

УДК 517.538

А. А. Приходько

Полиномы Литлвуда и их приложения к спектральной теории динамических систем

В настоящей работе устанавливается существование сумм характеров на вещественной прямой \mathbb{R} , являющихся ε -плоскими на любом заданном компактном подмножестве $K \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ относительно метрики в пространстве $L^1(K)$. Следствием данного аналитического результата является положительный ответ к гипотезе Банаха о существовании динамической системы с простым лебеговским спектром в классе действий группы \mathbb{R} .

Библиография: 50 названий.

Ключевые слова: Полиномы Литлвуда, метод Ван дер Корпута, произведения Рисса, потоки ранга 1, проблема Банаха

§ 1. Введение

Полином $P(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n$, $c_j \in \mathbb{C}$, называется *унимодулярным*, если $|c_j| = 1$ для всех j . Литлвуд в 1966 г. поставил вопрос о том, насколько унимодулярный полином может быть близок к константе по абсолютной величине на единичной окружности $S^1 = \{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$? Иными словами, существует ли для заданного $\varepsilon > 0$ унимодулярный полином $P(z)$ степени $n \geq 1$, удовлетворяющий оценке

$$\left| \frac{1}{\sqrt{n+1}} |P(z)| - 1 \right| < \varepsilon$$

для любой точки $z \in \mathbb{C}$, такой, что $|z| = 1$? Наряду с классом унимодулярных полиномов изучается ряд других классов полиномов и экспоненциальных сумм, построенных на основе более общих или более частных ограничений на коэффициенты, объединённых под общим названием *полиномы Литлвуда*. Исследование аналитических свойств полиномов Литлвуда имеет большой круг приложений в теории чисел, анализе и теории динамических систем. Положительный ответ на упомянутый вопрос Литлвуда дал Кахан в 1980 г. и, в то же время, многие проблемы, связанные со свойствами полиномов Литлвуда открыты и сейчас.

Объектом нашего исследования является класс $\mathcal{M}^{\mathbb{R}}$ полиномов Литлвуда с коэффициентами $\{0, 1\}$ на группе \mathbb{R} , возникающий в задачах спектральной теории динамических систем с инвариантной мерой. В настоящей работе устанавливается существование полиномов в классе $\mathcal{M}^{\mathbb{R}}$, являющихся интегрально ε -плоскими на любом заданном компактном подмножестве многообразия

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №. 11-01-00759-а) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант №. НШ-3038.2008.1).

$\mathbb{R} \setminus \{0\}$. А именно, мы докажем, что для заданных $0 < a < b$ и $\varepsilon > 0$ существует полином

$$\mathcal{P}(t) = \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{j=0}^{q-1} e^{2\pi i t \omega(j)}, \quad \omega(j) \in \mathbb{R}, \quad q \geq 2,$$

являющийся *ε -плоским* на отрезке $[a, b]$ по отношению к норме пространства $L^1([a, b])$. Затем, мы покажем, как применение данного аналитического результата позволяет дать положительный ответ к гипотезе Банаха о существовании динамической системы с простым лебеговским спектром в классе действий группы \mathbb{R} .

1.1. Приложения к спектральной теории динамических систем.

Основной задачей работы является исследование спектральных свойств класса динамических систем с инвариантной мерой, — так называемых систем *ранга 1*. Сохраняющее меру обратимое преобразование вероятностного пространства (X, \mathcal{A}, μ) называется *автоморфизмом ранга 1*, если существует последовательность башен Рохлина $\{TB_n \sqcup \dots \sqcup T^{h_n}B_n\}$, аппроксимирующая любое измеримое подмножество фазового пространства X . Данное определение расширяется на *потоки* — действия группы \mathbb{R} , а также на более общие действия групп [28]. Автоморфизмы ранга 1 были впервые сконструированы Орнштейном и Чаконом [23, 41] и являются важным источником примеров в эргодической теории. Известно, что преобразования и потоки ранга 1 имеют простой спектр, а значит, единственным спектральным инвариантом таких систем является мера максимального спектрального типа. Для класса потоков ранга 1, являющихся главной целью нашего исследования, мы установим существование потока, обладающего максимальным спектральным типом, эквивалентным мере Лебега на прямой \mathbb{R} , и тем самым дадим положительный ответ на вопрос Банаха [6, 13] о существовании динамической системы с простым лебеговским спектром для действий группы \mathbb{R} . Рассмотренный в работе метод построения потока ранга 1 с лебеговским спектром опирается на чисто аналитический результат о существовании *плоских* тригонометрических полиномов с коэффициентами $\{0, 1\}$, связанный с задачами об исследовании свойств полиномов Литлвуда [36].

1.2. Полиномы Литлвуда. Интерес к аналитическим свойствам полиномов с определёнными ограничениями на коэффициенты восходит к работам Харди и Литлвуда об оценках тригонометрических сумм и рядов (см. [30], [36], а также [27]). Комплексный полином

$$P(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n, \quad c_j \in \mathbb{C}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad |z| = 1, \quad (1.1)$$

называется *унимодулярным*, если $|c_j| = 1$ для всех j . Обозначим символом \mathcal{K}_n множество унимодулярных полиномов степени n , и пусть \mathcal{L}_n — класс полиномов с коэффициентами ± 1 ,

$$\mathcal{L}_n = \left\{ Q(z) = \sum_{j=0}^n c_j z^j, \quad c_j \in \{-1, +1\} \right\}, \quad \mathcal{L}_n \subset \mathcal{K}_n. \quad (1.2)$$

Мы будем исследовать полиномы как функции на единичной окружности S^1 . Литлвуд ([36], см. также [3, 21, 27, 31]) сформулировал вопрос о том, насколько близко может приблизиться к константе функция $|P(z)|$ для полиномов P в классе \mathcal{K}_n и для полиномов в классе \mathcal{L}_n ?

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Полином $P(z)$ называют ε -ультраплоским, если

$$\left| \frac{1}{\sqrt{n+1}} |P(z)| - 1 \right| \leq \varepsilon \quad (1.3)$$

для каждой точки $z \in S^1 = \{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что полином $P(z)$ является ε -интегрально плоским или, сокращённо, ε -плоским в норме L^p , если

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{n+1}} |P(z)| - 1 \right\|_p \leq \varepsilon, \quad (1.4)$$

где $\|\cdot\|_p$ — норма в пространстве $L^p(S^1)$.

Кёрнер установил существование унимодулярных полиномов $P(z)$ со свойством $A \leq (n+1)^{-1/2} |P(z)| \leq B$, где $z \in S^1$, для некоторых абсолютных констант $0 < A < 1 < B$ (см. [22, 35]). Кахан ([31], отвечая на вопрос Литлвуда, построил последовательность полиномов P_n степени n , удовлетворяющих при всех $z \in S^1$ оценке

$$\left| (n+1)^{-1/2} |P_n(z)| - 1 \right| \leq \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n = O(n^{-1/17} \sqrt{\log n}). \quad (1.5)$$

Неизвестно, существует ли последовательность ε_n -ультраплоских полиномов в классе \mathcal{L}_n , $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Также открыт вопрос о существовании ε_q -интегрально плоских полиномов в классе \mathcal{M}_q полиномов с коэффициентами $\{0, 1\}$,

$$\mathcal{M}_q = \left\{ P(z) = q^{-1/2} (z^{a_0} + z^{a_2} + \cdots + z^{a_{q-1}}), a_k \in \mathbb{Z}, a_k < a_{k+1} \right\} \quad (1.6)$$

где $q \geq 2$ и $\varepsilon_q \rightarrow 0$ (см. [3, 27]). Данный класс полиномов тесно связан с исследованием свойств меры максимального спектрального типа для автоморфизмов ранга 1 (см. [16, 20, 34]).

