mathbf{U}_1^{(0)}$. Здесь одно семейство степенных асимптотик

$$\mathcal{F}_1^{(0)} 3 = \{y = cx, c \in \mathbb{C}, c \neq 0, \omega = -1, a = -1\}. \quad (2.9)$$

Если $a < -1$, то оба корня (2.7) комплексные с вещественной частью $r = 1$. Поскольку $-(1, 1) \in \mathbf{U}_1^{(0)}$, то имеем два семейства подходящих степенных асимптотик

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1^{(0)} 4 &= \{y = cx^{\rho_1}, \omega = -1, a \in (-\infty, -1)\}, \\ \mathcal{F}_1^{(0)} 5 &= \{y = cx^{\rho_2}, \omega = -1, a \in (-\infty, -1)\}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где $c \neq 0$ – любая постоянная из \mathbb{C} .

Согласно п. 1.4 найдем теперь критические числа этих степенных решений. Для этого вычислим первую вариацию

$$\frac{\delta \hat{f}_1^{(0)}}{\delta y} = 2x^2 y' \frac{d}{dx} - 2x^2 y'' - 2x^2 y \frac{d^2}{dx^2} + 2ay. \quad (2.11)$$

По теореме 1.2 на решении $y = cx^\rho$ получаем оператор

$$\mathcal{L}(x) = 2cx^\rho \left[\rho x \frac{d}{dx} - \rho(\rho - 1) - x^2 \frac{d^2}{dx^2} + a \right]. \quad (2.12)$$

Применяя оператор $\mathcal{L}(x)$ к x^k и сокращая результат на $x^{\rho+k}$, получаем характеристический многочлен

$$\nu(k) = 2c[\rho k - \rho^2 + \rho - k(k - 1) + a]. \quad (2.13)$$

Согласно (2.6) $a = \rho^2 - 2\rho$, поэтому

$$\nu(k) = 2c[\rho k - k(k - 1) - \rho] = 2c(k - 1)(\rho - k). \quad (2.13')$$

Следовательно, асимптотика $y = cx^\rho$ имеет два собственных числа $k_1 = 1$ и $k_2 = \rho$. Очевидно, что число $k_2 = \rho$ не является критическим. Число $k_1 = 1$ является критическим только в случае $k_1 > \operatorname{Re} \rho$, т.е. только на семействе $\mathcal{F}_1^{(0)2}$.

Итак, вершине $\Gamma_1^{(0)} = Q_1$ соответствуют пять семейств подходящих степенных решений $\mathcal{F}_1^{(0)1}, \dots, \mathcal{F}_1^{(0)5}$ и только одно из них, $\mathcal{F}_1^{(0)2}$, имеет критическое значение $k = 1$.

Вершинам $\Gamma_2^{(0)}$ и $\Gamma_3^{(0)}$ соответствуют алгебраические укорочения $\hat{f}_2^{(0)}(x) = x^2y^2$ и $\hat{f}_3^{(0)}(x) = -x^4$. Согласно замечанию 1.1 соответствующие укороченные уравнения не имеют подходящих степенных решений.

2.3. Ребро $\Gamma_1^{(1)}$. Ему соответствует укороченное уравнение

$$\hat{f}_1^{(1)}(X) \stackrel{\text{def}}{=} x^2y'^2 - 2x^2yy'' + ay^2 - x^4 = 0. \quad (2.14)$$

Поскольку внешней нормалью к ребру $\Gamma_1^{(1)}$ является вектор $N_1 = -(1, 2)$, то здесь $x \rightarrow 0$, $\omega = -1$ и у уравнения (2.14) ищем степенные решения вида $y = cx^2$. Подставляя это выражение в (2.14), сокращая на x^4 и приводя подобные члены, получаем определяющее уравнение для коэффициента c

$$ac^2 - 1 = 0. \quad (2.15)$$

Следовательно,

$$c^2 = a^{-1} \quad \text{и} \quad c_{1,2} = \pm\sqrt{a^{-1}}.$$

При $a \neq 0$ получаем два семейства степенных асимптотик

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1^{(1)1} &= \{y = \sqrt{a^{-1}}x^2, \omega = -1, a \in \mathbb{R}, a \neq 0\}, \\ \mathcal{F}_1^{(1)2} &= \{y = -\sqrt{a^{-1}}x^2, \omega = -1, a \in \mathbb{R}, a \neq 0\}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Поскольку для первых вариаций справедливо равенство

$$\delta \hat{f}_1^{(1)}(X)/\delta y = \delta \hat{f}_1^{(0)}(X)/\delta y,$$

то формула (2.11) применима и здесь, а формулы (2.12) и (2.13) справедливы при $\rho = 2$ и $c = c_{1,2}$. Следовательно,

$$\nu(k) = 2c_{1,2}[2k + a - 2 - k^2 + k] = -2c_{1,2}[k^2 - 3k + 2 - a]. \quad (2.16')$$

Собственные числа суть $k_{1,2} = (3 \pm \sqrt{1 + 4a})/2$. При $a > 0$ одно из них $k_1 > 2$ и является критическим. При $a < 0$ оба собственных числа имеют $\operatorname{Re} k_{1,2} < 2$ и не являются критическими.

Итак, здесь имеются два семейства степенных асимптотик (2.16). Они имеют одно критическое число $k_1 = (3 + \sqrt{1 + 4a})/2$ при $a > 0$ и не имеют критических чисел при $a < 0$.

2.4. Ребро $\Gamma_2^{(1)}$. Ему соответствует укороченное уравнение

$$\hat{f}_2^{(1)}(X) \stackrel{\text{def}}{=} x^2y'^2 - 2x^2yy'' + ay^2 + x^2y^2 = 0. \quad (2.17)$$

Поскольку к ребру $\Gamma_2^{(1)}$ нормальным является вектор $N_2 = (0, 1)$, то здесь нет степенных решений вида (1.9).

2.5. Ребро $\Gamma_3^{(1)}$. Ему соответствует укороченное уравнение

$$\hat{f}_3^{(1)}(X) \stackrel{\text{def}}{=} x^2 y^2 - x^4 = 0, \quad (2.18)$$

и нормальный конус $U_3^{(1)} = \{P = \lambda N_3 = \lambda(1, 1), \lambda > 0\}$. Поскольку $N_3 = (1, 1)$, то $r = 1, \omega = 1, x \rightarrow \infty$ и решение укороченного уравнения ищем в виде $y = cx$. Подставляя это выражение в (2.18) и сокращая результат на x^4 , для c получаем определяющее уравнение $c^2 = 1$. Следовательно,

$$c_{1,2} = \pm 1,$$

т.е. имеются два семейства степенных решений

$$\mathcal{F}_3^{(1)}1 = \{y = x, a \in \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{F}_3^{(1)}2 = \{y = -x, a \in \mathbb{R}\}. \quad (2.19)$$

Поскольку укороченное уравнение (2.18) алгебраическое и корни $c = \pm 1$ уравнения (1.11) простые, то согласно замечанию 1.2 решения (2.19) не имеют собственных (а следовательно, и критических) чисел и для них $\nu(k) \equiv \text{const} \neq 0$.

Итак, ребру $\Gamma_3^{(1)}$ соответствуют два семейства степенных асимптотик (2.19), которые не имеют критических значений.

2.6. Сводка результатов. В этом параграфе найдены следующие степенные асимптотики решений уравнения (2.1).

- I. Два двухпараметрических (по c и a) семейства $\mathcal{F}_1^{(0)}1$ и $\mathcal{F}_1^{(0)}2$ из (2.8).
- II. Одно однопараметрическое (по c) семейство $\mathcal{F}_1^{(0)}3$ из (2.9).
- III. Два двухпараметрических (по c и a) семейства $\mathcal{F}_1^{(0)}4$ и $\mathcal{F}_1^{(0)}5$ из (2.10).
- IV. Два однопараметрических (по a) семейства $\mathcal{F}_1^{(1)}1$ и $\mathcal{F}_1^{(1)}2$ из (2.16).
- V. Два однопараметрических (по a) семейства $\mathcal{F}_3^{(1)}1$ и $\mathcal{F}_3^{(1)}2$ из (2.19).

§ 3. Степенно-логарифмические разложения решений

3.1. Постановка задачи. Если для уравнения (1.15) с $\nu(k) \neq 0$ искать решения в виде степенного ряда

$$z = \sum c_k x^k, \quad \omega k < \omega r, \quad (3.1)$$

где $c_k = \text{const} \in \mathbb{C}$, то согласно [4], [5] такое разложение решений существует только при определенных условиях. При этом основное условие – это отсутствие критических значений. Если же не накладывать этих условий, то получаются разложения вида (3.1), где c_k суть многочлены от $\ln x$. Но такого же вида разложения решений получаются и у уравнений более общего вида, чем (1.15). Поэтому расширим класс уравнений.

Сначала дополним определения § 1. *Дифференциально-логарифмическим (ДЛ-) мономом* называется произведение дифференциального монома $a(x, z)$ на многочлен $\alpha(\ln x)$ от $\ln x$. Векторный показатель степени $Q = (q_1, q_2)$ ДЛ-монома

$$\alpha(\ln x)a(x, z)$$

равен показателю степени дифференциального монома $a(x, z)$. Сначала рассмотрим случай, когда в сомножителе

$$cx^{r_1}z^{r_2} \quad (3.2)$$

дифференциального монома $a(x, z)$ показатель $r_1 \in \mathbb{R}$, а в конце параграфа – случай $r_1 \in \mathbb{C}$.

Дифференциально-логарифмической (ДЛ-) суммой $f(x, z)$ называется (конечная или бесконечная) сумма ДЛ-мономов. Если это бесконечная сумма, то будем предполагать, что в ней (а) конечно число ДЛ-мономов с одним показателем Q и (б) показатели Q ДЛ-мономов не имеют точек накопления в \mathbb{R}^2 .

ДЛ-сумме $f(x, z)$ соответствует множество $\mathbf{S}(f)$ векторных показателей степеней ее ДЛ-мономов, называемое *носителем суммы* $f(x, z)$, и многоугольник $\Gamma(f)$, являющийся замыканием выпуклой оболочки носителя $\mathbf{S}(f)$.

Рассмотрим уравнение

$$\tilde{f}(x, z) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}(x)z + h(x, z) = 0, \quad (3.3)$$

где $\tilde{f}(x, z)$ – ДЛ-сумма, у всех ДЛ-мономов которой в сомножителе (3.2) число r_2 целое неотрицательное, а $\mathcal{L}(x)$ – линейный дифференциальный оператор.

Задача 2. Для решений уравнения (3.3) найти разложения

$$z = \sum \beta_k (\ln x) x^k,$$

где β_k суть многочлены от $\ln x$ с комплексными коэффициентами и показатели k или $\text{Re } k$ лежат в конусе задачи (1.14), если он есть.

3.2. Носитель разложения решения. Для определенности на слагаемые в уравнении (3.3) наложим следующие условия.

УСЛОВИЕ 3.1. Точка $(v, 1)$ является вершиной многоугольника $\Gamma(\tilde{f})$. В сумме $\tilde{f}(x, z)$ ей соответствует слагаемое $\mathcal{L}(x)z$ и только оно. ДЛ-сумма $\mathcal{L}(x)z$ не содержит логарифмов, т.е. является дифференциальной суммой.

Если уравнение (3.3) получено из (1.4) и $\mathcal{L} \neq 0$, то это условие выполняется автоматически. Если это условие выполнено, то дифференциальная сумма $\mathcal{L}(x)z$ имеет характеристический многочлен (1.17) и $\nu(k) \neq 0$.

Сдвинем параллельно носитель $\mathbf{S}(\tilde{f})$ на вектор $(-v, -1)$. Тогда вершина $(v, 1)$, соответствующая члену $\mathcal{L}(x)z$, перейдет в начало координат. Пусть задано такое число r , что для всякой точки $Q' \in \mathbf{S}' \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{S}(\tilde{f}) - (v, 1)$ скалярное произведение $\langle \omega R, Q' \rangle \geq 0$, где $R = (1, r)$. Пусть вещественные числа k_1, \dots, k_s удовлетворяют неравенству $k\omega < r\omega$ из (1.14). Пусть $\mathbf{S}'_+(k_1, \dots, k_s)$ – множество конечных сумм векторов $Q' \in \mathbf{S}'$ и векторов $(k_1, -1), \dots, (k_s, -1)$. Обозначим

$$\mathbf{K}(k_1, \dots, k_s) = \mathbf{S}'_+(k_1, \dots, k_s) \cap \{q_2 = -1\}. \quad (3.4)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Множество $\mathbf{K}(k_1, \dots, k_s)$ не имеет точек накопления в \mathbb{R} , если носитель $\mathbf{S}(\tilde{f})$ не имеет точек накопления в \mathbb{R}^2 .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть $\Gamma_j^{(0)}$ – такая вершина многоугольника $\Gamma(f)$ уравнения (1.4), что соответствующее укороченное уравнение (1.9) имеет решение (1.7) с $\omega(1, r) \in U_j^{(0)}$ и все точки сдвинутого носителя $S(f) - \Gamma_j^{(0)}$ представляются в виде $\sum_{i=1}^n l_i M_i$, где целые $l_i \geq 0$, а $M_i \in \mathbb{R}^2$ – некоторые векторы. Тогда для множества \mathbf{K} уравнения (3.3) справедливо включение

$$\mathbf{K} \subset \left\{ k = r + \sum_{i=1}^n l_i r_i, \text{ целые } l_i \geq 0, \sum_{i=1}^n l_i > 0 \right\},$$

где $r_i = \langle (1, r), M_i \rangle$, $i = 1, \dots, n$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Если множество

$$\mathbf{K} = \left\{ k = r + \sum_{i=1}^n l_i r_i, \text{ целые } l_i \geq 0, \sum_{i=1}^n l_i > 0 \right\},$$

то множество (3.4) имеет вид

$$\mathbf{K}(k_1, \dots, k_s) = \left\{ k = r + \sum_{i=1}^n l_i r_i + \sum_{j=1}^s m_j (k_j - r), \right. \\ \left. \text{целые } l_i, m_j \geq 0, \sum_{i=1}^n l_i + \sum_{j=1}^s m_j > 0 \right\}.$$

3.3. Вычисление разложений.

ТЕОРЕМА 3.1. Если уравнение (3.3) удовлетворяет условию 3.1, то оно имеет формальное решение

$$z = z^*(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum \beta_k (\ln x) x^k, \quad k \in \mathbf{K}(k_1, \dots, k_s), \quad (3.5)$$

где $\beta_k(\ln x)$ суть многочлены от $\ln x$ и k_1, \dots, k_s – критические числа укороченного решения (1.7).

Действительно, двигаясь по точкам k множества (3.4) в направлении возрастания $-\omega(k - r)$, для каждого коэффициента β_k из (3.5) получаем линейное уравнение

$$\mathcal{L}(x) \beta_k x^k + \theta_k x^{k+v} = 0, \quad (3.6)$$

где θ_k – многочлен от коэффициентов β_j и их производных с $-\omega(j - r) < -\omega(k - r)$, т.е. $-\omega j < -\omega k$. Кроме того, коэффициент θ_k зависит от коэффициентов суммы h в (3.3). На самом деле, θ_k – это коэффициент при x^{k+v} в сумме

$$h \left(x, \sum_{-\omega r < -\omega j < -\omega k} \beta_j x^j \right). \quad (3.6')$$

Пусть утверждение теоремы справедливо для всех β_j с $-\omega j < -\omega k$. Тогда θ_k является многочленом от $\xi \stackrel{\text{def}}{=} \ln x$.

ЛЕММА 3.1. Уравнение (3.6) эквивалентно линейному дифференциальному уравнению

$$\mathcal{N}_k(\xi)\beta_k(\xi) + \theta_k(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \sum \frac{1}{m!} \nu^{(m)}(k) \beta_k^{(m)}(\xi) + \theta_k(\xi) = 0, \quad (3.7)$$

$$\text{где } \nu^{(m)}(k) = \left. \frac{d^m \nu(q)}{dq^m} \right|_{q=k}, \quad \beta_k^{(m)}(\xi) = \frac{d^m \beta_k(\xi)}{d\xi^m}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Пусть $\mu(k)$ – наименьшее значение m , для которого $\nu^{(m)}(k) \neq 0$, и $\lambda(k)$ – степень многочлена $\theta_k(\xi)$; при этом $\lambda(k) = -1$, если $\theta_k \equiv 0$.