1.3. Плоские полиномы Литлвуда с коэффициентами $\{0, 1\}$. Будем обозначать символом $\mathcal{M}_q^{\mathbb{R}}$ класс тригонометрических сумм вида

$$\mathcal{P}_{\omega, q}(t) = \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{y=0}^{q-1} e^{2\pi i t \omega(y)}, \quad \omega(y) \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.7)$$

Функцию $\omega: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, участвующую в определении суммы $\mathcal{P}_{\omega, q}(t)$, обычно называют *частотной функцией*. Мы предполагаем, что функция $\omega(y)$ возрастает, благодаря чему последовательность частот $\{\omega(y)\}_{y=0}^{q-1}$ упорядочена по возрастанию, причём $\omega \in C^2([0, q])$. Удобно рассмотреть множество

$$\mathcal{M}^{\mathbb{R}} = \bigcup_{q=2}^{\infty} \mathcal{M}_q^{\mathbb{R}}. \quad (1.8)$$

Основным объектом нашего исследования является следующий специальный класс частотных функций $\omega(y)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Экспоненциально-лестничная частотная функция $\omega(y)$ определяется выражением

$$\omega(y) = E_0 + Ae^{\beta y}, \quad E_0, A, \beta \in \mathbb{R}. \quad (1.9)$$

Заметим, что функция $\omega(y)$ является в точности общим решение дифференциального уравнения

$$\omega'' = \beta\omega'. \quad (1.10)$$

ТЕОРЕМА 1. Для заданного промежутка $[a, b]$, $0 < a < b$ и параметра $\varepsilon > 0$, определяющего точность аппроксимации, существует минимальный “масштабный коэффициент” $t_0 > 0$, такой, что для любого $t \geq t_0$ найдутся параметр частотной функции $\beta > 0$, $\beta^{-1} \in \mathbb{N}$, и бесконечная последовательность степеней q_j , порождающие ε -плоские в пространстве $L^1([a, b])$ тригонометрические суммы $\mathcal{P}_{\omega, q_j}(t)$, построенные на основе частотной функции

$$\omega(y) = \omega_{m, \beta, q_j}(y) = m \frac{q_j}{\beta^2} e^{\beta y/q_j}. \quad (1.11)$$

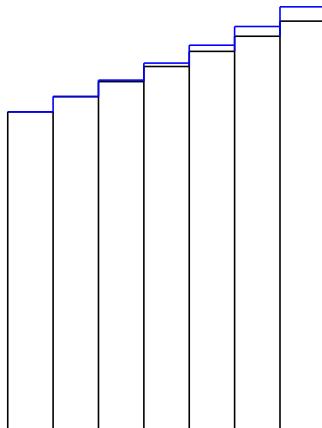


Рис. 1. Сравнение конструкций потоков ранга 1: лестничной и экспоненциально-лестничной. На рисунке проиллюстрирована процедура “разрезания и склеивания”. Чуть более высокие прямоугольники (верхняя граница которых отмечена синим цветом) изображают колонны в экспоненциально-лестничной конструкции.

1.4. Экспоненциально-лестничные эргодические потоки ранга 1.

Основной результат. Используемый в нашей работе термин **экспоненциально-лестничная функция** обязан своим происхождением аналогии с **лестничной конструкцией** автоморфизма ранга 1 (о лестничных конструкциях см., например, [17, 48]), в которой функция возвращения в основание аппроксимирующей башни Рохлина имеет вид лестницы из q ступеней высоты 1. Рассмотрим производную $\omega'(y)$ частотной функции. Она аппроксимирует расстояние

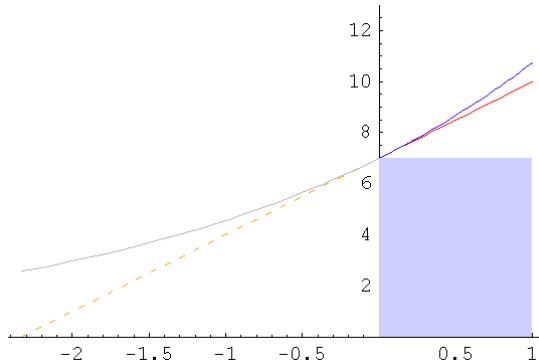


Рис. 2. Графики функций, огибающих колонны в конструкции “разрезания и склеивания” для лестничной и экспоненциально-лестничной конструкций. Синий прямоугольник обозначает башню с номером \$n\$ в конструкции потока ранга 1. Красная прямая линия огибает график функции возвращения для лестничной конструкции. Тёмно-синяя линия (график экспоненты \$\omega_{m,\beta,q}(y)\$) огибает график функции возвращения экспоненциально-лестничного потока ранга 1.

между соседними точками в последовательности частот \$\{\omega(y)\}_{y=0}^{q-1}\$. График кусочно-постоянной функции \$\phi(y) = \kappa \omega'_{m,\beta,q_j}([y])\$, играющей роль функции возвращения в конструкции экспоненциально лестничного потока (см. (1.11)), также имеет вид лестницы со ступенями высоты приблизительно \$tq_j^{-1}\$, обладающей экспоненциальной огибающей кривой, представленной графиком функции \$\kappa \omega'_{m,\beta,q_j}(y)\$, где \$\kappa = (e^\beta - 1)/\beta = 1 + o(1)\$ при \$\beta \rightarrow 0\$ (см. рис. 2).

1.5. Определение потоков ранга 1. Активно изучаемые в эргодической теории автоморфизмы ранга 1 можно определить несколькими эквивалентными способами. В то же время существует ряд, a priori различных, подходов к обобщению данного класса динамических систем на действия группы \$\mathbb{R}\$. Нам будет удобно использовать определение, опирающееся на конструкцию “разрезания и склеивания”, поскольку наша главная цель — доказательство существования эргодического действия группы \$\mathbb{R}\$ с определёнными спектральными свойствами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть дан измеримый поток \$T^t\$, т.е. измеримое семейство сохраняющих меру преобразований пространства Лебега \$(X, \mathcal{A}, \mu)\$ со свойством \$T^{u+t} = T^t \circ T^u\$. Мы будем называть *башней* измеримое разбиение некоторого множества \$U\$ на множества вида \$T^t B\$ — *уровни* башни \$U\$ (будем использовать термин *t-уровень* для отдельного множества \$T^t B\$). Множество \$B\$ при этом называется *основанием* башни \$U\$.