ЛЕММА 3.2. Пусть $\theta_k(\xi)$ – многочлен степени $\lambda(k)$, тогда уравнение (3.7) имеет решение $\beta_k(\xi)$, являющееся многочленом степени $\mu(k) + \lambda(k)$ и содержащее $\mu(k)$ произвольных коэффициентов.

Действительно, оператор $\mathcal{N}_k(\xi)$ в (3.7) имеет вид

$$\mathcal{N}_k^{(\mu)}(\xi) + \mathcal{N}_k^{(\mu+1)}(\xi) + \dots,$$

где $\mathcal{N}_k^{(\mu)}$ означает оператор порядка μ . Если разложить многочлены $\beta_k(\xi)$ и $\theta_k(\xi)$ по степеням ξ в виде

$$\beta_k = \sum_{l=0}^{\mu+\lambda} \beta_{kl} \xi^l, \quad \theta_k = \sum_{l=0}^{\lambda} \theta_{kl} \xi^l$$

и в обеих частях уравнения (3.7) приравнять члены с одинаковыми степенями ξ , то получается неоднородная линейная система $\lambda + 1$ уравнений для $\lambda + \mu + 1$ коэффициентов β_{kl} . Будем вычислять эти коэффициенты, начиная со старшей степени $l = \mu(k) + \lambda(k)$. Для этого коэффициента получается уравнение

$$\mathcal{N}_k^{(\mu)} \beta_{k, \mu+\lambda} \xi^{\mu+\lambda} + \theta_{k, \lambda} \xi^{\lambda} = 0,$$

т.е. согласно (3.7)

$$\frac{1}{\mu!} \nu^{(\mu)}(k) \frac{(\mu + \lambda)!}{\lambda!} \beta_{k, \mu+\lambda} + \theta_{k, \lambda} = 0.$$

По определению μ коэффициент $\nu^{(\mu)}(k) \neq 0$, поэтому это уравнение имеет однозначное решение. Для коэффициента $\beta_{k, \mu+\lambda-1}$ получается аналогичное уравнение, только правая часть зависит от $\theta_{k, \lambda-1}$ и $\beta_{k, \mu+\lambda}$ и т. д. Наконец, согласно (3.7) для $l < \mu(k)$ коэффициент $\beta_{k, l}$ отсутствует в указанной линейной системе и может быть взят любым.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Зная оператор $\mathcal{L}(x)$ и носитель $\mathbf{K}(k_1, \dots, k_s)$ разложения (3.5), можно вычислять его коэффициенты прямо по исходному уравнению $f(x, y) = 0$, ибо коэффициент при x^k в сумме (3.6') совпадает с коэффициентом при x^{k+v} в сумме

$$f\left(x, c_r x^r + \sum_{-\omega r < -\omega j < -\omega k} \beta_j x^j\right).$$

Следовательно, вычислив начальный отрезок разложения

$$y = c_r x^r + \sum \beta_j x^j$$

и подставив его в $f(x, y)$, получаем функцию θ_k в уравнении (3.7). В сложных случаях это уравнение можно решать так, как описано в пояснении к лемме 3.2.

Семейство разложений решений (3.5), соответствующее семейству $\mathcal{F}_j^{(d)} l$ степенных асимптотик решений (1.7), будем обозначать $\mathcal{G}_j^{(d)} l$. Как правило, удается вычислить не все разложение (3.5), а только его начальный отрезок. При этом желательно, чтобы этот отрезок содержал все показатели k , соответствующие критическим значениям k_1, \dots, k_s . Тогда он содержит все произвольные постоянные семейства $\mathcal{G}_j^{(d)} k$. Семейство такого отрезка разложения (3.5) будем обозначать $\tilde{\mathcal{G}}_j^{(d)} k$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Если критические числа k_1, \dots, k_s таковы, что числа k_{t+1}, \dots, k_s не лежат в множестве $\mathbf{K}(k_1, \dots, k_t)$, то уравнение (3.3) имеет решение вида (3.5), носитель которого лежит в множестве $\mathbf{K}(k_1, \dots, k_t)$.

3.4. Степени логарифмов в разложении. Очевидно, что степень $\text{ord } \beta_k(\xi)$ многочленов β_k растет вместе с ростом $-\omega(k-r)$. Оценим ее сверху для случая, когда уравнение (3.3) не содержит логарифмов. Положим $\varkappa(j) = \mu(j)/|j-r|$ и $q^* = \max q_2$ по $(q_1, q_2) \in \mathbf{S}(\tilde{f})$.

ТЕОРЕМА 3.2. Если в уравнении (3.3) нет логарифмов, то в ситуации замечания 3.2 в решении (3.5)

$$\text{ord } \beta_k \leq q^* |k-r| \sum_{0 < -\omega(j-r) < -\omega(k-r)} \varkappa(j), \quad (3.8)$$

где $j, k \in \mathbf{K}(k_1, \dots, k_t)$.

Говорят, что для критического числа k_i выполнено *условие совместности*, если для $k = k_i$ в уравнении (3.6) $\theta_k \equiv 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. В ситуации теоремы 3.2 разложение (3.5) может содержать логарифм $\ln x$ только в двух случаях: (а) если в множестве $\mathbf{K}(k_1, \dots, k_{i-1}, k_i, \dots, k_t)$ лежит критическое число k_i , для которого не выполнено условие совместности; (б) если среди k_1, \dots, k_t имеется кратное критическое число. Это согласуется с результатами из [4], [5].

3.5. Решетка носителя разложения. Дискретное множество \mathbf{Z} в \mathbb{R}^n называется *решеткой*, если оно замкнуто относительно векторных сложения и вычитания. Векторы B_1, \dots, B_n образуют *базис решетки* \mathbf{Z} , если всякая точка $Q \in \mathbf{Z}$ может быть представлена в виде

$$Q = m_1 B_1 + \dots + m_n B_n, \quad \text{где все } m_i \in \mathbb{Z}.$$

ТЕОРЕМА 3.3 [4], [5]. Если множество $\mathbf{S}' \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{S}(f) - (v, 1)$ и точки $(k_1, -1), \dots, (k_s, -1)$ лежат в некоторой решетке \mathbf{Z} , то множество

$$\mathbf{K}(k_1, \dots, k_s) \subset \mathbf{Z} \cap \{q_2 = -1\}.$$

3.6. Комплексные показатели. Сначала рассмотрим случай, когда в уравнении (3.3) у всех ДЛ-мономов в множителе (3.2) показатель r_1 вещественный, но среди собственных чисел k_i имеются комплексные, у которых вещественная часть $\text{Re } k_i$ лежит в конусе задачи (1.14). Так что теперь k_1, \dots, k_s — это все критические значения оператора $\mathcal{L}(x)$, включая комплексные, т.е. $\omega \text{Re } k_i < \omega r$. В этом случае множество $\mathbf{S}'_+(k_1, \dots, k_s)$ содержит точки $Q = (q_1, q_2)$, у которых $q_1 \in \mathbb{C}$, $q_2 \in \mathbb{Z}$, а \mathbf{K} — это множество на комплексной плоскости $q_1 \in \mathbb{C}$. Тогда теорема 3.1 остается справедливой, только в разложении (3.5) показатели k частично упорядочены по росту $-\omega(\text{Re } k - r)$. Все дальнейшие утверждения пп. 3.2–3.5 также остаются справедливыми.

Если же в уравнении (3.3) имеются x^{r_1} с комплексным показателем r_1 , то носитель $\mathbf{S}(\tilde{f})$ лежит в прямой сумме $\mathbb{C} \oplus \mathbb{R}$. Но при построении многоугольника $\Gamma(\tilde{f})$ учитываются только $\text{Re } q_1$, т.е. $\text{Re } \mathbf{S}(\tilde{f})$. Все дальнейшие конструкции и результаты сохраняются. Разложения решений (3.1) с комплексными показателями k рассматривались в [37]

3.7. Существование решений. Если для уравнения (3.3) разложение (3.5) сходится при достаточно малых $|x|^{-\omega}$, то этому разложению соответствует решение уравнения (3.3). Для дифференциальной суммы \tilde{f} в (3.3) условия сходимости степенного разложения (3.5) приведены в [3]–[5]. Максимальный порядок производной в дифференциально-логарифмической сумме $f(x, z)$ назовем ее *порядком дифференцирования* и обозначим $\pi(f)$.

ТЕОРЕМА 3.4. Для дифференциальной суммы \tilde{f} уравнения (3.3) степенное разложение его решения (3.5) сходится для достаточно малых $|x|^{-\omega} \neq 0$, если

$$\pi(\mathcal{L}z) = \pi(\tilde{f}).$$

Очевидно, что $\pi(\tilde{f}) = \pi(f)$, но, вообще говоря, $\pi(\mathcal{L}z) \leq \pi(\tilde{f})$, хотя строгое неравенство здесь имеется только в вырожденных случаях.

Если дифференциальное уравнение (3.3) и разложение (3.5) вещественны, то у уравнения (3.3) всегда существует такое вещественное решение, для которого ряд (3.5) является асимптотическим разложением. Вообще говоря, такое решение не единственно. Даже разложение с комплексными показателями может быть вещественным для вещественного аргумента, если оно переходит в себя при комплексном сопряжении аргумента.

ГИПОТЕЗА 3.1. В ситуации теоремы 3.1 для любого достаточно узкого сектора комплексной плоскости $x^{-\omega}$ уравнение (3.3) имеет решение $z(x)$, для которого ряд (3.5) является асимптотическим разложением.

§ 4. Примеры вычисления разложений

Продолжим рассмотрение уравнения (2.1), начатое в § 2, и покажем, какие разложения (3.5) получаются из результатов § 3 для различных семейств $\mathcal{F}_j^{(d)}$ k степенных асимптотик, найденных в § 2.

4.1. Семейство $\mathcal{F}_1^{(0)}$ из (2.8). Здесь $r = r_1 = 1 + \sqrt{1+a} \in (1, 2)$ и нет критических чисел. Для

$$\tilde{f}(x, z) \stackrel{\text{def}}{=} f(x, cx^r + z) \quad (4.1)$$

носитель $\mathbf{S}(\tilde{f})$ содержит кроме точек (2.2) еще три точки

$$Q_4 = (r, 1), \quad Q_5 = (r + 2, 1), \quad Q_6 = (2r + 2, 0) \quad (4.2)$$

(рис. 3). При этом точка Q_4 является вершиной $(v, 1)$, т.е. $v = r$. После сдвига носителя $\mathbf{S}(f)$ на вектор $(-r, -1)$ получаем 6 точек $Q'_i = Q_i - Q_4$:

$$\begin{aligned} Q'_1 &= (-r, 1), & Q'_2 &= (2 - r, 1), & Q'_3 &= (4 - r, -1), \\ Q'_4 &= 0, & Q'_5 &= (2, 0), & Q'_6 &= (r + 2, -1), \end{aligned} \quad (4.3)$$

показанных на рис. 4. Множество \mathbf{S}'_+ конечных сумм векторов Q'_1, \dots, Q'_6 расположено в секторе, ограниченном лучами, натянутыми на Q'_1 и Q'_3 (рис. 4). При этом

$$Q'_2 = 2Q'_1 + Q'_6, \quad Q'_5 = Q'_1 + Q'_6. \quad (4.4)$$

Поэтому множество \mathbf{S}'_+ порождается векторами Q'_1, Q'_3, Q'_6 и состоит из точек

$$Q = jQ'_1 + lQ'_3 + mQ'_6, \quad \text{где целые } j, l, m \geq 0. \quad (4.5)$$

Согласно (4.3) для этих точек $Q = (q_1, q_2)$ имеем $q_1 = -jr + l(4 - r) + m(r + 2)$, $q_2 = j - l - m$. На прямой $q_2 = -1$ имеем $j - l - m = -1$, т.е. $j = l + m - 1$, где $l + m > 0$. Поэтому $q_1 = -(l + m - 1)r + l(4 - r) + m(r + 2) = r + 2l(2 - r) + 2m$. Этот же результат следует из предложения 3.2, ибо для $\Gamma_j^{(0)}$ имеем $n = 2$, $M_1 = 2(2, -1)$ и $M_2 = 2(1, 0)$, т.е. $r_1 = 2(2 - r)$ и $r_2 = 2$. Следовательно, множество (3.4) есть

$$\mathbf{K} = \{k = r + 2l(2 - r) + 2m; \text{ целые } l, m \geq 0, l + m > 0\}. \quad (4.6)$$

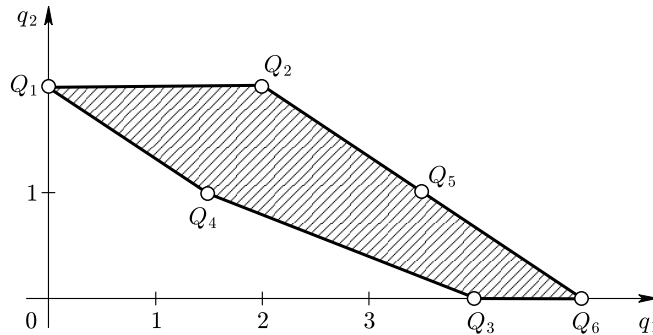


Рис. 3.

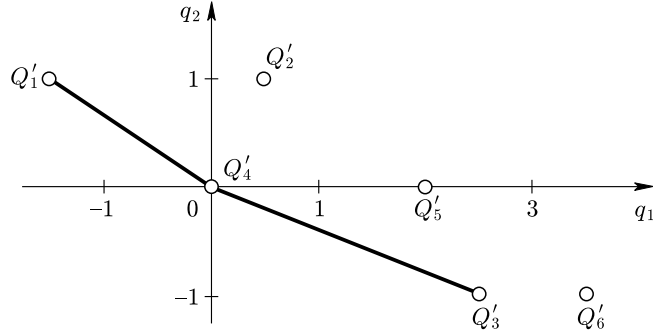


Рис. 4.

Согласно теореме 3.1 и замечанию 3.2 в этом случае семейство $\mathcal{G}_1^{(0)}$ состоит из разложений (3.1) с постоянными однозначно определенными коэффициентами c_k , где показатели k пробегает множество (4.6). Если число r рационально со знаменателем t , то множество \mathbf{S}'_+ содержится в решетке \mathbf{Z} с базисными векторами $B_1 = (t^{-1}, 1)$, $B_2 = (2t^{-1}, 0)$. По теореме 3.3 множество \mathbf{K} содержится в множестве $\{k = 4 - r + 2lt^{-1}, l = 0, 1, 2, \dots\}$.

4.2. Семейство $\mathcal{F}_1^{(0)}$ 2 из (2.8). Для него $r = r_2 = 1 - \sqrt{1+a} < 1$ и имеется одно критическое число $k_1 = 1$. Здесь равенства (4.2)–(4.4) остаются, но расположение точек (4.3) другое (рис. 5). Множество \mathbf{S}'_+ расположено в секторе, ограниченном лучами, натянутыми на векторы Q'_1 и Q'_6 , оно опять порождается векторами Q'_1, Q'_3, Q'_6 и состоит из точек (4.5). Поэтому множество \mathbf{K} есть (4.6). Критическое значение $k_1 = 1$ попадает в это множество только при $l = 0$ и $r = 1 - 2m$, т.е. при

$$a = (2m - 1)(2m + 1), \quad m = 1, 2, \dots \quad (4.7)$$

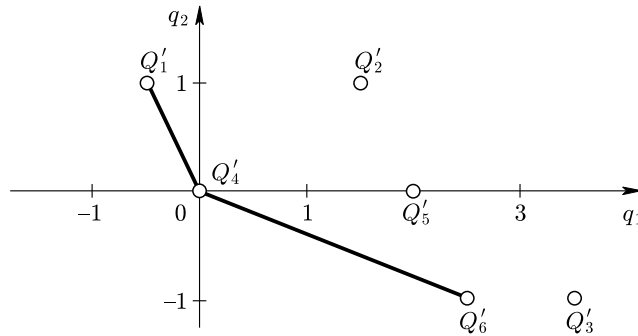


Рис. 5.