Итак, пусть даны параметры конструкции: последовательность высот башен \$h_n > 0\$, число “разрезаний” \$q_n\$, последовательность функций \$\omega_n(y)\$, определяющих моменты возвращения в основание \$n\$-й аппроксимирующей башни \$U_n\$

итераций точки из основания башни U_{n+1} , и пусть $q_n \rightarrow \infty$, $\omega_n(0) = 0$, а также

$$\begin{aligned} h_{n+1} &\geq \omega_n(q_n), \quad \omega_n(y+1) - \omega_n(y) \geq h_n, \\ \prod_{n=1}^{\infty} \frac{h_{n+1}}{q_n h_n} &< \infty. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Определим фазовое пространство X потока ранга 1 как обратный предел пространств (X_n, μ_n) , $X_n = [0, h_n]$ (меры μ_n определяются ниже), относительно проекций $\phi_n: X_{n+1} \rightarrow X_n$, где

$$\phi_n(\omega_n(y) + t) = t, \quad \text{если } 0 \leq t < h_n, \quad 0 \leq y < q_n, \quad (1.13)$$

и

$$\phi_n(x_{n+1}) = 0 \quad \text{иначе}, \quad (1.14)$$

а именно, положим

$$X = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots): 0 \leq x_n < h_n, \phi_n(x_{n+1}) = x_n\}. \quad (1.15)$$

При условии требований (1.12) пространства X_n можно снабдить мерой вида

$$\mu_n = (1 - \gamma_n)\lambda_n + \gamma_n\delta_0, \quad (1.16)$$

где λ_n — нормированная мера Лебега на $(0, h_n)$, а δ_0 — дельта-функция, причём так, что $\phi_n^*\mu_n = \mu_{n+1}$. Отметим, что $\gamma_n \rightarrow 0$. Таким образом, на пространстве X возникает естественная борелевская мера μ , согласованная с мерами μ_n .

Зафиксируем некоторое $t \in \mathbb{R}$, тогда μ -почти наверное последовательность $x = (x_1, \dots, x_n, \dots) \in X$ удовлетворяет следующему свойству: начиная с некоторого индекса $n_0 = n_0(x, t)$, координата x_n находится на расстоянии не меньшем, чем $|t|$, от границы отрезка $[0, h_n]$, т. е.

$$|t| \leq x_n \leq h_n - |t| \quad \text{при } n \geq n_0(x, t). \quad (1.17)$$

Значит, мы можем корректно определить действие измеримого потока $T^t: X \rightarrow X$ формулой

$$T^t x = (x_1^{(+t)}, \dots, x_{n_0-1}^{(+t)}, x_{n_0} + t, x_{n_0+1} + t, \dots, x_n + t, \dots), \quad (1.18)$$

где $n_0 = n_0(x, t)$ и младшие координаты $x_1^{(+t)}$ однозначно определяются из условия согласованности проекций: $\phi_n(x_{n+1}) = x_n$. Нетрудно проверить, что мера μ является инвариантной относительно потока T^t , а множества

$$U_n = \phi_{\infty, n}^{-1}(0, h_n) \quad (1.19)$$

являются башнями Рохлина, аппроксимирующими σ -алгебру пространства X , где $\phi_{\infty, n}(x) = x_n$.

Рассмотренная конструкция эргодического потока полностью аналогичная конструкции “разрезания и склеивания” для автоморфизма ранга 1. Действительно, смысл конструкции заключается в том, что башня U_{n+1} может быть получена из башни U_n путём следующей перестройки: мы разрезаем башню U_n

высоты h_n на q_n равных колонн, расширяем колонну с номером y , увеличивая её высоту на величину $\omega_n(y+1) - \omega_n(y) - h_n$ (достраиваем дополнительные уровни) и затем строим новую башню U_{n+1} склеиванием полученных “расширенных” колонн. Конструкция проиллюстрирована на рис. 1. Под действием потока T^t точка $T^t x$, $x \in B_n$, движется вертикально с постоянной скоростью 1 до тех пор, пока не достигнет верхнего уровня колонны, а затем переходит в основание под действием отображения Пуанкаре S_n в точку $S_n x$, которое в нашем случае действует так, что верхний уровень колонны с номером y склеивается с нижним уровнем $(y+1)$ -й колонны. Для того чтобы увидеть, как действует отображение возвращения в основание башни U_{n+1} , нужно произвести следующий шаг конструкции и так далее.

Проекция ϕ_n интерпретируется как отображение, которое сопоставляет t -уровню башни U_{n+1} соответствующий ему уровень внутри башни U_n , либо 0, когда точка выходит за пределы башни U_n . Иными словами, $\phi_n(t)$ это высота (уровень) точки $T^t x_0$ над основанием башни U_n (см. рис. 2), если x_0 — точка в основании башни U_{n+1} , которое есть не что иное как основание колонны с номером 0 (крайней левой колонны на рисунке). Заметим, что функция возвращения в основание башни U_n является кусочно постоянной и её значение равно $\omega_n(y+1) - \omega_n(y)$ для точек в основании колонны с номером y .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Будем называть *экспоненциально-лестничным потоком* поток ранга 1, построенный в соответствии с рассмотренной выше конструкцией на основе последовательности экспоненциально-лестничных функций $\omega_n(y) = \omega_{m_n, \beta_n, q_n}(y)$, при условии что выбор параметров m_n, β_n, q_n обеспечивает выполнение условий (1.12), а именно,

$$m_n \rightarrow \infty, \quad h_n = \frac{m_n}{\beta_n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_n}{h_n} < \infty. \quad (1.20)$$

В определении 5 мы представили условия на параметры конструкции в наиболее наглядной форме. При этом можно заметить, что третье условие в (1.20) имеет более простую форму записи: $\sum_n \beta_n < \infty$ и, кроме того, влечёт свойство $\beta_n \rightarrow 0$.

ТЕОРЕМА 2. *Рассмотрим экспоненциально-лестничный поток ранга 1, построенный на основе последовательности экспоненциально-лестничных функций*

$$\omega_n(y) = \omega_{m_n, \beta_n, q_n}(y) = m_n \frac{q_n}{\beta_n^2} e^{\beta_n y / q_n}. \quad (1.21)$$

Предположим, что для некоторого $\alpha \in (0, 1/4)$ выполнены следующие условия:

$$h_n^{1+\alpha} \leq q_n, \quad m_n \leq h_n^{1/2-\alpha}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n^{1/4-\alpha}} < \infty, \quad (1.22)$$

и пусть q_n удовлетворяют следующему условию:

$$\forall k \in \mathbb{Z} \cap \left[\frac{m_n^{1-\alpha}}{\beta_n}, \frac{m_n^{1+\alpha}}{\beta_n} e^{\beta_n} \right] \quad \left\| (q_n + 1) \frac{1}{\beta_n} k \ln k \right\|_{\mathbb{Z}} \leq \beta_n, \quad (1.23)$$

где

$$\|x\|_{\mathbb{Z}} = \min\{\|\ell - x\| : \ell \in \mathbb{Z}\}. \quad (1.24)$$

Тогда поток T^t имеет лебеговский спектральный тип. Таким образом, поток T^t имеет лебеговский спектр кратности один, и вопрос С. Банаха о существовании динамической системы с простым лебеговским спектром имеет положительный ответ в классе действий группы \mathbb{R} с инвариантной мерой.