Если равенства (4.7) не выполнены, то множество $\mathbf{S}'_+(k_1) = \mathbf{S}'_+(1)$ порождается векторами Q'_1, Q'_3, Q'_6 и состоит из точек

$$Q = jQ'_1 + lQ'_3 + mQ'_6 + n(1, -1), \quad \text{где целые } j, l, m, n \geq 0.$$

Согласно (4.3) для этих точек $Q = (q_1, q_2)$ имеем $q_1 = -jr + l(4 - r) + m(r + 2) + n$, $q_2 = j - l - m - n$. На прямой $q_2 = -1$ имеем $j - l - m - n = -1$, т.е. $j = l + m + n - 1$, где $l + m + n > 0$. Следовательно,

$$\mathbf{K}(1) = \{k = r + 2l(2 - r) + 2m + n(1 - r); \text{ целые } l, m, n \geq 0, l + m + n > 0\}. \quad (4.8)$$

Этот же результат следует из предложения 3.3 и формулы (4.6), ибо здесь $s = 1$, $k_1 - r = 1 - r$. В этом случае семейство $\mathcal{G}_1^{(0)}$ состоит из разложений (3.1) с произвольным постоянным коэффициентом c_1 и с однозначно определенными постоянными коэффициентами c_k для $k \neq 1$, где показатели k пробегают множество (4.8).

Если выполнено одно из равенств (4.7), то множество $\mathbf{K}(1)$ совпадает с множеством (4.6) и в разложении решения (3.5) появляются логарифмы для β_k с $k \geq 1$. Рассмотрим подробно случай (4.7) с $m = 1$. Тогда $a = 3$, $r = -1$, множество (4.6) – это множество нечетных чисел $\{k = 1, 3, 5, \dots\}$. Будем искать первый член разложения (3.5) с $k = 1$, т.е.

$$y = cx^{-1} + \beta x + \dots$$

Тогда $y' = -cx^{-2} + \beta + \beta'x + \dots$, $y'' = 2cx^{-3} + 2\beta' + \beta''x + \dots$. Подставляя эти выражения в уравнение (2.1) и выписывая члены с x^{-2} и x^0 , получаем

$$\begin{aligned} & x^2(-cx^{-2} + \beta'x + \beta)^2 - 2x^2(cx^{-1} + \beta x)(2cx^{-3} + \beta''x + 2\beta') \\ & + 3(cx^{-1} + \beta x)^2 + x^2(cx^{-1} + \beta x)^2 + \dots \\ & = -2c(\beta'x + \beta) - 4c\beta - 2c(\beta''x^2 + 2\beta'x) + 6c\beta + c^2 + \dots \end{aligned}$$

Приравнявая к нулю выписанную сумму членов нулевой степени по x и сокращая ее на $-c$, получаем уравнение

$$2\beta''x^2 + 6\beta'x - c = 0. \quad (4.9)$$

Положим $\xi = \ln x$ и будем точкой обозначать дифференцирование по ξ . Тогда

$$\beta' = \dot{\beta}x^{-1}, \quad \beta'' = (\ddot{\beta} - \dot{\beta})x^{-2}, \quad (4.9')$$

и уравнение (4.9) принимает вид $2(\ddot{\beta} - \dot{\beta}) + 6\dot{\beta} = c$, т.е.

$$2\ddot{\beta} + 4\dot{\beta} = c. \quad (4.9'')$$

Это уравнение имеет решения

$$\beta = (c/4)\xi + c_1,$$

где c_1 – произвольная постоянная. Следовательно, в этом случае разложение (1.12), (3.5) имеет вид

$$y = cx^{-1} + (c/4)(\ln x + c_1)x + \beta_3 x^3 + \dots, \quad (4.10)$$

где $c \neq 0$ и c_1 – произвольные постоянные, β_3 – многочлен второй степени от $\ln x$.

Теперь вычислим коэффициент $\beta(\ln x)$, используя замечание 3.1. Подставим в уравнение (2.1) $y = cx^{-1}$ и вычислим коэффициент при x^0 , ибо здесь $v = 1$. Получаем $\theta_1 = c^2$. При $k = 1$ уравнение (3.7) принимает вид

$$\nu(1)\beta_1(\xi) + \nu'(1)\dot{\beta}_1(\xi) + \frac{1}{2}\nu''(1)\beta_1(\xi) + c^2 = 0. \quad (4.10')$$

Согласно (2.13') имеем $\nu(k) = 2c(k-1)(\rho-1)$. Но здесь $\rho = -1$, т.е. $\nu(k) = -2c(k^2-1)$. Следовательно, $\nu'(k) = -4ck$ и $\nu''(k) = -4c$. Поэтому $\nu(1) = 0$, $\nu'(1) = -4c$, $\nu''(1) = -4c$ и уравнение (4.10') принимает вид $-4c\dot{\beta}_1 - 2c\ddot{\beta}_1 + c^2 = 0$, аналогичный (4.9''). Более того, в обозначениях леммы 3.2 здесь $\lambda(1) = 0$, $\mu(1) = 1$ и $\lambda + \mu = 1$. По лемме 3.2 многочлен $\beta(\xi)$ имеет первую степень, т.е. $\ddot{\beta} = 0$.

4.3. Семейство $\mathcal{F}_1^{(0)}3$ из (2.9). Для него множество \mathbf{S}' лежит в решетке \mathbf{Z} с базисом $B_1 = (2, 0)$, $B_2 = (1, -1)$. Поэтому множество \mathbf{K} состоит из нечетных чисел $\{k = 3, 5, \dots\}$. Разложение (1.12), (3.5) имеет вид

$$y = cx + x \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k} x^{2k}, \quad (4.11)$$

где $c \neq 0$ — произвольная постоянная и все c_{2k} однозначно определены. Это семейство $\mathcal{G}_1^{(0)}3$.

4.4. Семейство $\mathcal{F}_1^{(0)}4$ из (2.10). Для него $\rho = \rho_1 = 1 + \sqrt{1+a} \stackrel{\text{def}}{=} 1 + is$ и нет критических значений. Для $\tilde{f}(x, z) \stackrel{\text{def}}{=} f(x, cx^\rho + z)$ носитель $\mathbf{S}(\tilde{f})$ состоит из точек (2.2) и точек

$$Q_4 = (1 + is, 1), \quad Q_5 = (3 + is, 1), \quad Q_6 = (4 + 2is, 0).$$

Члену $\mathcal{L}(x)z$ соответствует точка Q_4 . Положим $Q'_i = Q_i - Q_4$. Тогда

$$\begin{aligned} Q'_1 &= (-1 - is, 1), & Q'_2 &= (1 - is, 1), & Q'_3 &= (3 - is, -1), \\ Q'_4 &= 0, & Q'_5 &= (2, 0), & Q'_6 &= (3 + is, -1). \end{aligned}$$

На рис. 6 показана проекция этих точек на плоскость $\text{Re } q_1, \text{Im } q_1$; при этом точки Q'_1 и Q'_2 имеют $q_2 = 1$, Q'_4 и Q'_5 имеют $q_2 = 0$, а Q'_3 и Q'_6 имеют $q_2 = -1$. Здесь справедливы равенства (4.2)–(4.4) с ρ вместо r , и множество \mathbf{S}'_+ порождается векторами Q'_1, Q'_3, Q'_6 . Вычисляя множество \mathbf{K} так же, как для семейства $\mathcal{F}_1^{(0)}1$, получаем аналог формулы (4.6), где r заменено на ρ :

$$\mathbf{K} = \{k = 1 + is + 2l(1 - is) + 2m; \text{ целые } l, m \geq 0, l + m > 0\} \quad (4.12)$$

(кружочки на рис. 7). Поэтому разложение (3.5) имеет вид

$$z = x^{3+is} \left(\sum_{l=0}^{\infty} c_{2l} x^{2l} \right) + x^{3-is} \left(\sum_{l=0}^{\infty} c_{2l}^{(1)} x^{2l} \right) + x^{5-3is} \left(\sum_{l=0}^{\infty} c_{2l}^{(2)} x^{2l} \right) + \dots, \quad (4.13)$$

где все коэффициенты $c_{2l}, c_{2l}^{(1)}, c_{2l}^{(2)}, \dots$ постоянны и однозначно определены. Согласно (2.10), (1.20) и (4.13) носитель разложения для y содержит еще точку $1 + is$, показанную звездочкой на рис. 7, и заключен в угле, выделенном пунктиром на рис. 7.

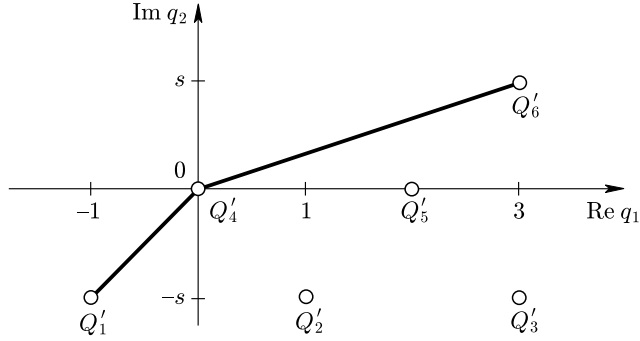


Рис. 6.

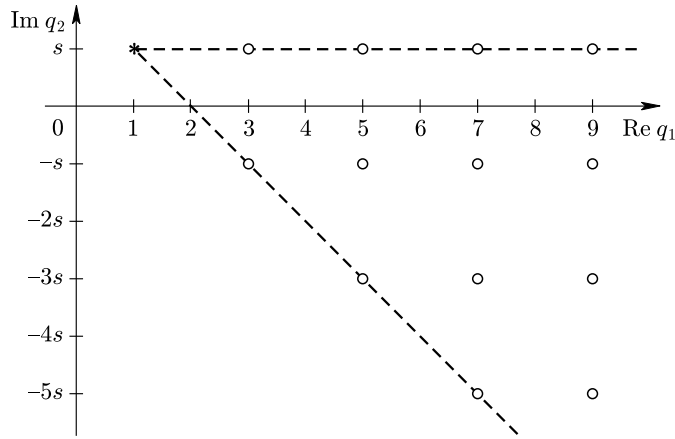


Рис. 7.

Для семейства $\mathcal{F}_1^{(0)}$ 5 из (2.10) получается разложение вида (4.13), где s надо заменить на $-s$.

4.5. Семейство $\mathcal{F}_1^{(1)}$ 1 из (2.16). Для него $r = 2$ и при $a < 0$ нет критических значений, а при $a > 0$ имеется одно критическое значение $k_1 = (3 + \sqrt{1 + 4a})/2$. Носитель $\mathbf{S}(\tilde{f})$ состоит из точек

$$Q_1, Q_2, Q_4 = (2, 1), Q_5 = (4, 1), Q_6 = (6, 0).$$

Члену $\mathcal{L}(x)z$ соответствует вершина Q_4 , поэтому $v = 2$. Полагая $Q'_i = Q_i - Q_4$, получаем

$$Q'_1 = (-2, 1), Q'_2 = (0, 1), Q'_4 = 0, Q'_5 = (2, 0), Q'_6 = (4, -1). \quad (4.13')$$

Все они лежат в решетке с базисом $B_1 = (2, 0) \stackrel{\text{def}}{=} 2E_1, B_2 = (0, 1) \stackrel{\text{def}}{=} E_2$. Поэтому множество $\mathbf{K} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{S}'_+ \cap \{q_2 = -1\} = \{k = 4 + 2l, l = 0, 1, 2, \dots\}$.

При $a < 0$ нет критических значений. По теореме 4.1 для полусемейства $\mathcal{G}_1^{(1)}1-$ разложение (1.12), (3.5) имеет вид

$$y = cx^2 + \sum_{k=2}^{\infty} c_{2k} x^{2k}, \quad (4.14)$$

где $c = \sqrt{a^{-1}}$ и все коэффициенты c_{2k} являются определенными постоянными, зависящими от c . Для полусемейства $\mathcal{G}_1^{(1)}2-$ разложение решений также имеет вид (4.14), только $c = -\sqrt{a^{-1}}$.

При $a > 0$ имеется критическое число $k_1 = (3 + \sqrt{1 + 4a})/2$. Оно попадает в множество \mathbf{K} только при

$$a = 6 + 10l + 4l^2, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (4.15)$$

Если a отлично от значений (4.15), то поскольку здесь опять выполнены равенства (4.4) и Q'_3 отсутствует, множество \mathbf{S}'_+ порождается векторами $Q'_1, Q'_6, (k_1, -1)$ и состоит из векторов $Q = jQ'_1 + lQ'_6 + m(k_1, -1)$, где целые $j, l, m \geq 0$. Согласно (4.13') для этих точек $Q = (q_1, q_2)$ имеем $q_1 = -2j + 4l + mk_1, q_2 = j - l - m$. На прямой $q_2 = -1$ имеем $j = l + m - 1$, где $m + l > 0$. Поэтому $q_1 = -2(l + m - 1) + 4l + mk_1 = 2 + 2l + m(k_1 - 2)$. Этот же результат следует из предложения 3.3. Итак,

$$\mathbf{K}(k_1) = \{k = 2 + 2l + m(k_1 - 2); \text{ целые } l, m \geq 0, l + m > 0\}, \quad (4.16)$$

и разложение (1.12), (3.1) для полусемейства $\mathcal{G}_1^{(1)}1+$ имеет вид

$$y = cx^2 + \sum_{k \in \mathbf{K}(k_1)} c_k x^k, \quad (4.17)$$

где $c = \sqrt{a^{-1}}, c_{k_1}$ — произвольный постоянный коэффициент и все остальные коэффициенты c_k постоянны и однозначно определены.

Если выполнено равенство (4.15), то $\mathbf{K}(k_1) = \mathbf{K}$, но разложение (1.12), (3.5) для полусемейства $\mathcal{G}_1^{(1)}1+$ содержит логарифмы для β_k с $k \geq 4 + 2l = k_1$, где l из равенства (4.15). При этом коэффициент β_{k_1} содержит произвольную постоянную. Например, при $l = 0$ имеем $a = 6, k_1 = 4$. Поэтому разложение (1.12), (3.5) имеет вид

$$y = cx^2 + \beta x^4 + \dots, \\ y' = 2cx + 4\beta x^3 + \beta' x^4 + \dots, \quad y'' = 2c + 12\beta x^2 + 8\beta' x^3 + \beta'' x^4 + \dots$$

Подставляя эти выражения в (2.1) и приравнявая к нулю коэффициент при x^6 , получаем уравнение для β

$$6\beta' x + \beta'' x^2 = c/2. \quad (4.17')$$

Оно имеет решения

$$\beta = (c/12) \ln x + \check{c},$$

где \check{c} — произвольная постоянная. Следовательно,

$$y = \sqrt{a^{-1}} x^2 + [(\sqrt{a^{-1}}/12) \ln x + \check{c}] x^4 + \dots$$

Теперь вычислим β , применяя замечание 3.1. Подставим $y = cx^2$ в уравнение (2.1) и выделим коэффициент при x^6 , ибо здесь $v = 2$ и $k = 4$, т.е. $k + v = 6$. Получаем $\theta_4 = c^2$. Согласно (2.16') при $a = 6$

$$\nu(k) = -2c[k^2 - 3k - 4],$$

т.е. $\nu'(k) = -2c(2k - 3)$, $\nu''(k) = -4c$. При $k = 4$ формула (3.7) принимает вид

$$\nu(4)\beta_4 + \nu'(4)\dot{\beta}_4 + \frac{1}{2}\nu''(4)\ddot{\beta}_4 + c^2 = 0,$$

т.е. $-10c\dot{\beta}_4 - 2\ddot{\beta}_4 = c^2$, что согласно (4.9') аналогично (4.17'). Здесь $\lambda(4) = 0$, $\mu(4) = 1$ и $\lambda + \mu = 1$. По лемме 3.2 многочлен $\beta_4(\xi)$ имеет первую степень, т.е. $\dot{\beta}_4 = 0$.