Схема доказательства. Рассмотрим функцию $f: X \rightarrow \mathbb{C}$, постоянную на уровнях башни U_{n_0} для некоторого номера n_0 . Мы можем однозначно сопоставить функции $f(x)$ функцию $f_{(n_0)}(t)$ на вещественной прямой \mathbb{R} , такую, что $f_{(n_0)}(t) = f(T^t x_0)$ для всякой точки $T^t x_0$, принадлежащей t -уровню башни U_{n_0} . Функция $f_{(n_0)}(t)$ полагается равной нулю вне отрезка $[0, h_{n_0}]$. Далее, для каждого $n > n_0$ определено поднятие функции $f(x)$ на уровне башни U_n и соответствующая функция $f_{(n)}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $\text{supp } f_{(n)} \subseteq [0, h_n]$. Функции $f_{(n)}(t)$ и $f_{(n+1)}(t)$ связаны между собой при помощи отображения проекции ϕ_n ,

$$f_{(n+1)}(t) = f_{(n)}(\phi_n(t)), \quad n = n_0, n_0 + 1, \dots \quad (1.25)$$

Спектральная мера σ_f , отвечающая функции f , определяется из соотношения

$$\langle T^t f, f \rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i t x} d\sigma(x). \quad (1.26)$$

Используя наблюдение, восходящее к работе Дж. Бургена [20], спектральную меру σ_f можно представить в виде бесконечного произведения — обобщённого произведения Рисса

$$\sigma_f = |\hat{f}|^2 \cdot \prod_{n \geq n_0} |\mathcal{P}_n(t)|^2, \quad (1.27)$$

сходящегося в слабой топологии, где

$$\mathcal{P}_n(t) = \frac{1}{\sqrt{q_n}} \sum_{y=0}^{q_n-1} e^{2\pi i t \omega_n(y)}. \quad (1.28)$$

Алгебраическая идея, заложенная в эту формулу заключается в наблюдении о том, что

$$f_{(n+1)}(x) = \sum_{y=0}^{q_n-1} f_{(n)}(x - \omega_n(y)), \quad (1.29)$$

а значит,

$$\hat{f}_{(n+1)}(t) = \hat{f}_{(n)}(t) \cdot \frac{1}{\sqrt{q_n}} \sum_{y=0}^{q_n-1} e^{2\pi i t \omega_n(y)}. \quad (1.30)$$

Основное соображение в доказательстве абсолютной непрерывности спектральных мер σ_f состоит в том, чтобы найти последовательность полиномов Литтлвуда $\mathcal{P}_{m_n, \beta_n, q_n}(t)$, являющихся ε_n -плоскими на расширяющихся интервалах (a_n, b_n) , $a_n \rightarrow 0$, $b_n \rightarrow \infty$, предполагая при этом, что $\varepsilon_n \rightarrow 0$ достаточно быстро. Таким способом мы докажем сходимость обобщённых произведений Рисса

к регулярной плотности на множестве $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ и, пользуясь эргодичностью нашего потока, установим абсолютную непрерывность спектральной меры σ_f на всём \mathbb{R} , поскольку спектральная мера эргодического потока не может иметь атома в нуле, если изучать порождённое потоком унитарное представление на подпространстве функций с нулевым средним (см. [7]). Далее, выбирая подходящие функции f , мы легко проверяем, что максимальный спектральный тип является не только абсолютно непрерывным, но и лебеговским, т.е. плотность спектрального типа не может обращаться в ноль на подмножестве \mathbb{R} положительной лебеговской меры.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для упрощения формулировки теоремы 2 мы потребовали, чтобы точность аппроксимации в условии (1.23) совпадала с малым параметром β_n . В более общей формулировке теоремы точность аппроксимации в (1.23) можно считать независимым параметром $\tilde{\varepsilon}_n$.

§ 2. Полиномы Литлвуда и метод стационарной фазы

2.1. Метод Ван дер Корпта. Рассмотрим вещественную частотную функцию $f(x) \in C^2(\mathbb{R})$ и обратимся к исследованию *осцилляторного интеграла*

$$\int_{x(0)}^{x(1)} e^{itf(x)} dx \quad (2.1)$$

Будем называть критические точки функции $f(x)$, определённые уравнением $f'(x) = 0$, *точками стационарной фазы* для функции $f(x)$. Например, частотная функция $f(x) = a + cx^2$ имеет одну стационарную точку $x^* = -a/(2c)$. Упомянем в качестве иллюстрации метода две общие леммы об интегралах вида (2.1) с квадратичной частотной функцией (см. [2, 11]).

ЛЕММА 3. *Осцилляторный интеграл с квадратичной частотной функцией, имеющей одну стационарную точку в нуле, может быть представлен в виде:*

$$\int_{-1}^1 e^{ikx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{k}} \exp\left(\frac{\pi i}{4}\right) + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad k \rightarrow \infty. \quad (2.2)$$

ЛЕММА 4. *Для вещественных $a, c \neq 0$ и $b > 0$*

$$\int_0^b e^{it(a+cx^2)} dx = A_0 \frac{e^{iat}}{2(|c|t)^{1/2}} - \frac{i}{2bct} e^{i(a+cb^2)t} + O\left(\frac{1}{b^3(ct)^2}\right) \quad (2.3)$$

когда $t \rightarrow \infty$, где

$$A_0 = \int_0^\infty u^{-1/2} e^{iu \operatorname{sgn}(c)} du = e^{\frac{1}{4}\pi i \operatorname{sgn}(c)} \sqrt{\pi}. \quad (2.4)$$

Рассмотрим теперь осцилляторную сумму по промежутку на целочисленной оси \mathbb{Z} вида

$$S = \sum_{a \leqslant y \leqslant b} e^{2\pi i f(y)}, \quad y \in \mathbb{Z}, \quad (2.5)$$

где $f \in C^2([a, b])$. Будем предполагать, что функция $f(x)$ медленно изменяется с ростом y , так, что $|f'(b) - f'(a)| \ll b - a$. Следующая общая процедура носит

название *метода Ван дер Корпута* (см. [11], раздел 4). Сумма S может быть аппроксимирована суммой определённого вида, связанный со множеством точек стационарной фазы [11, 37], а именно, предположим, что f' неубывает на отрезке $[a, b]$, $\kappa_0 = f'(a)$, $\kappa_1 = f'(b)$, $f''(y) \geq 0$, тогда

$$S = \sum_{\kappa_0 < k < \kappa_1} \frac{1}{\sqrt{f''(y_k)}} e^{2\pi i (f(y_k) - ky_k + 1/8)} + \mathcal{E}, \quad (2.6)$$

где y_k — решения уравнения $f'(y_k) = k$, и функцию \mathcal{E} мы в дальнейшем будем интерпретировать как погрешность.

ЛЕММА 5. *Пусть выполнены условия*

$$\lambda_2 \leq f''(y) \leq \text{const} \cdot \lambda_2, \quad |f^{(3)}(y)| \leq \lambda_3, \quad \lambda_2, \lambda_3 > 0, \quad (2.7)$$

и пусть \mathcal{E} определяется из уравнения (2.6). Тогда (Ван дер Корпут, см. [37] и [11], теорема 4.9)

$$\mathcal{E} = O(\lambda_2^{-1/2}) + O(\ln(2 + (b - a)\lambda_2)) + O((b - a)\lambda_2^{1/5}\lambda_3^{1/5}). \quad (2.8)$$

Для того чтобы получить более точную (более сильную) оценку осцилляторных сумм такого вида, заметим, что, если значения κ_0 и κ_1 производной f' в точках a и b находятся на некотором расстоянии от множества целых чисел, то оценка становится более точной в первом слагаемом, что установлено в работе Мина [40] для случая алгебраической функции f . Мы будем использовать следующий более общий результат Лиу ([37], теорема 1; мы цитируем теорему Лиу, сохраняя обозначения, использованные в оригинальной формулировке, заменяя только β_k на B_k , и (α, β) на (κ_0, κ_1) , поскольку символ β используется в работе для обозначения параметра частотной функции $\omega_{m,\beta,q}(y)$).

ЛЕММА 6. *Пусть $f(y) \in C^5([a, b])$ — вещественная функция со свойством $f''(y) > 0$, и пусть R , U и C_j , $j = 1, \dots, 6$ — положительные константы, такие, что*

$$C_1 R^{-1} \leq f''(y) \leq C_2 R^{-1}, \quad |B_r(y)| \leq C_r U^{2-r}, \quad U \geq 1, \quad 3 \leq r \leq 5, \quad (2.9)$$

$$B_r(y) = f^{(r)}(y)/f''(y). \quad (2.10)$$

Пусть также $|3B_4(y) - 5B_3^2(y)| \geq C_6 U^{-2}$ для любого $y \in [a, b]$. Тогда

$$\sum_{a \leq y \leq b} e^{2\pi i f(y)} = \sum_{\kappa_0 < k < \kappa_1} \frac{1}{\sqrt{f''(y_k)}} e^{2\pi i (f(y_k) - ky_k + 1/8)} + \mathcal{E}, \quad (2.11)$$

где $\kappa_0 = f'(a)$, $\kappa_1 = f'(b)$, точки $y_k \in \mathbb{R}$ — решения уравнения $f'(y_k) = k$ при $k \in \mathbb{Z}$, при этом погрешность \mathcal{E} представляется в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + O\left(\ln\left(2 + \frac{b-a}{R}\right)\right) + O\left(\frac{b-a+R}{U}\right) + \\ + O\left(\min\{\sqrt{R}, \max\left(\frac{1}{\langle \kappa_0 \rangle}, \frac{1}{\langle \kappa_1 \rangle}\right)\}\right), \end{aligned} \quad (2.12)$$

где O -большие подразумевают абсолютную оценку с константой, зависящей только от значений констант C_1, \dots, C_6 ,

$$\mathcal{E}_1 = b_{\kappa_0} |f''(a)|^{-1/2} e^{2\pi i (f(a) - \kappa_0 a + 1/8)}, \quad (2.13)$$

$$\mathcal{E}_2 = b_{\kappa_1} |f''(b)|^{-1/2} e^{2\pi i (f(b) - \kappa_1 b + 1/8)}, \quad (2.14)$$

где $b_\alpha = 1/2$, если $\alpha \in \mathbb{Z}$ и $b_\alpha = 0$ иначе; а величина $\langle \alpha \rangle = \kappa_1 - \kappa_0$, если $\alpha \in \mathbb{Z}$ и $\langle \alpha \rangle = \|\alpha\|_{\mathbb{Z}}$, где $\|\alpha\|_{\mathbb{Z}} = \min_{n \in \mathbb{Z}} |n - \alpha|$, т.е.

$$\langle \kappa_0 \rangle = \min_{n \in \mathbb{Z}} |n - \kappa_0|, \quad \langle \kappa_1 \rangle = \min_{n \in \mathbb{Z}} |n - \kappa_1|, \quad (2.15)$$

если $\kappa_0 \notin \mathbb{Z}$ (соответственно, $\kappa_1 \notin \mathbb{Z}$).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Мы будем применять лемму 6 в ситуации, когда частотная функция $f(y)$ зависит от параметра t , точнее $f(y) = f(y, t)$, $a = a(t)$, $b = b(t)$, причём для нас будут важны “интегральные” оценки сумм, иными словами, оценки сумм в *среднем* относительно параметра t (например, в пространстве $L^1([t_1, t_2])$, где $t \in [t_1, t_2]$). В таких оценках можно не учитывать значения сумм и ошибок $\mathcal{E}(t)$ на множествах меры пуль в промежутке изменения параметра t . Таким образом, нулевой вклад во все интегральные оценки будут давать суммы \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 и, кроме того, можно считать, что с вероятностью 1 относительно параметра t граничные значения производной $\kappa_0(t)$ и $\kappa_1(t)$ не принадлежат \mathbb{Z} .

§ 3. Тригонометрические суммы, связанные с движением свободной квантовой частицы, определяемым экспоненциальным гамильтонианом

3.1. Идея метода. Рассмотрим свободную квантовую частицу, движущуюся вдоль вещественной прямой \mathbb{R} в соответствии с дифференциальным уравнением

$$i \frac{d}{dt} \psi = H \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right), \quad (3.1)$$

построенном на основе классического гамильтониана $\hat{H}(p) = \frac{p^2}{2}$, где p – импульсная переменная. С гамильтонианом $\hat{H}(p)$ можно связать действие $R_t: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ мультипликативной группы $\mathbb{R}_+ = \{t > 0\}$, а именно, решая относительно переменной p уравнение

$$t \frac{\partial}{\partial p} \hat{H}(p) = k, \quad (3.2)$$

мы приходим к соотношению $p = k/t$ для стационарного значения импульса в обобщённом смысле, связанного с величиной k в момент времени t (ниже мы применяем этот метод для $k \equiv 0 \pmod{1}$). Определим действие R_t формулой

$$R_t: p \mapsto t^{-1} p. \quad (3.3)$$

Будем теперь исследовать движение свободной частицы на компактном многообразии $T_l = \mathbb{R}/l\mathbb{Z}$. Тогда, фактически, R_t задаёт динамику множества стационарных значений импульса при изменении t , которые появляются в приближённом вычислении по методу Ван дер Корптуа суммы

$$\mathcal{P}(t) = \sum_{p \in [0, l] \cap \delta\mathbb{Z}} e^{it\hat{H}(p)}, \quad \delta = l^{-1}, \quad (3.4)$$

которая включает в себя решение $e^{it\hat{H}(p)}$ дифференциального уравнения (3.1). Отметим, что действуя на l -периодических функциях, отображение R_2 является двойственным к преобразованию окружности

$$\mathbb{T}_l \rightarrow \mathbb{T}_l: p \rightarrow 2p \pmod{l}, \quad (3.5)$$

которое обладает свойством *гиперболичности*, где $\mathbb{T}_l = \mathbb{R}/l\mathbb{Z}$. Хаотический характер поведения траекторий данного действия связан со свойствами параметрического семейства сумм $\mathcal{P}(t)$. Идея построения семейства сумм $\mathcal{P}(t)$, обладающего медленной динамикой, заключается в том, чтобы модифицировать динамическую систему R_t малым возмущением классического гамильтониана $\hat{H}(p)$, который, с учётом умножения на t , играет роль частотной функции в сумме $\mathcal{P}(t)$ ¹, так чтобы относительно нового гамильтониана

$$\tilde{H}(p) = E_0 + \frac{1}{\beta^2} e^{\beta p}, \quad (3.6)$$

сопряжённая однопараметрическая группа преобразований $\tilde{R}_t(p)$ действовало жёсткими сдвигом прямой \mathbb{R} , а именно, $\tilde{R}_t(p) = p - \ln t$. Важным свойством действия $\tilde{R}_t(p)$ является *сохранение расстояния* между стационарными фазами при изменении t . Заметим, что (ср. [49])

$$\tilde{H}(p) = E_0 + \frac{1}{\beta^2} + \frac{p}{\beta} + \frac{p^2}{2} + \beta \frac{p^3}{6} + \dots, \quad (3.7)$$