Итак, при $a > 0$ полусемейство $\mathcal{G}_1^{(1)}1+$, если не выполнено ни одно из равенств (4.15), состоит из разложений (4.17), (4.16), где постоянный коэффициент c_{k_1} произволен, а если выполнено одно из равенств (4.15), то оно состоит из разложений (1.12), (3.5), где $k = 4 + 2l$, $l = 0, 1, 2, \dots$. Полусемейство $\mathcal{G}_1^{(1)}2+$ устроено аналогично, оно получается из полусемейства $\mathcal{G}_1^{(1)}1+$ заменой $\sqrt{a^{-1}}$ на $-\sqrt{a^{-1}}$.

4.6. Семейства $\mathcal{F}_3^{(1)}1$ и $\mathcal{F}_3^{(1)}2$ из (2.19). Для них $r = 1$ и $\omega = 1$, т.е. разложение по убывающим степеням x . Носитель $\mathbf{S}(\tilde{f})$ состоит из точек

$$Q_1, \quad Q_2, \quad Q_4 = (1, 1), \quad Q_5 = (3, 1), \quad Q_7 = (2, 0).$$

Члену $\mathcal{L}(x)z$ соответствует вершина Q_5 . Положим $Q'_i = Q_i - Q_5$, тогда

$$Q'_1 = (-3, 1), \quad Q'_2 = (-1, 1), \quad Q'_4 = (-2, 0), \quad Q'_5 = (0, 0), \quad Q'_7 = (-1, -1).$$

Все эти точки лежат в решетке с базисом $B_1 = (1, 1)$, $B_2 = (2, 0)$. Поэтому множество $\mathbf{K} = \{k = -1 - 2l, l = 0, 1, 2, \dots\}$. Следовательно, разложения (1.12), (3.5) для семейств $\mathcal{G}_3^{(1)}1$ и $\mathcal{G}_3^{(1)}2$ имеют вид

$$y = cx + x^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} c_{-2k} x^{-2k}, \quad (4.18)$$

где $c = \pm 1$ и все c_{-2k} однозначно определены для фиксированного c .

4.7. Сводка результатов. В этом параграфе найдены следующие разложения решений уравнения (2.1).

- I. Двупараметрическое (по c и a) семейство $\mathcal{G}_1^{(0)}1$ степенных разложений (3.1) с показателями (4.6).
- II. Трехпараметрическое (по c , c_1 и a) семейство $\mathcal{G}_1^{(0)}2$ степенно-логарифмических разложений (4.10). Если не выполнено равенство (4.7), то это семейство степенных разложений (3.1) с множеством показателей (4.8).
- III. Однопараметрическое (по c) семейство $\mathcal{G}_1^{(0)}3$ степенных разложений (4.11).
- IV. Двупараметрическое (по c и a) семейство $\mathcal{G}_1^{(0)}4$ степенных разложений (1.20), (4.13) с комплексными показателями из множества (4.12) и комплексно-сопряженное ему семейство $\mathcal{G}_1^{(0)}5$.

- V. Два однопараметрических (по $a < 0$) полусемейства $\mathcal{G}_1^{(1)}1-$ и $\mathcal{G}_1^{(1)}2-$ степенных разложений (4.14).
- VI. Два двухпараметрических (по $a > 0$ и c_{k_1}) семейства $\mathcal{G}_1^{(1)}1+$ и $\mathcal{G}_1^{(1)}2+$ степенно-логарифмических разложений (1.12), (3.5). Если не выполнены равенства (4.15), то они состоят из степенных разложений (4.17) с множеством показателей (4.16).
- VII. Два однопараметрических (по a) семейства $\mathcal{G}_3^{(1)}1$ и $\mathcal{G}_3^{(1)}2$ степенных разложений (4.18).

§ 5. Нестепенные асимптотики решений

5.1. Постановка задачи. Пусть $x \rightarrow 0$ или $x \rightarrow \infty$. Две функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ называются *слабо (асимптотически) эквивалентными*, если

$$\psi(x)/\varphi(x) \rightarrow 1.$$

При этом функция $\varphi(x)$ является *слабой асимптотикой* функции $\psi(x)$ и наоборот. Обозначим k -кратные экспоненту и логарифм через $\exp^{(k)} x$ и $\ln^{(k)} x$ соответственно, т.е.

$$\exp^{(k)} x \stackrel{\text{def}}{=} \exp(\exp(\dots(\exp x)\dots)) \quad \text{и} \quad \ln^{(k)} x \stackrel{\text{def}}{=} \ln(\ln(\dots(\ln x)\dots)).$$

ЗАДАЧА 3. Для решений уравнения (1.4), где $f(x, y)$ – дифференциальная сумма, найти все (слабые) асимптотики вида

$$y = cx^r (\exp x)^{s_1} \dots (\exp^{(k)} x)^{s_k} (\ln x)^{t_1} \dots (\ln^{(l)} x)^{t_l}, \quad (5.1)$$

где $c = \text{const} \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$; $r, s_i, t_i = \text{const} \in \mathbb{R}$ или \mathbb{C} .

В § 1 изложен метод вычисления всех степенных асимптотик, т.е. асимптотик вида (1.7). Поэтому здесь сосредоточимся на вычислении всех *нестепенных асимптотик* решений, т.е. не имеющих вида (1.7).

Порядком функции $\varphi(x)$ называется число

$$r = \lim(\ln |\varphi(x)| / \ln |x|) \in [-\infty, +\infty],$$

если предел существует. Очевидно, что слабо эквивалентные функции имеют одинаковый порядок.

Две функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ *сильно (асимптотически) эквивалентны*, если

$$\varphi(x) = \psi(x)[1 + o(|x|^{\omega_\varepsilon} |\psi(x)|^{\omega_{2\varepsilon}})]$$

для некоторого $\varepsilon < 0$, где

$$\omega_2 = \begin{cases} -1, & \text{если } \psi(x) \rightarrow 0, \\ 0, & \text{если } \psi(x) \rightarrow \text{const} \neq 0, \\ 1, & \text{если } \psi(x) \rightarrow \infty. \end{cases}$$

При этом функция $\varphi(x)$ является *сильной асимптотикой* функции $\psi(x)$ и наоборот.

Пусть $y = \varphi(x)$ – решение уравнения (1.4) и функция $\varphi(x)$ имеет порядок r . Тогда *нормальным конусом \mathbf{u} этого решения* является луч

$$\mathbf{u} = \begin{cases} \lambda(0, -1), & \text{если } r = -\infty; \\ \lambda\omega(1, r), & \text{если } r \in \mathbb{R}; \\ \lambda(0, 1), & \text{если } r = +\infty, \lambda > 0. \end{cases}$$

Понятие *конус задачи* применимо и к решениям с так определенным нормальным конусом \mathbf{u} .

ТЕОРЕМА 5.1 [2; гл. VI, теорема 1.1]. *Если решение $y = \varphi(x)$ уравнения (1.4) имеет нормальный конус \mathbf{u} , то укороченное уравнение (1.9), для которого $\mathbf{u} \subset \mathbf{U}_j^{(d)}$, имеет сильно асимптотически эквивалентное решение $y = \psi(x)$.*

Таким образом, задача 3 сводится к нахождению всех укороченных уравнений и их нормальных конусов и к конечному числу следующих задач.

ЗАДАЧА 4. Для укороченного уравнения (1.9) найти все (слабые) асимптотики его решений $y = \psi(x)$ с $(1, r) \in \mathbf{N}_j^{(d)}$. Из этих решений надо оставить только те, у которых $\omega(1, r) \in \mathbf{U}_j^{(d)}$.

Согласно §1 уравнению (1.4) соответствует многоугольник $\Gamma(f)$, а укороченному уравнению (1.9) – его ребро или вершина $\Gamma_j^{(d)}$. Ниже рассмотрим по отдельности четыре способа редукции задачи 4: три для ребра (в зависимости от его наклона) и один для вершины.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Алгебраическое укороченное уравнение (1.9) не имеет подходящих нестепенных решений, т.е. не дает нестепенных асимптотик решений уравнения (1.4).

5.2. Случай вертикального ребра $\Gamma_j^{(1)}$. Если ребро $\Gamma_j^{(1)}$ вертикально, то его нормальный конус

$$\mathbf{U}_j^{(1)} = \lambda\omega(1, 0), \quad \lambda > 0, \quad (5.2)$$

и у всех точек $Q = (q_1, q_2) \in \Gamma_j^{(1)}$ координата q_1 одинакова. Положим

$$g(x, y) = x^{-q_1} \hat{f}_j^{(d)}(x, y), \quad (5.3)$$

тогда носитель $\mathbf{S}(g)$ лежит на координатной оси $q_1 = 0$. Согласно (5.2) все степенные решения (1.7) с $(1, r) \in \mathbf{N}_j^{(1)}$ являются постоянными $y = y^0 = \text{const}$, где y^0 – корень определяющего уравнения

$$\tilde{g}(y) \stackrel{\text{def}}{=} g(0, y) = 0. \quad (5.4)$$

Корень y^0 уравнения (5.4) называется *кратным*, если в нем производная $d\tilde{g}(y)/dy$ равна нулю.

Для отыскания нестепенных решений уравнения (1.9) сделаем *логарифмическое преобразование*

$$\xi \stackrel{\text{def}}{=} \ln x. \quad (5.5)$$

Согласно теореме 2.4 из [2; гл. VI] при этом дифференциальная сумма $g(x, y)$ перейдет в дифференциальную сумму $h(\xi, y) \stackrel{\text{def}}{=} g(x, y)$ и уравнение (1.9) примет вид

$$h(\xi, y) = 0. \quad (5.6)$$

Из (5.5) видно, что $\xi \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow 0$ и при $x \rightarrow \infty$, т.е. для уравнения (5.6) получаем задачу 3 с конусом задачи

$$p_1 \geq 0. \quad (5.7)$$

ТЕОРЕМА 5.2. *Конечные предельные значения $y^0 \neq 0$ непостоянных решений уравнения (5.6) являются кратными решениями уравнения (5.4).*

Пусть ребро $\Gamma_j^{(1)}$ соединяет вершины $\Gamma_{j-1}^{(0)} = (q'_1, q'_2)$ и $\Gamma_j^{(0)} = (q''_1, q''_2)$, где целые $q'_2 < q''_2$. Будем говорить, что уравнение (5.4) имеет *бесконечный корень*, если степень многочлена в (5.4) меньше q''_2 ; и имеет *нулевой корень*, если u многочлена в (5.4) наименьшая степень по y больше q'_2 .

ТЕОРЕМА 5.3. *Если уравнение (5.4) не имеет бесконечного (нулевого) корня, то уравнение (5.6) не имеет решений, стремящихся к бесконечности (нулю).*

Следовательно, если уравнение (5.4) не имеет кратных корней, а также бесконечного и нулевого корней, то уравнение (1.9) не имеет подходящих нестепенных решений, т.е. преобразование (5.5) и дальнейшие исследования делать не нужно. В противном случае надо сделать преобразование (5.5) и рассмотреть уравнение (5.6).

Заметим, что укорочение уравнения (5.6) относительно вектора $(1, 0)$ является уравнением (5.4), т.е. $\tilde{g}(y) \equiv \hat{h}(\xi, y)$. Для нахождения решений уравнения (5.6) с бесконечными и нулевыми предельными значениями y надо для уравнения (5.6) выделить укороченные уравнения, соответствующие конусу задачи (5.7). Для нахождения решений уравнения (5.6) с конечными предельными значениями надо найти все кратные корни уравнения (5.4). Пусть y^0 – такой кратный корень. Тогда параллельным сдвигом $y = y^0 + z$ надо поместить его в начало координат. Уравнение (5.6) примет вид

$$\tilde{h}(\xi, z) \stackrel{\text{def}}{=} h(\xi, y^0 + z) = 0. \quad (5.8)$$

Теперь для уравнения (5.8) надо выделять его укороченные уравнения с конусом задачи $p_1 \geq 0, p_2 \leq 0$. Это опять задача 3.

Итак, для вертикального ребра здесь был описан один шаг, позволяющий найти все степенные решения уравнения (1.9) и для нахождения нестепенных асимптотик его решений сводящий задачу 4 к конечному числу задач 3.

5.3. Случай наклонного ребра $\Gamma_j^{(1)}$. Пусть вектор $(1, r)$ с $r \neq 0$ является нормальным к ребру $\Gamma_j^{(1)}$.

ТЕОРЕМА 5.4 [2; гл. VI, теорема 2.2]. *Степенное преобразование*

$$y = zx^r \quad (5.9)$$

приводит уравнение (1.9) к виду

$$\tilde{f}(x, z) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{f}_j^{(1)}(x, zx^r) = 0,$$

где $\tilde{f}(x, z)$ – дифференциальная сумма и ее носитель $\mathbf{S}(\tilde{f})$ расположен на вертикали $q_1 = \text{const}$.

Таким образом, степенным преобразованием (5.9) случай наклонного ребра сводится к случаю вертикального ребра. Если в укороченное уравнение (1.9) подставить $y = cx^r$, то для коэффициента c получается уравнение

$$x^s \tilde{f}(c) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{f}_j^{(1)}(x, cx^r) = 0, \quad (5.10)$$

где $\tilde{f}(c)$ – многочлен от коэффициента c . Здесь он играет ту же роль, что и многочлен $\tilde{g}(y)$ из уравнения (5.4). В частности, если этот многочлен не имеет бесконечно-го, нулевого и кратных корней, то уравнение (1.9) не имеет подходящих нестепенных решений, т.е. преобразование (5.9) и дальнейшее исследование делать не надо.

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Если ребро $\Gamma_j^{(1)}$ не горизонтально, соответствующее ему определяющее уравнение $\tilde{f}(c) = 0$ не имеет кратных корней $c \neq 0$ и число r не является корнем характеристических уравнений для обеих вершин ребра $\Gamma_j^{(1)}$, где $N_j = (1, r)$ – нормаль к ребру $\Gamma_j^{(1)}$, то ребру $\Gamma_j^{(1)}$ не соответствуют нестепенные асимптотики.

5.4. Случай горизонтального ребра $\Gamma_j^{(1)}$. В этом случае у всех точек $Q = (q_1, q_2)$ ребра $\Gamma_j^{(1)}$ координата q_2 одинакова. Положим

$$g(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} y^{-q_2} \hat{f}_j^{(1)}(x, y) \quad (5.11)$$

и сделаем логарифмическое преобразование

$$\eta = d \ln y / dx. \quad (5.12)$$

Согласно теореме 2.4 из [2; гл. VI] при этом преобразовании дифференциальная сумма $g(x, y)$ перейдет в дифференциальную сумму $h(x, \eta) \stackrel{\text{def}}{=} g(x, y)$ и уравнение (1.9) примет вид

$$h(x, \eta) = 0. \quad (5.13)$$

Теперь для уравнения (5.13) получаем задачу 3 с конусом задачи

$$p_1 + p_2 \geq 0.$$

Сумму порядков всех производных, входящих в дифференциальный моном $a(x, y)$, назовем *суммарным порядком дифференцирования монома $a(x, y)$* и обозначим $\Delta(a)$. Для дифференциальной суммы (1.3) суммарный порядок дифференцирования

$$\Delta(f) = \max_i \Delta(a_i).$$

Пусть Ω_j – степень характеристического многочлена $\chi_j(r)$ вершины $\Gamma_j^{(0)}$. Пусть ребро $\Gamma_j^{(1)}$ соединяет вершины $\Gamma_{j-1}^{(0)} = (q'_1, q'_2)$ и $\Gamma_j^{(0)} = (q''_1, q'_2)$ с $q'_1 < q''_1$.

ТЕОРЕМА 5.5. Если $\Omega_{j-1} = \Delta(\hat{f}_{j-1}^{(0)}) = \Delta(\hat{f}_j^{(1)})$ (или $\Omega_j = \Delta(\hat{f}_j^{(0)}) = \Delta(\hat{f}_j^{(1)})$), то уравнение (5.13) не имеет подходящих решений при $x \rightarrow 0$ (или $x \rightarrow \infty$).

Следовательно, если $\Omega_{j-1} = \Delta(\hat{f}_{j-1}^{(0)}) = \Delta(\hat{f}_j^{(1)}) = \Delta(\hat{f}_j^{(0)}) = \Omega_j$, то преобразование (5.12) и дальнейшее исследование делать не надо.