где $\beta \rightarrow 0$ — малый параметр. Таким образом, при $\beta \rightarrow 0$ функция $\tilde{H}(p)$ аппроксимирует функцию $\hat{H}(p)$ с точностью до линейного по p слагаемого. Используя метод Ван дер Корпута, можно показать, что как для функции $\hat{H}(p)$, так и для функции $\tilde{H}(p)$ при $t \rightarrow \infty$ верна следующая оценка:

$$S(t) \approx \sum_{0 < y_k(t) < l} L_t(y_k(t), t) \approx \int \tilde{R}_t \phi \cdot d\mathcal{L}_t, \quad (3.8)$$

где $\phi(p) = \mathbf{1}_{[0,l]}$ — характеристическая функция (индикатор) отрезка $[0, l]$ (в общем случае можно рассмотреть произвольную кусочно-гладкую функцию с компактным носителем), $\tilde{R}_t \phi(p) = \phi(\tilde{R}_t(p))$, и \mathcal{L}_t — некоторое дискретное распределение (*обобщённое преобразование Лэжандра*), сосредоточенное, после экстрагирования \tilde{R}_t , на не зависящем от t дискретном множестве стационарных импульсов $\{y_k(0)\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Чтобы формализовать данную идею рассмотрим более детально процедуру применения метода Ван дер Корпута к тригонометрической сумме

$$\mathcal{P}(t) = \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{y=0}^{q-1} e^{2\pi i t \tilde{H}(p)}, \quad (3.9)$$

¹Существенной особенностью этого возмущения является появление старших производных в гамильтониане в координатном представлении, соответственно, старших степеней p в разложении функции $\tilde{H}(p)$.

определенной частотной функцией $t\tilde{H}(p)$, зависящей от параметра t . В силу леммы 6

$$\mathcal{P}(t) \approx \sum_{\alpha < k < \beta} \frac{1}{\sqrt{t\tilde{H}''(y_k)}} e^{2\pi i(t\tilde{H}(y_k) - ky_k + 1/8)} + \mathcal{E}(t), \quad (3.10)$$

где $\mathcal{E}(t)$ — погрешность, которую мы впоследствии оценим. Здесь $y_k = y_k(t)$ определяется из уравнения $t\tilde{H}'(y_k(t)) = k$. Особый интерес с точки зрения вычисления данной суммы представляет фазовая составляющая $t\tilde{H}(y_k) - ky_k$. Найдём критерий возникновения тождества

$$\frac{d}{dt} t\tilde{H}(y_k(t)) \equiv 0. \quad (3.11)$$

Имеем,

$$\frac{d}{dt}(t\tilde{H}(y_k(t))) = \tilde{H}(y_k) + t\tilde{H}'(y_k)\dot{y}_k = 0, \quad (3.12)$$

кроме того, по построению

$$0 = \dot{k} = \frac{d}{dt}(t\tilde{H}'(y_k(t))) = \tilde{H}'(y_k) + t\tilde{H}''(y_k)\dot{y}_k, \quad (3.13)$$

откуда следует, что

$$-t\dot{y}_k = \frac{\tilde{H}(y_k)}{\tilde{H}'(y_k)} = \frac{\tilde{H}'(y_k)}{\tilde{H}''(y_k)}. \quad (3.14)$$

Таким образом, учитывая, что при изменении t точки $y_k(t)$ могут принимать произвольные значения в области определения t , функция $\tilde{H}(y)$ должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\tilde{H}\tilde{H}'' - (\tilde{H}')^2 = 0, \quad (3.15)$$

общее решение которого имеет вид

$$\tilde{H}(y) = C e^{\beta y}. \quad (3.16)$$

Интересно отметить, что как первое, так и второе соображение из рассмотренных в этом разделе приводят к экспоненциальному гамильтониану, причём пересечение классов даёт множество функций $\tilde{H}(y)$, заданное уравнением (3.16). Далее, отметим, что добавление константы E_0 к $\tilde{H}(y)$ приводит всего лишь к появлению линейного фазового слагаемого $E_0 t$.

3.2. Основная конструкция. Рассмотрим тригонометрическую сумму

$$S_{\beta,q}(t) = \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{y=0}^{q-1} e^{2\pi i t \omega(y)}, \quad \omega(y) = \omega_0 + \frac{q}{\beta^2} e^{\beta y/q}, \quad (3.17)$$

где $q \in \mathbb{N}$, $0 < \beta < 1$, $\beta^{-1} \in \mathbb{N}$ (см. сноска²). Добавление константы к $\omega(y)$ не влияет на значение абсолютной величины $|S_{\beta,q}(t)|$, поэтому в дальнейшем для

²Сейчас мы рассмотрим случай $\beta^{-1} \in \mathbb{N}$, поскольку данное предположение приводит к наиболее простым выкладкам. В то же время, основной результат работы о плоских полиномах Литлвуда с коэффициентами $\{0, 1\}$ сохраняется с небольшой модификацией и для произвольного $\beta \in (0, 1)$.

удобства мы считаем, что $\omega_0 = 0$. В соответствии со смыслом конструкции естественными предположениями о параметрах t , β и q является следующий набор соотношений: $\beta \ll t \ll \beta^{-1} \ll q$, причём явление возникновения плоских сумм $S_{\beta,q}(t)$ наблюдается при $t \rightarrow \infty$. Переходя к описанию конструкции, перечислим несколько простых свойств функции $\omega(y)$:

- (a) $\omega^{(r)}(y)$ возрастает для любого r ;
- (b) $\omega'(y) \geq \beta^{-1}$;
- (c) $\omega''(y) = \frac{1}{q}(1 + O(\beta))$, где O -большое рассматривается при $\beta \rightarrow 0$, когда $0 \leq y < q$.

Обозначим

$$\mathcal{K}(t) = (K_0(t), K_1(t)), \quad (3.18)$$

$$K_0(t) = \frac{t}{\beta}, \quad K_1(t) = \frac{t}{\beta} e^{\beta}. \quad (3.19)$$

Характерным свойством множества $\mathcal{K}(t)$ является следующая формула:

$$y_k(t) \in (0, q) \iff k \in \mathcal{K}(t), \quad \text{где } k \in \mathbb{Z}, \quad (3.20)$$

где $y_k(t)$ — точки стационарной фазы, определяемые из уравнения $\frac{\partial}{\partial y} t\omega(y_k(t)) = k$ при $k \in \mathbb{Z}$.