5.5. Случай вершины $\Gamma_j^{(0)}$. Пусть $\Gamma_j^{(0)} = \{Q\}$. Положим

$$g(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} X^{-Q} \hat{f}_j^{(0)}(x, y), \quad (5.14)$$

тогда $\mathbf{S}(g) = \{0\}$. Степенные решения $y = cx^r$ уравнения $g(x, y) = 0$ имеют произвольную постоянную c и показатель r , удовлетворяющий характеристическому уравнению

$$\chi(r) \stackrel{\text{def}}{=} g(x, x^r) = 0. \quad (5.15)$$

Для нахождения нестепенных решений сделаем логарифмическое преобразование

$$\xi = \ln x, \quad \eta = d \ln y / d \ln x. \quad (5.16)$$

Согласно теореме 2.4 из [2; гл. VI] при этом дифференциальная сумма $g(x, y)$ перейдет в дифференциальную сумму $h(\xi, \eta) \stackrel{\text{def}}{=} g(x, y)$ и уравнение (1.9) примет вид

$$h(\xi, \eta) = 0. \quad (5.17)$$

Из (5.16) видно, что $\xi \rightarrow \infty$, т.е. $p_1 \geq 0$. Таким образом, для уравнения (5.17) получаем задачу 3 с конусом задачи $p_1 \geq 0$, $p_1 + p_2 \geq 0$. Теперь заметим, что согласно (5.16) степенному решению (1.7) уравнения (1.9) соответствует постоянное решение

$$\eta = r = \text{const} \quad (5.18)$$

уравнения (5.17).

ТЕОРЕМА 5.6. Конечные предельные значения $\eta^0 \neq 0$ непостоянных решений уравнения (5.17) являются кратными корнями уравнения (5.15).

Пусть $\Delta(g(x, y)) = k$. Обозначим через $g^*(x, y)$ сумму всех тех дифференциальных мономов суммы $g(x, y)$, у которых суммарный порядок дифференцирования равен k , т.е. максимален в $g(x, y)$. Через $\text{coef}(g^*)$ обозначим сумму всех числовых коэффициентов в дифференциальных мономах суммы $g^*(x, y)$.

ТЕОРЕМА 5.7. Если дифференциальная сумма $g(x, y)$ из (5.14) содержит ненулевую постоянную (или для нее $\text{coef}(g^*) \neq 0$), то уравнение (5.17) не имеет решений, стремящихся к нулю (или к бесконечности).

СЛЕДСТВИЕ 5.2. Пусть характеристический многочлен $\chi_j(r)$ для вершины $\Gamma_j^{(0)}$ не имеет таких кратных корней r , для которых хотя бы один из векторов $\pm(1, r)$ лежит в нормальном конусе $\mathbf{U}_j^{(0)}$, и если один из векторов $\pm(0, 1)$ лежит в $\mathbf{U}_j^{(0)}$, то $\Omega_j = \Delta(\hat{f}_j^{(0)})$, т.е. многочлен $\chi_j(r)$ не имеет бесконечного корня. Тогда вершине $\Gamma_j^{(0)}$ не соответствуют нестепенные асимптотики.

Следовательно, если для $\hat{f}_j^{(0)}(x, y)$ характеристическое уравнение не имеет кратных корней, сумма $g(x, y)$ имеет ненулевой свободный член и $\text{coef}(g^*) \neq 0$, то уравнение (1.9) не имеет подходящих нестепенных решений.

Заметим, что укорочение уравнения (5.17) относительно вектора $(1, 0)$ является уравнением (5.15), т.е. $\chi(\eta) \equiv \hat{h}(\xi, \eta)$. Для нахождения решений уравнения (5.17) с бесконечными и нулевыми предельными значениями надо для уравнения (5.17) выделять укороченные уравнения, у которых нормальный конус пересекается с конусом задачи $p_1 \geq 0, p_1 + p_2 \geq 0$ и т. д. Для нахождения решений уравнения (5.17) с конечными ненулевыми предельными значениями надо найти все кратные корни уравнения (5.15). Пусть η^0 – такой корень. Параллельным переносом $\eta = \eta^0 + \zeta$ надо поместить его в начало координат. Уравнение (5.17) примет вид

$$\tilde{h}(\xi, \zeta) \stackrel{\text{def}}{=} h(\xi, \eta^0 + \zeta) = 0. \quad (5.19)$$

Теперь надо выделять укорочения уравнения (5.19) с конусом задачи $p_1 \geq 0, p_2 \leq 0$. Это опять задача 3.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Доказательства теорем 5.2–5.7 основаны на рассмотрении спецификации многоугольника $\Gamma(h)$, получающегося после логарифмического преобразования. При этом преобразования (5.12) и (5.16) удобнее делать в два этапа: сначала ввести логарифм $w = \ln y$ зависимой переменной y , а затем ввести его производную $\eta = dw/dx$ в (5.12) и $\eta = dw/d\xi$ в (5.16). Кроме того, этим способом легко доказать, что после преобразования (5.12) или (5.16) конус задачи лежит в множестве $p_1 + p_2 \geq 0$.

5.6. Последовательность редукций. Итак, в пп. 5.2–5.5 был описан один шаг, позволяющий найти все степенные асимптотики решений уравнения (1.4) и для нахождения нестепенных асимптотик сводящий задачу 3 к конечному числу задач 3 для преобразованных уравнений вида (1.4). Каждая из них имеет конечное число задач 4 для укороченных уравнений вида (1.9).

ТЕОРЕМА 5.8. Через конечное число таких шагов получается укороченная система, имеющая только степенные подходящие решения.

Последовательность таких вычислений состоит в том, что по исходному уравнению (1.4) вычисляется многоугольник $\Gamma(f)$, его грани $\Gamma_j^{(d)}$ и соответствующие укороченные уравнения (1.9). Согласно теореме 5.1 точное решение укороченного уравнения (1.9) является сильной асимптотикой решений исходного уравнения (1.4). Сначала находим все семейства $\mathcal{F}_j^{(d)}$ k степенных решений уравнения (1.9). Вблизи каждого невырожденного семейства $\mathcal{F}_j^{(d)}$ k методами §3 можно получить семейство $\mathcal{G}_j^{(d)}$ k степенно-логарифмических разложений решений исходного уравнения (1.4). Согласно

теоремам 5.2–5.7 укороченное уравнение (1.9) может иметь подходящие нестепенные решения только вблизи семейств $\mathcal{F}_j^{(d)} k$, соответствующих кратным корням определяющего уравнения $\tilde{f}(c) = 0$ или характеристического уравнения $\chi(r) = 0$, а также вблизи их нулевого корня (что обозначим через $\mathcal{F}_j^{(d)} 0$) и вблизи их бесконечного корня (что обозначим через $\mathcal{F}_j^{(d)} \infty$). Если согласно теоремам 5.2–5.7 такие решения могут быть, то после соответствующих степенного преобразования, логарифмического преобразования и сдвига из уравнения (1.9) для каждого случая $\mathcal{F}_j^{(d)} k$ получаем свою задачу 3 со своим уравнением $\tilde{h}(\xi, \eta) = 0$, своим многоугольником $\tilde{\Gamma} = \Gamma(\tilde{h})$ и своим конусом задачи. Пусть $\tilde{\Gamma}_{j_1}^{(d_1)}$ – грань этого многоугольника. Соответствующие ей семейства степенных решений обозначим как $\mathcal{F}_j^{(d)} k \mathcal{F}_{j_1}^{(d_1)} k_1$. Каждому такому семейству соответствует семейство $\mathcal{F}_j^{(d)} k \mathcal{G}_{j_1}^{(d_1)} k_1$ разложений решений уравнения $\tilde{h}(\xi, \eta) = 0$. Ему соответствуют семейство нестепенных решений уравнения (1.9) и семейство нестепенных асимптотик решений исходного уравнения (1.4), для которых будем использовать те же обозначения. Эту процедуру можно продолжать и получать семейства вида

$$\mathcal{F}_j^{(d)} k \mathcal{F}_{j_1}^{(d_1)} k_1 \cdots \mathcal{F}_{j_{l-1}}^{(d_{l-1})} k_{l-1} \mathcal{F}_{j_l}^{(d_l)} k_l \quad (5.20)$$

и вида

$$\mathcal{F}_j^{(d)} k \mathcal{F}_{j_1}^{(d_1)} k_1 \cdots \mathcal{F}_{j_{l-1}}^{(d_{l-1})} k_{l-1} \mathcal{G}_{j_l}^{(d_l)} k_l, \quad (5.21)$$

где k и k_i принимают значения из множества $\{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Если проделать обратные преобразования и вернуться к исходным координатам x, y , то при $l = 1$ семейство (5.20) дает слабые асимптотики вида (5.1), а семейство (5.21) – сильные. Вообще семейства (5.20) дают выражения вида (5.1). При $l > 1$ они являются слабыми асимптотиками для $\ln^{(l-1)} y$. Согласно теореме 5.8 число l в семействах (5.20) и (5.21) не превосходит некоторой константы, определяемой исходным уравнением (1.4). При этом чем больший отрезок разложения семейства $\mathcal{G}_{j_l}^{(d_l)} k_l$ в (5.21) удастся вычислить, тем точнее будет найдена асимптотика решений исходного уравнения (1.4).

ЗАМЕЧАНИЕ 5.3. Степенные и логарифмические преобразования, описанные в этом параграфе, сильно упрощают уравнение. Может случиться, что преобразованное уравнение решается в явном виде [6]. В этом случае можно не вычислять разложения его решений.

§ 6. Примеры вычисления нестепенных асимптотик

Рассмотрим уравнение (2.1) и найдем нестепенные асимптотики его решений, соответствующие вершинам $\Gamma_j^{(0)}$ и ребрам $\Gamma_j^{(1)}$.

6.1. Вершина $\Gamma_1^{(0)}$ (п. 2.2). Ей соответствует укороченное уравнение (2.5) и $\Gamma_1^{(0)} = (0, 2)$. Действуем согласно п. 5.6. Положим

$$g(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} y^{-2} \hat{f}_1^{(0)}(x, y) = x^2 y^{-2} y'^2 - 2x^2 y^{-1} y'' + a = 0. \quad (6.1)$$

Характеристическое уравнение (2.6) имеет кратные корни ($r_{1,2} = 1$) только при $a = -1$. Для суммы $g(x, y)$ из (6.1) имеем $\Delta(g) = 2$, $g^* = x^2 y^{-2} y'^2 - 2x^2 y^{-1} y''$,

$\text{coef}(g^*) = 1 - 2 = -1 \neq 0$. В сумме $g(x, y)$ из (6.1) постоянная (свободный член) равна a . Согласно теоремам 5.6 и 5.7 при $a \neq -1$ и $a \neq 0$ уравнение (6.1) не имеет подходящих нестепенных решений, но при $a = -1$ и при $a = 0$ могут быть такие решения.

Логарифмическое преобразование (5.16) сделаем по частям. Сначала положим $\xi = \ln x$ и производную по ξ будем обозначать точкой: $dy/d\xi \stackrel{\text{def}}{=} \dot{y}$. Тогда

$$y' = \dot{y}x^{-1}, \quad y'' = (\ddot{y} - \dot{y})x^{-2}. \quad (6.2)$$

Уравнение (6.1) принимает вид

$$y^{-2}\dot{y}^2 - 2y^{-1}(\ddot{y} - \dot{y}) + a = 0. \quad (6.3)$$

Теперь положим $\eta = (\ln y) = d \ln y / d\xi$. Тогда

$$\dot{y} = \eta y, \quad \ddot{y} = \dot{\eta} y + \eta^2 y. \quad (6.4)$$

Уравнение (6.3) принимает вид

$$h(\xi, \eta) \stackrel{\text{def}}{=} \eta^2 - 2(\dot{\eta} + \eta^2 - \eta) + a = 0$$

или

$$h(\xi, \eta) \stackrel{\text{def}}{=} -2\dot{\eta} + 2\eta - \eta^2 + a = 0 \quad (6.5)$$

с конусом задачи

$$p_1 \geq 0, \quad p_1 + p_2 \geq 0. \quad (6.6)$$

Теперь по отдельности рассмотрим два случая $a = -1$ и $a = 0$.

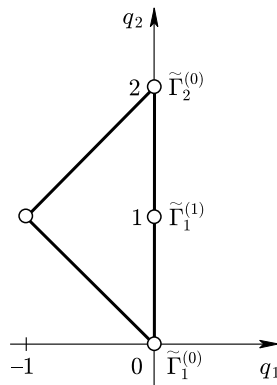


Рис. 8.

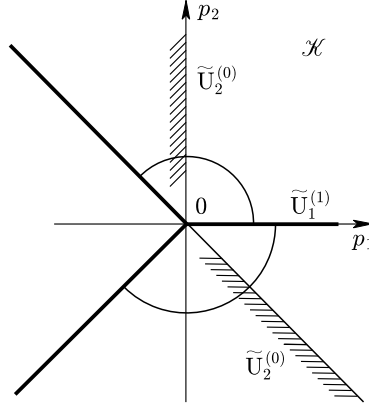


Рис. 9.

Если $a = -1$, то носитель и многоугольник уравнения (6.5) показаны на рис. 8, а нормальные конусы и конус задачи (6.6) – на рис. 9. Из него видно, что с конусом задачи (6.6) пересекаются только нормальные конусы $U_1^{(0)}$, $U_2^{(0)}$ и $U_1^{(1)}$. Однако укороченные уравнения $\hat{h}_1^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} -1 = 0$ и $\hat{h}_2^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} -\eta^2 = 0$ не имеют подходящих решений. Следовательно, уравнение (6.5) не имеет подходящих решений с $\eta \rightarrow \infty$ и $\eta \rightarrow 0$. Наконец, уравнение $\hat{h}_1^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} 2\eta - \eta^2 - 1 = 0$ имеет кратное решение

$$\eta^0 = 1, \quad (6.7)$$

которое согласуется с (2.7).

Сделаем параллельный перенос

$$\eta = 1 + \zeta. \quad (6.8)$$

Тогда уравнение (6.5) при $a = -1$ примет вид

$$\tilde{h}(\xi, \zeta) \stackrel{\text{def}}{=} -2\zeta - \zeta^2 = 0. \quad (6.9)$$

Это уравнение имеет тривиальное решение

$$\zeta = 0. \quad (6.10)$$

Носитель уравнения (6.9) состоит из двух точек $(-1, 1)$, $(0, 2)$. Их выпуклая оболочка – это отрезок с нормальным вектором $(1, -1)$. Поэтому будем искать степенное решение уравнения (6.9) в виде $\zeta = \tilde{c}\xi^{-1}$. Подставляя это выражение в (6.9) и сокращая на ξ^{-2} , получаем алгебраическое уравнение $2\tilde{c} - \tilde{c}^2 = 0$. Следовательно, $\tilde{c} = 2$ и уравнение (6.9) имеет еще степенное решение

$$\zeta = 2\xi^{-1}. \quad (6.11)$$

Возвращаясь по преобразованиям (6.8) и (5.16) к исходным координатам x, y , получаем из решений (6.10) и (6.11) решения (2.9) и

$$y = cx(\ln x)^2, \quad 0 \neq c = \text{const} \in \mathbb{C}. \quad (6.12)$$

Эту слабую асимптотику вида $\mathcal{F}_1^{(0)} \mathfrak{Z} \mathcal{F}_1^{(1)} 1$ можно еще уточнять, вычисляя для уравнения (6.9) решения, отличные от (6.10) и (6.11). Это можно сделать двумя способами:

а) вычисляя степенное разложение решений по убывающим степеням ξ , начинающееся с (6.11),

$$\zeta = 2\xi^{-1} + \sum_{k=2}^{\infty} \tilde{c}_k \xi^{-k},$$

получаем сильную асимптотику вида $\mathcal{F}_1^{(0)} \mathfrak{Z} \mathcal{G}_1^{(1)} 1$; это оставляем для читателя как упражнение;

б) решая уравнение (6.9) в явном виде с помощью разделения переменных, получаем $\zeta = 2(\xi + \tilde{c})^{-1}$, где \tilde{c} – произвольная постоянная. Согласно (6.8) и (5.16) получаем

$$y = cx(\ln x + \tilde{c})^2, \quad (6.13)$$

т.е. двухпараметрическое семейство асимптотик в конечном виде, уточняющее однопараметрическое семейство нестепенных асимптотик (6.12) (ср. с замечанием 5.3).