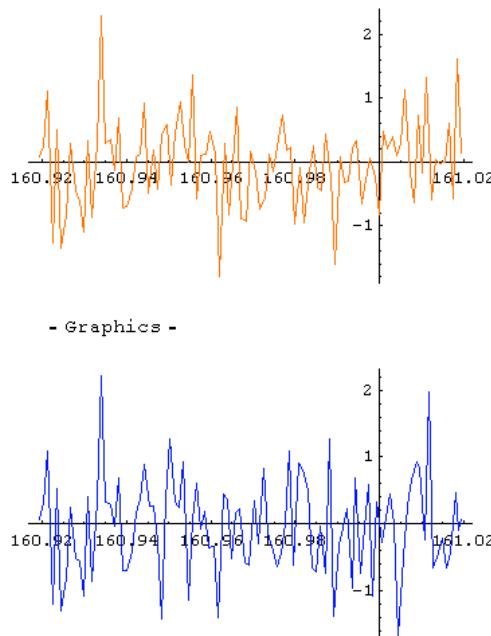


Рис. 3. Сравнение сумм $S_{\beta,q}(t)$ и $\Sigma_{\beta,q}(t)$

ЛЕММА 7. Предположим, что $\beta^{-1} \in \mathbb{N}$. Тогда сумма $S_{\beta,q}(t)$ аппроксимируется (см. рис. 5) суммой специального вида, взятой по множеству стационарных точек $\{y_k(t)\}$,

$$S_{\beta,q}(t) = \sum_{K_0(t) < k < K_1(t)} \frac{e^{2\pi i (-ky_k(t))}}{\sqrt{t}} \gamma(y_k(t)) + \frac{\mathcal{E}(t)}{\sqrt{q}}, \quad \gamma(y) = e^{-\frac{1}{2}\beta y/q}, \quad (3.21)$$

причём погрешность $\mathcal{E}(t)$ удовлетворяет следующей оценке:

$$\left| \frac{\mathcal{E}(t)}{\sqrt{q}} \right| = O \left(\frac{\max\{t^{-1}, \ln t\}}{\sqrt{q}} \right) + O \left(\frac{1}{\sqrt{q}} \min\left\{ \sqrt{\frac{q}{t}}, \nu_\beta(t) \right\} \right), \quad (3.22)$$

$$\nu_\beta(t) = \frac{1}{\left\| \frac{t}{\beta} \right\|_{\mathbb{Z}}} + \frac{1}{\left\| \frac{t}{\beta} e^\beta \right\|_{\mathbb{Z}}}, \quad (3.23)$$

где $\|x\|_{\mathbb{Z}} = \min_{n \in \mathbb{Z}} |n - x|$. Кроме того, для любого t сумма $S_{\beta,q}(t)$ удовлетворяет очевидной оценке $|S_{\beta,q}(t)| \leq \sqrt{q}$.

Здесь и далее для упрощения выкладок мы используем сокращённые обозначения: $y_k = y_k(t)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Величина $\nu_\beta(t)$, представленная в (3.23) явно, фактически является функцией от граничных значений производной частотной функции,

$$\nu_\beta(t) = \frac{1}{\|K_0(t)\|_{\mathbb{Z}}} + \frac{1}{\|K_1(t)\|_{\mathbb{Z}}}, \quad (3.24)$$

соответственно, оценка ошибки $\mathcal{E}_3(t)$ достигает максимального значения в момент *бифуркации* (перестройки) конечного множества стационарных точек $\{y_k(t)\}_{k \in \mathcal{K}(t)}$, а именно, когда одна из точек покидает промежуток $[0, q]$ или появляется новая точка.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Сформулированная лемма нами будет применяться в ситуациях, когда требуется оценка погрешности относительно интегральной нормы, либо оценка на множестве полной лебеговской меры, поэтому можно пренебречь счётым множеством точек t . Значит, мы можем пренебречь слагаемыми $\mathcal{E}_1(t)$ и $\mathcal{E}_2(t)$ в оценке (2.14).

ЗАМЕЧАНИЕ 5. В большинстве формулировок утверждений по ходу дальнего изложения мы приводим точные оценки и конкретизируем смысл оценок вида $O(X)$ и $o(X)$. Тем не менее, заметим, что обычно $O(X)$ будут рассматриваться при предельном переходе $\beta \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$ и $q \rightarrow \infty$ (более того, в указанном порядке); параметр q изменяется наиболее быстро).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $f(y) = t\omega(y)$ и заметим, что $\omega'(y) = \beta q^{-1}\omega(y)$ и $f'(y) = \beta q^{-1}f(y)$. Применяя основную лемму 6 для $a = 0$, $b = q$, имеем

$$\begin{aligned} S_{\beta,q}(t) &= \sum_{K_0(t) < k < K_1(t)} \frac{e^{2\pi i(f(y_k) - ky_k)}}{\sqrt{q|f''(y_k)|}} + q^{-1/2}\mathcal{E}(t) = \\ &= \sum_{K_0(t) < k < K_1(t)} \frac{e^{2\pi i(f(y_k) - ky_k)}}{\sqrt{t}} \gamma(y_k) + q^{-1/2}\mathcal{E}(t) = \\ &= \sum_{K_0(t) < k < K_1(t)} \frac{e^{2\pi i(-ky_k)}}{\sqrt{t}} \gamma(y_k) + q^{-1/2}\mathcal{E}(t), \end{aligned} \quad (3.25)$$

где $f(y_k) = \beta^{-1}qf'(y_k) = \beta^{-1}qk \in \mathbb{Z}$, поскольку $\beta^{-1} \in \mathbb{Z}$. Далее,

$$q|f''(y_k)| = q \frac{t}{q} e^{\beta y/q} = t\gamma^{-2}(y_k), \quad (3.26)$$

где

$$\gamma(y) = e^{-\frac{1}{2}\beta y/q}, \quad e^{\beta y/q} = 1 + O(\beta), \quad (3.27)$$

и погрешность $\mathcal{E}(t)$ имеет следующий вид (сохраняем обозначения леммы 6)

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) &= \mathcal{E}_1(t) + \mathcal{E}_2(t) + \\ &\quad + O(\ln(2 + (b-a)R^{-1})) + O((b-a+R)U^{-1}) + \\ &\quad + O(\min\{\sqrt{R}, \max\left(\frac{1}{\langle K_0(t) \rangle}, \frac{1}{\langle K_1(t) \rangle}\right)\}), \end{aligned} \quad (3.28)$$

где $a = 0$, $b = q$, и значения R и U вычисляются ниже:

$$b - a = q, \quad K_1(t) - K_0(t) = t(1 + O(\beta)) \sim t, \quad (3.29)$$

$$\frac{t}{q} \leq f''(y) \leq \frac{t}{q}(1 + O(\beta)), \quad (3.30)$$

$$R = \frac{q}{t}, \quad (3.31)$$

$$f^{(2+j)}(y) = \frac{\beta^j}{q^j} f''(y), \quad B_{2+j} = \left(\frac{\beta}{q}\right)^j, \quad j = 1, 2, 3, \quad (3.32)$$

$$U = \frac{q}{\beta} > 1, \quad (3.33)$$

$$|3B_4 - 5B_3^2| = \left| 3\frac{\beta^2}{q^2} - 5\left(\frac{\beta}{q}\right)^2 \right| = 2\frac{\beta^2}{q^2} = 2U^{-2}. \quad (3.34)$$