Если $a = 0$, то многоугольник уравнения (6.5) является треугольником. С конусом задачи (6.6) пересекаются только нормальные конусы укорочений $\hat{h} = 2\eta$, $\hat{h} = -\eta^2$ и $\hat{h} = 2\eta - \eta^2$, соответствующих двум вершинам и одному ребру. Соответствующие укороченные уравнения не имеют подходящих решений.

Вершинам $\Gamma_2^{(0)}$ и $\Gamma_3^{(0)}$ соответствуют алгебраические укороченные уравнения. Согласно замечанию 5.1 они не дают нестепенных асимптотик.

6.2. Ребро $\Gamma_1^{(1)}$ (п. 2.3). Ему соответствует укороченное уравнение (2.14). Действуем сначала согласно п. 5.3. Определяющим уравнением (5.10) здесь является уравнение (2.15). Оно не имеет нулевого корня и конечных кратных корней. Но имеет бесконечный (двукратный) корень при $a = 0$. Рассмотрим этот случай подробнее. Нормальным к ребру $\Gamma_1^{(1)}$ является вектор (1, 2). Поэтому степенное преобразование (5.9) есть

$$y = x^2 z. \quad (6.14)$$

Поскольку

$$y' = 2xz + x^2 z', \quad y'' = 2z + 4xz' + x^2 z'',$$

то уравнение (2.14) при $a = 0$ принимает вид

$$\tilde{f}(x, z) = x^4[(2z + xz')^2 - 2z(2z + 4xz' + x^2 z'') - 1] = 0.$$

После сокращения на x^4 и приведения подобных членов получаем уравнение

$$g(x, z) \stackrel{\text{def}}{=} x^2 z'^2 - 2x^2 z z'' - 4x z z' - 1 = 0. \quad (6.15)$$

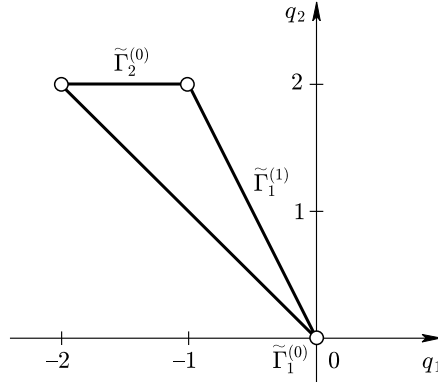


Рис. 10.

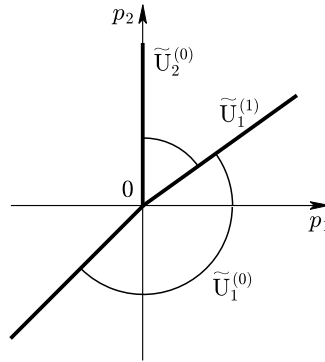


Рис. 11.

Теперь действуем согласно п. 5.2. Делаем логарифмическое преобразование (5.5). Согласно (6.2) с заменой y на z уравнение (6.15) принимает вид

$$h(\xi, z) \stackrel{\text{def}}{=} z^2 - 2z\dot{z} - 2z\dot{z} - 1 = 0. \quad (6.16)$$

Здесь конус задачи есть $p_1 \geq 0$, ибо $\xi \rightarrow \infty$, и разложение решения $z(\xi)$ должно быть по убывающим степеням ξ . Носитель и многоугольник $\tilde{\Gamma}$ уравнения (6.16) показаны на рис. 10. Нормальные конусы показаны на рис. 11. С конусом задачи $p_1 \geq 0$ пересекаются три нормальных конуса $\tilde{U}_1^{(0)}$, $\tilde{U}_2^{(0)}$ и $\tilde{U}_1^{(1)}$. Но укороченное уравнение $\hat{h}_1^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} -1 = 0$, соответствующее вершине $\tilde{\Gamma}_1^{(0)} = 0$, не имеет решений. Укороченное уравнение $\hat{h}_2^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} -2z\dot{z} = 0$, соответствующее вершине $\tilde{\Gamma}_2^{(0)} = (-1, 2)$, имеет решение $z = \text{const}$ с нормальным вектором $(1, 0)$, который не пересекается с нормальным конусом $\tilde{U}_2^{(0)}$. Следовательно, это решение не годится. Ребру $\tilde{\Gamma}_1^{(1)}$ соответствует укороченное уравнение

$$\hat{h}_1^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} -2z\dot{z} - 1 = 0. \quad (6.17)$$

Поскольку нормальный вектор к ребру $\tilde{\Gamma}_1^{(1)}$ есть $(1, 1/2)$, то для уравнения (6.17) ищем степенное решение вида

$$z = \tilde{c} \xi^{1/2}. \quad (6.18)$$

Подставляя его в уравнение (6.17), получаем определяющее уравнение $-\tilde{c}^2 - 1 = 0$. Оно имеет два корня

$$\tilde{c}_{1,2} = \pm i. \quad (6.19)$$

Согласно (6.14), (5.5), (6.18), (6.19) получаем две слабые нестепенные асимптотики

$$y = \pm i x^2 (\ln x)^{1/2} \quad (6.20)$$

вида $\mathcal{F}_1^{(1)} \propto \mathcal{F}_1^{(1)} k$, $k = 1, 2$. Вычислим собственные значения решения (6.18) уравнения (6.17). Производная Фреше

$$\frac{\delta \hat{h}_1^{(1)}}{\delta z} = -2z \frac{d}{d\xi} - 2z.$$

На решении (6.18) она дает оператор

$$\mathcal{L}(\xi) = -\frac{\tilde{c}}{\xi^{1/2}} \left(2 \frac{d}{d\xi} + 1 \right). \quad (6.21)$$

Следовательно, $\nu(k) = -\tilde{c}(2k+1)$, и решение (6.18), (6.19) имеет собственное значение $k_1 = -1/2$. Поскольку $k_1 < 1/2$, то k_1 является критическим значением. Если в уравнении (6.16) сделать замену

$$z = \tilde{c} \xi^{1/2} + u, \quad (6.22)$$

то получим уравнение $\tilde{h}(\xi, u) \stackrel{\text{def}}{=} h(\xi, z) = 0$ с носителем, состоящим из пяти точек:

$$\tilde{Q}_1 = (-2, 2), \quad \tilde{Q}_2 = (-1, 2), \quad \tilde{Q}_3 = (-3/2, 1), \quad \tilde{Q}_4 = (-1/2, 1), \quad \tilde{Q}_5 = (-1, 0)$$

(рис. 12). Согласно (6.21), члену $\mathcal{L}(\xi)u$ в \tilde{h} соответствует точка \tilde{Q}_4 . Положим $\tilde{Q}'_i = \tilde{Q}_i - \tilde{Q}_4$, $i = 1, \dots, 5$. Все эти точки \tilde{Q}'_i лежат в решетке \mathbf{Z} с базисом $B_1 = (1, 0)$ и $B_2 = (1/2, 1)$. Точка $(k_1, -1)$ также лежит в этой решетке. С множеством $q_1 < 1/2$ на прямой $q_2 = -1$ решетка \mathbf{Z} пересекается по точкам $q_1 = -1/2 - l$, где целое $l \geq 0$. Следовательно, разложение решения уравнения (6.16) имеет вид

$$z = \tilde{c} \xi^{1/2} + \beta \xi^{-1/2} + \xi^{-1/2} \sum_{l=1}^{\infty} \beta_l \xi^{-l}, \quad (6.23)$$

где β и β_l суть многочлены от $\ln \xi$. Вычислим функцию $\beta(\ln \xi)$. Дифференцируя (6.23) по ξ , получаем

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \frac{1}{2} \tilde{c} \xi^{-1/2} + \dot{\beta} \xi^{-1/2} - \frac{1}{2} \beta \xi^{-3/2} + \dots, \\ \ddot{z} &= -\frac{1}{4} \tilde{c} \xi^{-3/2} + \ddot{\beta} \xi^{-1/2} - \dot{\beta} \xi^{-3/2} + \frac{3}{4} \beta \xi^{-5/2} + \dots. \end{aligned}$$

Подставим (6.23) и эти разложения в уравнение (6.16) и выпишем члены степеней 0 и -1 по ξ . Получаем

$$\frac{1}{4}\tilde{c}^2 \xi^{-1} - \tilde{c}^2 + 2\tilde{c} \left(\dot{\beta} - \frac{1}{2}\beta \xi^{-1} \right) + \tilde{c} \beta \xi^{-1} - \frac{1}{2}\tilde{c}^2 \xi^{-1} - 1 = 2\tilde{c}\dot{\beta} - \frac{1}{4}\tilde{c}^2 \xi^{-1}.$$

Приравнявая коэффициент при ξ^{-1} к нулю, получаем, что $\dot{\beta} = (\tilde{c}/8) \xi^{-1}$. Следовательно,

$$\beta = (\tilde{c}/8) \ln \xi + \text{const.} \quad (6.24)$$

Согласно (6.14) и (5.5) разложению (6.23), (6.24) в исходных координатах соответствуют два однопараметрических семейства $\mathcal{F}_1^{(1)} \propto \tilde{\mathcal{G}}_1^{(1)} k$, $k = 1, 2$, асимптотик

$$y = \pm x^2 (\ln x)^{1/2} \left[i + \left(\frac{i}{8} \ln \ln x + \tilde{c} \right) (\ln x)^{-1} + \dots \right], \quad (6.25)$$

где \tilde{c} – произвольная постоянная, которые уточняют асимптотики (6.20). Похожие вычисления асимптотик встретились в гидродинамической задаче [33; лемма 2].

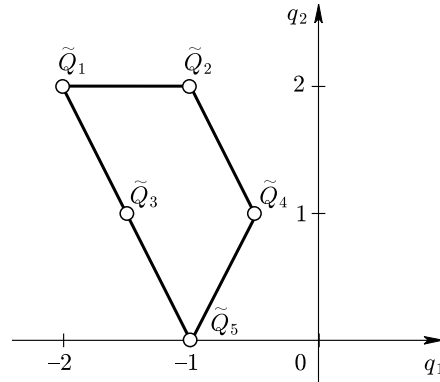


Рис. 12.

6.3. Ребро $\Gamma_2^{(1)}$ (п. 2.4). Ему соответствует укороченное уравнение (2.17). Действуем согласно п. 5.4. Ребро $\Gamma_2^{(1)}$ расположено между вершинами $\Gamma_1^{(0)}$ и $\Gamma_2^{(0)}$, которым соответствуют укороченные уравнения (2.5), и $\hat{f}_2^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} x^2 y^2 = 0$. Следовательно, порядки дифференцирования суть

$$\Delta(\hat{f}_1^{(0)}) = \Delta(\hat{f}_2^{(1)}) = 2, \quad \Delta(\hat{f}_2^{(0)}) = 0.$$

По теореме 5.5 укороченное уравнение (2.17) не имеет подходящих решений при $x \rightarrow 0$, но может иметь их при $x \rightarrow \infty$. Найдем их. У всех точек $Q = (q_1, q_2)$ ребра $\Gamma_2^{(1)}$ координата $q_2 = 2$. Согласно (5.11) положим

$$g(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} y^{-2} \hat{f}_2^{(1)}(x, y).$$

Сделаем преобразование (5.12). Тогда согласно (6.4) уравнение (2.17) перейдет в уравнение вида (5.13):

$$h(x, \eta) \stackrel{\text{def}}{=} -2x^2\eta' - x^2\eta^2 + a + x^2 = 0 \tag{6.26}$$

с конусом задачи $p_1 + p_2 \geq 0$. Носитель $\mathbf{S}(h)$ и многоугольник $\Gamma(h)$ показаны на рис. 13, а нормальные конусы – на рис. 14. Каждой вершине соответствует укорочение \hat{h} , состоящее из одного обычного монома. Поэтому согласно замечанию 1.1 вершины не интересны. Что касается ребер, то согласно рис. 14 с конусом задачи $p_1 + p_2 \geq 0$ пересекаются только нормальные конусы $\tilde{U}_1^{(1)}$ и $\tilde{U}_2^{(1)}$ ребер $\tilde{\Gamma}_1^{(1)}$ и $\tilde{\Gamma}_2^{(1)}$. Рассмотрим их по отдельности.

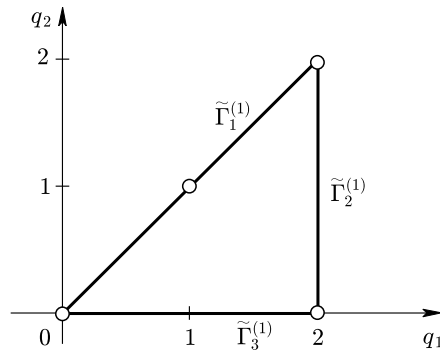


Рис. 13.

Ребру $\tilde{\Gamma}_1^{(1)}$ соответствует нормальный конус

$$\tilde{U}_1^{(1)} = \{P = \lambda(-1, 1), \lambda > 0\} \tag{6.27}$$

(см. рис. 14). Поскольку в нем $p_1 < 0$, то $x \rightarrow 0$, но по теореме 5.5 нет подходящих решений с $x \rightarrow 0$. Поэтому ребру $\tilde{\Gamma}_1^{(1)}$ не соответствуют подходящие решения.

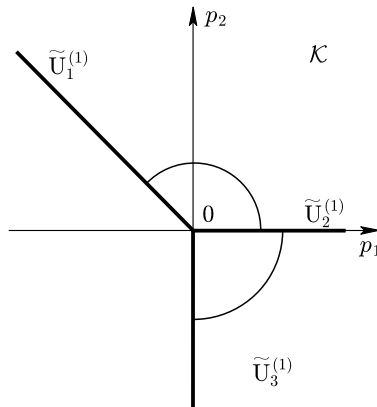


Рис. 14.

Ребру $\tilde{\Gamma}_2^{(1)}$ соответствует укороченное уравнение

$$\hat{h}_2^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} -x^2 \eta^2 + x^2 = 0 \quad (6.28)$$

и нормальный конус $p_1 > 0, p_2 = 0$ (рис. 14). Уравнение (6.28) имеет два решения

$$\eta_{1,2}^0 = \pm 1. \quad (6.29)$$

Согласно (5.12) им соответствуют два однопараметрических семейства $\mathcal{F}_2^{(1)} \infty \mathcal{F}_2^{(1)k}$, $k = 1, 2$, слабых асимптотик

$$y = c \exp(\pm x), \quad 0 \neq c = \text{const} \in \mathbb{C}. \quad (6.30)$$

Поскольку укороченное уравнение (6.28) алгебраическое, то согласно замечанию 1.2 решения (6.29) не имеют критических чисел и в уравнении (6.26) им соответствуют разложения решений вида

$$\eta = \eta^0 + \sum_{k=2}^{\infty} c_k x^{-k}, \quad (6.31)$$

где все коэффициенты c_k постоянны и однозначно определены значениями η^0 и a . Например, $c_2 = -a/(2\eta^0)$. При $a = 0$ имеем в (6.31) все $c_k = 0$. Разложениям (6.31) соответствуют сильные асимптотики

$$y = c \exp \left[\eta^0 x - \sum_{k=1}^{\infty} (c_{k+1}/k) x^{-k} \right], \quad \eta^0 = \pm 1, \quad x \rightarrow \infty, \quad (6.32)$$

где c произвольно, $c \neq 0$, образующие два двухпараметрических (по c и a) семейства $\mathcal{F}_2^{(1)} \infty \mathcal{G}_2^{(1)k}$, $k = 1, 2$. Они уточняют слабые асимптотики (6.30).

Ребру $\Gamma_3^{(1)}$ соответствует алгебраическое укороченное уравнение (2.18). Согласно замечанию 5.1 оно не дает нестепенных асимптотик.

6.4. Сводка результатов. В этом параграфе найдены следующие нестепенные асимптотики решений уравнения (2.1).

- I. Двухпараметрическое (по c и c_1) семейство $\mathcal{F}_1^{(0)} \mathfrak{z} \mathcal{G}_1^{(1)1}$ асимптотик (6.13).
- II. Два однопараметрических (по \tilde{c}) семейства $\mathcal{F}_1^{(1)} \infty \tilde{\mathcal{G}}_1^{(1)1}$ и $\mathcal{F}_1^{(1)} \infty \tilde{\mathcal{G}}_1^{(1)2}$ асимптотик (6.25).
- III. Два двухпараметрических (по c и a) семейства $\mathcal{F}_2^{(1)} \infty \mathcal{G}_2^{(1)1}$ и $\mathcal{F}_2^{(1)} \infty \mathcal{G}_2^{(1)2}$ асимптотик (6.32).

§ 7. Асимптотически близкие решения

7.1. Постановка задачи. Пусть задано обыкновенное дифференциальное уравнение

$$f(x, y) = 0, \quad (7.1)$$

где $f(x, y)$ – дифференциальная сумма. Каждой грани $\Gamma_j^{(d)}$ многоугольника $\Gamma(f)$ соответствует укороченное уравнение

$$\hat{f}_j^{(d)}(x, y) = 0. \quad (7.2)$$

Пусть $x \rightarrow 0$, тогда $\omega = -1$, или $x \rightarrow \infty$, тогда $\omega = 1$. Степенные решения укороченного уравнения (7.2)

$$y = c_r x^r, \quad c_r = \text{const} \in \mathbb{C}, \quad c_r \neq 0, \quad (7.3)$$

с $\omega(1, r) \in \mathbf{U}_j^{(d)}$ являются степенными асимптотиками решений полного уравнения (7.1). Согласно §1 решению (7.3) уравнения (7.2) соответствуют: оператор

$$\mathcal{L}(x) = \delta \hat{f}_j^{(d)}(x, y) / \delta y \quad \text{на } y = c_r x^r \quad (7.4)$$

и его критические числа

$$k_i, \quad k_i \omega < r \omega, \quad i = 1, \dots, \varkappa. \quad (7.5)$$

Согласно §3 можно продолжить степенную асимптотику (7.3) в виде степенно-логарифмических разложений

$$y = c_r x^r + \sum \beta_s x^s \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(x) \quad (7.6)$$

решений уравнения (7.1), где β_s суть многочлены от $\ln x$ с комплексными коэффициентами, показатели степени $r, s \in \mathbb{R}$ и $\omega s < \omega r$.

ЗАДАЧА 5. Найти все разложения вида

$$\psi(x) = \sum \gamma_s x^s, \quad \omega s < \omega r, \quad (7.7)$$

и вида

$$\psi(x) = \exp \sum \gamma_s x^s, \quad \omega s < \text{const}, \quad (7.8)$$

такие, что сумма $y = \varphi(x) + \psi(x)$ соответствует разложению решений уравнения (7.1). Здесь γ_s суть многочлены от $\ln x$.

7.2. Степенные добавки. Здесь опишем все добавки вида (7.7) к решению (7.6).

ТЕОРЕМА 7.1. *Все добавки (7.7) к решению (7.6) имеют такие показатели s , что $s\omega \leq \omega k_i$, где k_i – критическое число (7.5) степенной асимптотики (7.3). При этом $\gamma_{k_i}(\ln x)$ – произвольный многочлен степени $l_i - 1$, где l_i – кратность критического числа k_i .*

Наличие или отсутствие добавок (7.7) определяется по укороченному уравнению (7.2) и не требует больших вычислений.

7.3. Экспоненциальные добавки. Теперь опишем все добавки (7.8) к решению (7.6). После подстановки $y = \varphi(x) + z$ уравнение (7.1) принимает вид

$$f(x, \varphi(x) + z) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{f}(x, z) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{M}(x)z + g(x, z) = 0, \quad (7.9)$$

где $\mathcal{M}(x)$ – линейный дифференциальный оператор, и у всех точек $Q = (q_1, q_2)$ носителя $\mathbf{S}(g)$ координата $q_2 \geq 2$. Так что $z = 0$ является решением уравнения (7.9), соответствующим решению (7.6) уравнения (7.1).

ЛЕММА 7.1. В уравнении (7.9) оператор

$$\mathcal{M}(x) = \delta f / \delta y \quad \text{на} \quad y = \varphi(x),$$

т.е. $\mathcal{M}(x)$ это первая вариация дифференциальной суммы $f(x, y)$, вычисленная на решении (7.6).

Согласно §3 логарифму $\ln x$ приписываем нулевой показатель степени. Так что произведение $\beta(\ln x)x^{r_1}z^{r_2}$, где β – многочлен от $\ln x$, имеет показатель степени $Q = (r_1, r_2)$. Теперь дифференциально-логарифмическая сумма \tilde{f} имеет носитель $\mathbf{S}(\tilde{f})$ и многоугольник $\Gamma(\tilde{f})$. Многоугольник $\Gamma(\tilde{f})$ уравнения (7.9) имеет горизонтальное ребро $\Gamma_1^{(1)}$ с $q_2 = 1$, соответствующее сумме $\mathcal{M}(x)z$, т.е. $\Gamma_1^{(1)} = \Gamma(\mathcal{M}(x)z)$. Поэтому здесь применима техника, использованная в п. 5.4 для горизонтального ребра.

ЛЕММА 7.2. При логарифмическом преобразовании

$$\zeta = d \ln z / dx \tag{7.10}$$

для $l > 0$ имеем

$$z^{(l)} = z[\zeta^l + P_{l-1}(\zeta, \dots, \zeta^{(l-2)})],$$

где штрих означает дифференцирование по x и P_{l-1} – многочлен степени $l-1$ от указанных переменных с постоянными коэффициентами.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.2 гл. VI [2].

Для анализа решений укороченного уравнения

$$\mathcal{M}(x)z = 0, \tag{7.11}$$

соответствующего ребру $\Gamma_1^{(1)}$ с нормальным конусом $\mathbf{U}_1^{(1)} = \{P : p_1 = 0, p_2 < 0\}$, сделаем логарифмическое преобразование (7.10). Тогда уравнение (7.11) перейдет в уравнение

$$h(x, \zeta)z \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{M}(x)z = 0. \tag{7.12}$$

Разберемся в его специфике подробнее. Согласно §5 теперь для x, ζ конус задачи $\tilde{\mathcal{K}} = \{\tilde{P} = (\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) : \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 > 0\}$. Многоугольник $\Gamma(h)$ обозначим $\tilde{\Gamma}$, а его грани – как $\tilde{\Gamma}_j^{(d)}$.

ЛЕММА 7.3. Всякая укороченная сумма $\hat{h}_j^{(d)}(x, \zeta)$, у которой нормальный конус $\tilde{\mathbf{U}}_j^{(d)}$ пересекается с конусом задачи $\tilde{\mathcal{K}}$, не зависит от производных $\zeta^{(l)}$ с $l > 0$.

СЛЕДСТВИЕ 7.1. Укороченные уравнения $\hat{h}_j^{(0)} = 0$, соответствующие вершинам $\tilde{\Gamma}_j^{(0)}$, согласно замечанию 1.1 не дают подходящих решений, и их можно не рассматривать.

Укорочение $\hat{h}_j^{(1)}$, соответствующее ребру $\tilde{\Gamma}_j^{(1)}$, является суммой нескольких членов вида

$$b_{q,m}(\ln x)x^q\zeta^m, \tag{7.13}$$

где $b_{q,m}$ – многочлены от $\ln x$, носители которых $(q, m) = \tilde{Q}$ лежат на одном отрезке $\tilde{\Gamma}_j^{(d)}$ с нормальным вектором (ω, p) , где

$$\omega + p > 0. \quad (7.14)$$

Поэтому укороченное уравнение $\hat{h}_j^{(1)}(x, \zeta) = 0$ имеет n решений вида

$$\zeta = \alpha_i (\ln x) x^{p\omega}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (7.15)$$

где n равно разности между наибольшим и наименьшим значениями m , т.е. второй координаты точек на ребре $\tilde{\Gamma}_j^{(1)}$, а α_i – некоторые алгебраические функции от $\ln x$. Решение уравнения (7.15)

$$\ln z = \int \alpha_i (\ln x) x^{p\omega} dx. \quad (7.16)$$

Следовательно, решения уравнения (7.1), близкие к решению (7.6), имеют вид

$$y = \varphi(x) + \exp \left[\int \alpha_i (\ln x) x^{p\omega} dx + \dots \right] + \dots. \quad (7.17)$$

Если во всех членах вида (7.13), входящих в укорочение $\hat{h}_j^{(1)}$, коэффициенты $b_{q,m}$ постоянны, то в равенстве (7.15) функция α_i является постоянной и выражение

$$\zeta = \alpha_i x^{p\omega} \quad (7.18)$$

является подходящей степенной асимптотикой решений уравнения $h(x, \zeta) = 0$. Согласно §1 степенное решение алгебраического укороченного уравнения не имеет критических чисел.

Теперь методами §3 можно получить степенно-логарифмическое разложение

$$\zeta = \alpha_i x^{p\omega} + \sum \delta_s (\ln x) x^s, \quad s\omega < p, \quad (7.19)$$

решений уравнений (7.12), где все многочлены δ_s однозначно определены. При этом значение $s = -1$ удовлетворяет неравенству $s\omega < p$ из (7.19) согласно неравенству (7.14). Поэтому разложение (7.19) дает однопараметрическое семейство решений уравнения (7.11)

$$z = c \exp \left[\alpha_i x^{p\omega+1} / (p\omega + 1) + \sum \gamma_{s+1} (\ln x) x^{s+1} \right], \quad (7.20)$$

где c – произвольная постоянная, $c \neq 0$ и

$$\gamma_{s+1} x^{s+1} = \int \delta_s x^s dx.$$

Для решений уравнения (7.1) разложение (7.20) дает однопараметрическое семейство асимптотик

$$y = \varphi(x) + c \exp \left[\alpha_i x^{p\omega+1} / (p\omega + 1) + \sum \gamma_{s+1} (\ln x) x^{s+1} \right] + \dots. \quad (7.21)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 7.1. Если разложение (7.6) не содержит логарифмов, то в разложении (7.19) все δ_s являются постоянными, т.е. не зависят от логарифмов. Поэтому разложение (7.21) имеет вид

$$y = \varphi(x) + cx^{\delta-1} \exp \left[\alpha_i x^{p\omega+1}/(p\omega+1) + \sum_{s \neq -1} \delta_s x^{s+1}/(s+1) \right].$$

Для дифференциальной суммы $f(x, y)$ через $\pi(f)$ обозначим наибольший порядок производной от y по x , имеющийся в сумме $f(x, y)$. Аналогично, для дифференциального оператора $\mathcal{L}(x)$ через $\pi(\mathcal{L})$ обозначается наибольший порядок дифференцирования по x , имеющийся в операторе $\mathcal{L}(x)$.

ТЕОРЕМА 7.2. *Решение (7.6) уравнения (7.1), соответствующее оператору (7.4), имеет в точности $\pi(f) - \pi(\mathcal{L})$ однопараметрических добавок вида (7.17) или (7.21).*

СЛЕДСТВИЕ 7.2. *Решение (7.6) уравнения (7.1), соответствующее укороченному уравнению (7.2), может иметь экспоненциальные добавки (7.8) только в двух случаях: (а) при $\pi(\hat{f}_j^{(d)}) < \pi(f)$ и (б) при $\pi(\hat{f}_j^{(d)}) = \pi(f) = \pi$, если уравнения (7.2) и $\partial \hat{f}_j^{(d)}/\partial y^{(\pi)} = 0$ имеют общее решение (7.3), для которого один из векторов $\pm(1, r) \in \mathbf{U}_j^{(d)}$.*

Если $\pi(\mathcal{L}) = \pi(f)$ и разложение (7.6) степенное, т.е. все $\beta_s = \text{const}$, то согласно теореме 3.4 разложение (7.6) сходится и согласно теореме 7.2 не имеет добавок вида (7.17) или (7.21). Если же $\pi(\mathcal{L}) < \pi(f)$, то разложение (7.6), как правило, расходится, но зато имеет $\pi(f) - \pi(\mathcal{L})$ однопараметрических добавок вида (7.17) или (7.21).

ГИПОТЕЗА 7.1. *Если степенно-логарифмическое разложение (7.6) решения уравнения (7.1) не имеет экспоненциально малых добавок в комплексной области, то оно сходится для достаточно малых $|x|^{-\omega} \neq 0$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 7.2. Для нахождения всех асимптотических добавок вида (7.17) достаточно вычислить отрезок оператора $\mathcal{M}(x)$, содержащий член с максимальной производной порядка $\pi(f)$. Как правило, в силу леммы 7.1 этот член является результатом вычисления на степенной асимптотике (7.3) первой вариации того дифференциального монома $a_i(x, y)$ суммы $f(x, y)$, который содержит производную от y наибольшего порядка $\pi(f)$. Если $Q(a_i) = (q_1, q_2)$, то в $\mathcal{M}(x)$ искомым член имеет показатель $q_1 + (q_2 - 1)r$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.3. Здесь был рассмотрен вариант нахождения добавок (7.8) для разложения (7.6) с вещественными показателями r, s . Для комплексных r и s все сказанное выше сохраняется, только теперь $\omega \text{Re } s < \omega \text{Re } r$ и $\omega \text{Re } k_i < \omega \text{Re } r$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.4. Если найдено разложение $\zeta(x)$ решения уравнения $h(x, \zeta) = 0$ (см. (7.12)), то к нему можно найти экспоненциальную добавку так же, как к разложению (7.6) решения уравнения (7.1) находится добавка (7.8). Поскольку при каждом логарифмическом преобразовании (7.10) порядок дифференцирования в уравнении уменьшается на единицу, то через $\pi(f)$ таких шагов получим алгебраическое уравнение, а добавки будут иметь вид

$$\exp \left\{ \int \zeta(x) dx + \exp \left[\int \xi(x) dx + \exp \left(\int \eta(x) dx + \dots \right) \right] \right\} \quad (7.22)$$

и будут также зависеть от $\pi(f)$ произвольных постоянных. Однако последней добавкой не удастся воспользоваться, ибо ее знак противоположен знаку предыдущей добавки. Поэтому в разложении (7.22) будут только $\pi(f) - 1$ произвольных постоянных.

§ 8. Пример вычисления экспоненциальных добавок

Покажем, как вычислять экспоненциально малые добавки (7.8). Рассмотрим уравнение (2.1)

$$f(X) \stackrel{\text{def}}{=} x^2 y'^2 - 2x^2 y y'' + ay^2 + x^2 y^2 - x^4 = 0, \quad (8.1)$$

где a – вещественный параметр. Очевидно, что $\pi(f) = 2$. На рис. 1 показан многоугольник $\Gamma(f)$, который является треугольником. Из трех его вершин двум соответствуют алгебраические укороченные уравнения, которые не имеют степенных решений, а одной вершине $\Gamma_1^{(0)}$ соответствует укорочение $\hat{f}_1^{(0)}$ с $\pi(\hat{f}_1^{(0)}) = 2$. По следствию 7.2 решения, соответствующие укороченному уравнению $\hat{f}_1^{(1)} = 0$, не имеют экспоненциальных добавок (7.8). Из трех ребер треугольника $\Gamma(f)$ два содержат вершину $\Gamma_1^{(0)}$, поэтому для соответствующих им укорочений $\hat{f}_j^{(1)}$ имеем $\pi(\hat{f}_j^{(1)}) = 2$ и по следствию 7.2 для них нет добавок (7.8). Наконец, ребру $\Gamma_3^{(1)}$ соответствует укороченное уравнение

$$\hat{f}_3^{(1)}(X) \stackrel{\text{def}}{=} x^2 y^2 - x^4 = 0 \quad (8.2)$$

с нормальным конусом $\mathbf{U}_3^{(1)} = \{P = \lambda(1, 1), \lambda > 0\}$, т.е. $\omega = 1$ и $x \rightarrow \infty$. Очевидно, $\pi(\hat{f}_3^{(1)}) = 0 < 2 = \pi(f)$.

Согласно п. 4.6 укороченному уравнению (8.2) соответствуют два разложения (4.18)

$$y = c_1 x + x^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} c_{-2k} x^{-2k} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_l(x), \quad l = 1, 2, \quad (8.3)$$

где $c_1 = (-1)^l$ и все c_{-2k} однозначно определены для фиксированного l . Согласно теореме 7.2 для каждого разложения (8.3) имеются две однопараметрические добавки вида (7.21). Найдем их начальные отрезки. Вычислим первую вариацию

$$\frac{\delta f}{\delta y} = 2x^2 y' \frac{d}{dx} - 2x^2 y'' - 2x^2 y \frac{d^2}{dx^2} + 2ay + 2x^2 y. \quad (8.4)$$

Согласно лемме 7.1 на разложении (8.3) вариация (8.4) дает оператор $\mathcal{M}(x)$. Вычислим все те дифференциальные мономы $a_i(x, z)$ суммы $\mathcal{M}(x)z$, у которых векторные показатели степени $Q(a_i) = (q_1, 1)$ имеют $q_1 > 0$, и их сумму обозначим через $\mathcal{N}(x)z$. Согласно (8.4) и (8.3) получаем

$$\mathcal{N}(x) = 2x^2 c_1 \frac{d}{dx} - 2c_1 x^3 \frac{d^2}{dx^2} + 2ac_1 x + 2c_1 x^3 + 2c_0 x. \quad (8.5)$$

Произведем дальнейшие вычисления, используя оператор $\mathcal{N}(x)$ вместо оператора $\mathcal{M}(x)$. Уравнение $\mathcal{N}(x)z = 0$ после логарифмического преобразования (7.10) и сокращения на $2c_1 xz$ принимает вид

$$\tilde{h} \stackrel{\text{def}}{=} x\zeta - x^2(\zeta' + \zeta^2) + a + x^2 + c_0/c_1 = 0. \quad (8.6)$$

Его носитель $\mathbf{S}(\tilde{h})$ и многоугольник $\Gamma(\tilde{h})$ показаны на рис. 15. Из него видно, что с конусом задачи $\mathcal{K} = \{\tilde{P} = (\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) : \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 > 0\}$ пересекаются только нормальные конусы вертикального ребра и его вершин. Но согласно следствию 7.1 укорочения, соответствующие вершинам, не дают подходящих решений. Вертикальному ребру соответствует укороченное уравнение $\hat{h} \stackrel{\text{def}}{=} -x^2 \zeta^2 + x^2 = 0$. Его решения суть

$$\zeta = \alpha_i = (-1)^i, \quad i = 1, 2. \quad (8.7)$$

Поскольку сдвинутый носитель уравнения

$$h(x, \zeta) \stackrel{\text{def}}{=} z^{-1} \mathcal{M}(x) z = 0 \quad (8.7')$$

расположен в решетке с базисом $(2, 0)$, $(1, 1)$, а сдвинутый носитель укороченного решения (8.7) – это вектор $(0, 1)$, то все они расположены в целочисленной решетке \mathbb{Z}^2 . Поэтому соответствующие (8.7) разложения решений уравнения $h = 0$ имеют вид

$$\zeta = \alpha_i + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{-k} x^{-k}. \quad (8.8)$$

Вычислим коэффициент δ_{-1} . Подставим $\zeta = \alpha_i + \delta_{-1} x^{-1}$ в уравнение (8.6) и, приравняв нулю коэффициент при x , получим для δ_{-1} уравнение $\alpha_i - 2\alpha_i \delta_{-1} = 0$. Из него находим, что $\delta_{-1} = 1/2$. Согласно замечанию 7.1 в разложении (8.8) все δ_{-k} суть определенные постоянные, и решения, близкие к разложениям (8.3), имеют вид

$$y = \varphi(x) + c x^{1/2} \exp \left[\alpha_i x + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{-k} x^{-k} \right] + \dots,$$

где c – произвольная постоянная, все γ_{-k} – определенные постоянные, а $\alpha_i = \alpha_1 = -1$, если $\text{Re } x \rightarrow +\infty$, и $\alpha_i = \alpha_2 = 1$, если $\text{Re } x \rightarrow -\infty$, поскольку добавка должна стремиться к нулю при $x \rightarrow \infty$. В [14] аналогично получена экспоненциальная добавка в первом уравнении Пенлеве.

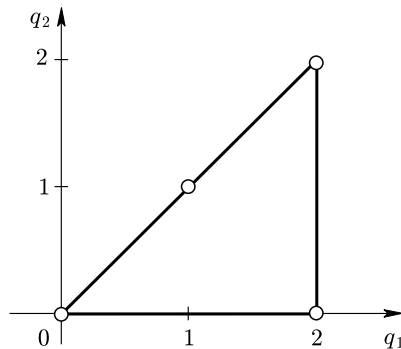


Рис. 15.

Согласно замечанию 7.4 найдем экспоненциальную добавку к разложению (8.8) решения уравнения (8.7'). Согласно (8.4) и лемме 7.1 оператор $\mathcal{M}(x)$ есть

$$\mathcal{M}(x) = 2x^2\varphi' \frac{d}{dx} - 2x^2\varphi'' - 2x^2\varphi \frac{d^2}{dx^2} + 2a\varphi + 2x^2\varphi,$$

где $\varphi = \varphi_l$, а уравнение (8.7') есть

$$h(x, \zeta) \stackrel{\text{def}}{=} 2x^2\varphi'\zeta - 2x^2\varphi'' - 2x^2\varphi(\zeta' + \zeta^2) + 2a\varphi + 2x^2\varphi = 0.$$

Пусть согласно [15]

$$\zeta_i(x) = \alpha_i + \frac{1}{2}x^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{-k}x^{-k}$$

– разложение решения этого уравнения. Положим $\zeta = \zeta_i(x) + w$. Тогда укорочение уравнения для w имеет вид

$$\widetilde{\mathcal{M}}(x)w = 0, \quad (8.9)$$

где согласно лемме 7.1 оператор $\widetilde{\mathcal{M}} = \delta h / \delta \zeta$ на $\zeta = \zeta_i(x)$, т.е.

$$\widetilde{\mathcal{M}}(x) = 2x^2\varphi' - 2x^2\varphi \left(\frac{d}{dx} + 2\zeta_i \right).$$

После логарифмического преобразования $\xi = d \ln w / dx = dw / (w dx)$ из уравнения (8.9) получаем уравнение

$$\tilde{h}(x, \xi) \stackrel{\text{def}}{=} w^{-1} \widetilde{\mathcal{M}} w \stackrel{\text{def}}{=} 2x^2\varphi' - 2x^2\varphi(\xi + 2\zeta_i) = 0.$$

Его решение есть

$$\xi_i = -2\zeta_i + \varphi' / \varphi = -2\alpha_i + \sum_{k=2}^{\infty} \tilde{\delta}_k x^{-k}.$$

Следовательно, разложения решений уравнения (8.1) имеют вид

$$y = \varphi(x) + \exp \left[\int \zeta_l(x) dx + \exp \left(\int \xi_i(x) dx + \dots \right) \right].$$

Поскольку $\zeta_i = \alpha_i + \dots$, $\alpha_i = (-1)^i$ и $\xi_i = -2\alpha_i + \dots$, то при $|x| \rightarrow \infty$ если $\int \zeta_i dx \rightarrow -\infty$, то $\int \xi_i dx \rightarrow +\infty$. Поэтому вторая добавка $\exp \int \xi_i dx$ отсутствует в согласии с замечанием 7.4.

Заклучение

Методами §§ 1 и 3 в [22]–[26], [36] были получены новые разложения решений третьего, пятого и шестого уравнений Пенлеве, отсутствующие в обзорной книге [38].

Методами §§ 1, 3, 5 в [33]–[35], [41] были исследованы решения обыкновенных дифференциальных уравнений, к которым сводятся гидродинамические задачи о пограничных слоях на игле в потоках жидкостей разных типов.

Все изложенное в §§ 1–8 переносится на систему обыкновенных дифференциальных уравнений. А именно, нахождение степенных асимптотик решений см. в [2; гл. VI, § 1], [3; раздел 8], [7], [8; п. 3], вычисление их критических чисел см. в [7], [8; шп. 1, 2], [27; § 2], вычисление степенных разложений решений см. в [7], [8], [27; § 2], вычисление степенно-логарифмических разложений решений см. в [16], вычисление нестепенных асимптотик решений см. в [9; § 1], вычисление экспоненциально малых добавок к решению см. в [17]. В [7] приведены примеры применения этой техники к системе Лоренца и к задаче Хилла.

Но главным образом эта техника применялась к системе Н. Ковалевского [39], описывающей движения тяжелого твердого тела с закрепленной точкой в случае

$$B \neq C, \quad x_0 \neq 0, \quad y_0 = z_0 = 0.$$

Система уравнений Н. Ковалевского имеет одну независимую и две зависимые переменные, всего три. Поэтому она исследуется с помощью трехмерной степенной геометрии, т.е. все геометрические конструкции изображаются с помощью наглядных рисунков. А именно, многогранники уравнений системы построены в [27], [28]. Степенные асимптотики решений, их критические числа и соответствующие степенные разложения решений вычислены в [28]–[32], [10]. Степенно-логарифмические разложения решений обсуждаются в [11; § 6], [12; п. 6], [16; § 3]. На их основе делается вывод об отсутствии дополнительного аналитического первого интеграла при $A \neq B$, при $A = B < C$ и при $A = B = 22C$. Нестепенные асимптотики решений вычислены в [9; §§ 2–5], [11; § 4], [12; п. 4]. На их основе делается вывод об отсутствии дополнительного аналитического первого интеграла при $A = B = 4C/3$ и при $A = B = 4C$. В [17] показано, что разложения решений этой системы не имеют экспоненциальных добавок. Кроме того, в теореме 2.1 из [10] указано счетное множество значений $y = A/C = B/C$, при которых все разложения решений имеют рациональные показатели степеней, и (кроме $y = 4$) отсутствуют нестепенные асимптотики. В этих случаях можно ожидать существование дополнительного первого интеграла, содержащего рациональные степени переменных.

Обзор основных идей и результатов степенной геометрии см. в [15].

Первоначальный вариант этой работы – препринты [13], [14]. Аннотация основных результатов дана в [18]–[21].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Д. Брюно. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979.
- [2] А. Д. Брюно. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Физматлит, 1998.

- [3] A. D. Bruno. Power geometry as a new calculus // Analysis and Applications / ed. H. G. W. Begehr, R. P. Gilbert, M. W. Wong. Dordrecht: Kluwer, 2003. P. 51–71. (Int. Soc. Anal. Appl. Comput. V. 10.)
- [4] А. Д. Брюно. Степенные разложения решений одного алгебраического или дифференциального уравнения // Препринт № 63. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2000.
- [5] А. Д. Брюно. Степенные разложения решений одного алгебраического или дифференциального уравнения // Докл. РАН. 2001. Т. 380. № 2. С. 155–159.
- [6] А. Д. Брюно. Автомодельные решения и степенная геометрия // УМН. 2000. Т. 55. № 1. С. 3–44.
- [7] А. Д. Брюно. Степенные разложения решений системы алгебраических и дифференциальных уравнений // Препринт № 68. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2000.
- [8] А. Д. Брюно. Степенные разложения решений системы алгебраических и дифференциальных уравнений // Докл. РАН. 2001. Т. 380. № 3. С. 298–304.
- [9] А. Д. Брюно. Асимптотики решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Препринт № 40. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2002.
- [10] А. Д. Брюно. Степенные свойства движений твердого тела // Докл. РАН. 2002. Т. 387. № 6. С. 727–732.
- [11] А. Д. Брюно. Анализ уравнений Эйлера–Пуассона методами степенной геометрии // Препринт № 41. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2002.
- [12] А. Д. Брюно. Анализ уравнений Эйлера–Пуассона методами степенной геометрии // Механика твердого тела (Донецк). № 32, 2003. С. 3–15.
- [13] А. Д. Брюно. Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // Препринт № 9. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2003.
- [14] А. Д. Брюно. Асимптотически близкие решения обыкновенного дифференциального уравнения // Препринт № 31. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2003.
- [15] А. Д. Брюно. Асимптотическое решение нелинейных уравнений с помощью степенной геометрии // Препринт № 28. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2003.
- [16] А. Д. Брюно. Разложения решений системы ОДУ // Препринт № 59. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2003.
- [17] А. Д. Брюно. Асимптотически близкие решения системы ОДУ // Препринт № 58. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2003.
- [18] А. Д. Брюно. Степенные асимптотики решений обыкновенного дифференциального уравнения // Докл. РАН. 2003. Т. 392. № 3. С. 295–300.
- [19] А. Д. Брюно. Степенно-логарифмические разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // Докл. РАН. 2003. Т. 392. № 4. С. 439–444.
- [20] А. Д. Брюно. Нестепенные асимптотики решений обыкновенного дифференциального уравнения // Докл. РАН. 2003. Т. 392. № 5. С. 586–591.
- [21] А. Д. Брюно. Асимптотически близкие решения обыкновенного дифференциального уравнения // Докл. РАН. 2003. Т. 393. № 4. С. 448–452.
- [22] А. Д. Брюно, И. В. Чухарева. Степенные разложения решений шестого уравнения Пенлеве // Препринт № 49. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2003.
- [23] А. Д. Брюно, И. В. Горючкина. Разложения решений шестого уравнения Пенлеве // Докл. РАН. 2004. Т. 395. № 6. С. 733–737.
- [24] А. Д. Брюно, А. В. Гриднев. Степенные и экспоненциальные разложения решений третьего уравнения Пенлеве // Препринт № 51. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2003.
- [25] А. Д. Брюно, Е. С. Карулина. Степенные разложения решений пятого уравнения Пенлеве // Препринт № 50. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2003.
- [26] А. Д. Брюно, Е. С. Карулина. Разложения решений пятого уравнения Пенлеве // Докл. РАН. 2004. Т. 395. № 4. С. 439–444.
- [27] А. Д. Брюно, В. В. Лунев. Модифицированная система уравнений движения твердого тела // Препринт № 49. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2001.
- [28] А. Д. Брюно, В. В. Лунев. О вычислении степенных разложений модифицированных движений твердого тела // Докл. РАН. 2002. Т. 386. № 1. С. 11–17.

- [29] А. Д. Брюно, В. В. Лунев. Локальные разложения модифицированных движений твердого тела // Препринт № 73. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2001.
- [30] А. Д. Брюно, В. В. Лунев. Асимптотические разложения модифицированных движений твердого тела // Препринт № 90. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2001.
- [31] А. Д. Брюно, В. В. Лунев. Свойства разложений модифицированных движений твердого тела // Препринт № 23. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2002.
- [32] А. Д. Брюно, В. В. Лунев. Семейства степенных разложений модифицированных движений твердого тела // Докл. РАН. 2002. Т. 387. № 3. С. 297–303.
- [33] А. Д. Брюно, Т. В. Шадрина. Об осесимметричном обтекании иглы вязкой несжимаемой жидкостью // Докл. РАН. 2002. Т. 387. № 5. С. 589–595.
- [34] А. Д. Брюно, Т. В. Шадрина. Осесимметричный пограничный слой на игле // Препринт № 64. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2003.
- [35] А. Д. Брюно, Т. В. Шадрина. Осесимметричный пограничный слой на игле // Докл. РАН. 2004. Т. 394. № 3. С. 298–304.
- [36] А. Д. Брюно, Ю. В. Завгородняя. Степенные ряды и нестепенные асимптотики решений второго уравнения Пенлеве // Препринт № 48. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2003.
- [37] Y. F. Chang, J. M. Greene, M. Tabor, J. Weiss. The analytic structure of dynamical systems and self-similar natural boundaries // Phys. D. 1983. V. 8. № 1–2. P. 183–207.
- [38] V. I. Gromak, I. Laine, S. Shimomura. Painlevé Differential Equations in the Complex Plane. Berlin: de Gruyter, 2002. (de Gruyter Stud. Math. V. 28.)
- [39] N. Kowalewski. Eine neue partikuläre Lösung der Differentialgleichungen der Bewegung eines schweren starren Körpers um einen festen Punkt // Math. Ann. 1908. V. 65. P. 528–537.
- [40] Н. Х. Розов. Пенлеве уравнение // Математическая энциклопедия. Т. 4. М.: Советская Энциклопедия, 1984. С. 233–234.
- [41] Т. В. Шадрина. Об осесимметричном обтекании иглы вязкой несжимаемой жидкостью // Препринт № 36. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2002.
- [42] В. М. Тихомиров. Фреше производная // Математическая энциклопедия. Т. 5. М.: Советская Энциклопедия, 1985. С. 666.