Принципиально важный пункт рассуждения состоит в том, что константы C_1, \dots, C_6 леммы 6 *одинаковы*, независимо от значений параметров леммы, они не зависят от β и q . Таким образом, применяя лемму 6, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) &= \mathcal{E}_1(t) + \mathcal{E}_2(t) + O(\ln(2 + t)) + O\left((q + t^{-1}q)\frac{\beta}{q}\right) + \mathcal{E}_3(t) = \\ &= \mathcal{E}_1(t) + \mathcal{E}_2(t) + O(\max\{t^{-1}, \ln(t)\}) + \mathcal{E}_3(t), \end{aligned} \quad (3.35)$$

где

$$\mathcal{E}_3(t) = O(\min\{\sqrt{\frac{q}{t}}, \max\left(\frac{1}{\langle K_0(t) \rangle}, \frac{1}{\langle K_1(t) \rangle}\right)\}). \quad (3.36)$$

Слагаемые $\mathcal{E}_1(t)$ и $\mathcal{E}_2(t)$ имеют счётный носитель и игнорируются. Для того чтобы вычислить $\mathcal{E}_3(t)$ рассмотрим зависящее от t дискретное множество

$$\Lambda(t) = \{y_k(t)\}_{k \in \mathbb{Z}, k > 0}, \quad y_k(t) = \frac{q}{\beta} \ln \frac{\beta k}{t}. \quad (3.37)$$

Множество $\Lambda(t)$ движется под действием параллельных переносов вдоль прямой, когда t пробегает \mathbb{R}_+ . Величина $\mathcal{E}_3(t) = O(\sqrt{q/t})$ принимает большие значения, как только какая-либо точка множества $\Lambda(t)$ приближается к границе области $[0, q]$ (области суммирования по y). В то же время для типичного значения t выполнено: $\mathcal{E}_3(t) = O(1/\sqrt{t})$. Переходя к формальным выкладкам, вычислим явно $\langle K_0(t) \rangle$ и $\langle K_1(t) \rangle$:

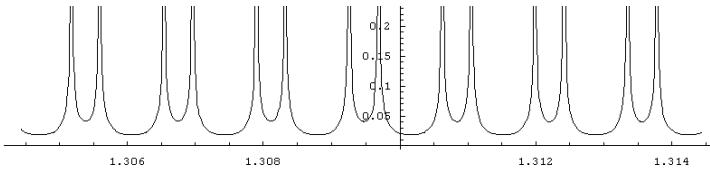


Рис. 4. Оценка для $\mathcal{E}_3(t)$

$$\langle K_0(t) \rangle = O(\|f'(0)\|_{\mathbb{Z}}) = O\left(\left\|\frac{t}{\beta}\right\|_{\mathbb{Z}}\right), \quad \|x\|_{\mathbb{Z}} = \min_{n \in \mathbb{Z}} |n - x|. \quad (3.38)$$

Аналогично

$$\langle K_1(t) \rangle = O\left(\left\|\frac{t}{\beta} e^{\beta}\right\|_{\mathbb{Z}}\right). \quad (3.39)$$

Таким образом, мы получаем следующую оценку погрешности в формуле для суммы $S_{\beta,q}(t)$

$$\left|\frac{\mathcal{E}(t)}{\sqrt{q}}\right| = O\left(\frac{\max\{t^{-1}, \ln t\}}{\sqrt{q}}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{q}} \min\{\sqrt{\frac{q}{t}}, \nu_{\beta}(t)\}\right) \pmod{0}. \quad (3.40)$$

ЛЕММА 8. Рассмотрим сумму $S_{\beta,q}(t)$ как функцию переменной t , которая изменяется в пределах отрезка $[t_1, t_2] \subset (0, +\infty)$, отделённого от нуля, для зафиксированных β и q , где $\beta^{-1} \in \mathbb{N}$. Пусть также выполнены условия

$$t_1 \geq 1, \quad t_2 - t_1 \geq \beta, \quad t_2 \leq q, \quad u \quad \beta^{-1} \leq q. \quad (3.41)$$

Тогда

$$\|q^{-1/2} \mathcal{E}(t)|_{[t_1, t_2]}\|_{\infty} = O\left(\frac{\max\{1, \ln t_2\}}{\sqrt{q}}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{t_1}}\right), \quad (3.42)$$

$$\|q^{-1/2} \mathcal{E}(t)|_{[t_1, t_2]}\|_1 \lesssim (t_2 - t_1) \frac{\ln q}{\sqrt{q}}. \quad (3.43)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $t \geq \beta$

$$\int_{t_1}^{t_2} |\mathcal{E}(t)| dt \lesssim \frac{t_2 - t_1}{\beta} \cdot \int_0^\beta \min\left\{\sqrt{\frac{q}{t}}, \frac{\beta}{t}\right\} d\tau \lesssim (t_2 - t_1) \ln q, \quad (3.44)$$

следовательно,

$$\int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{\mathcal{E}(t)}{\sqrt{q}} \right| dt \lesssim \frac{(t_2 - t_1) \ln t_2 + (t_2 - t_1) \ln q}{\sqrt{q}} \lesssim (t_2 - t_1) \frac{\ln q}{\sqrt{q}}. \quad (3.45)$$

Теперь мы применим метод Ван дер Корпута в форме приведённых выше лемм для доказательства того, что $|S_{\beta,q}(t)| \approx 1$ для большинства t (относительно меры Лебега на R), когда $\beta \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$, $q \rightarrow \infty$.

ЛЕММА 9. *Пусть выполнены условия леммы 8. Тогда имеет место следующая упрощенная оценка:*

$$S_{\beta,q}(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{K_0(t) < k < K_1(t)} e^{2\pi i (-ky_k)} + O(\beta\sqrt{t}) + \frac{\mathcal{E}(t)}{\sqrt{q}}, \quad (3.46)$$

где $\frac{\mathcal{E}(t)}{\sqrt{q}}$ оценивается, как в леммах 7 и 8.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы следует из леммы 8 и простого наблюдения о том, что рассматриваемая сумма по индексу k содержит не более, чем $K_1(t) - K_0(t) \sim t$ слагаемых, с учётом того, что $\gamma(y)$ является β -близким 1 для $y \in [0, q]$, $\gamma(y) = e^{-\frac{1}{2}\beta y/q} = 1 + O(\beta)$.

В этой точке рассуждения отметим, что в сумме по индексу k , аппроксимирующей исходную сумму $S_{\beta,q}(t)$, мы обнаруживаем редуцированную (содержащую меньшее число слагаемых) сумму аналогичного вида, к которой снова можно применить метод Ван дер Корпута. Оказывается, что эта вторая итерация метода Ван дер Корпута приводит к сумме из одного слагаемого (по модулю равного 1) и процесс завершается, таким образом, мы доказываем, что исходная сумма $S_{\beta,q}(t)$ является почти плоской. Вычислим новую частотную функцию $\eta_{\beta,q}(k)$,

$$\eta_{\beta,q}(k) = -ky_k, \quad (3.47)$$

построенную на основе последовательности точек стационарной фазы $y_k = y_k(t)$, порождённых параметрическим семейством функций $t\omega(y)$:

$$-ky_k = -\frac{qk}{\beta} \ln \frac{\beta k}{t} = x_{\beta,q}(t)k - q \cdot \Omega_\beta(k) \stackrel{\text{def}}{=} \eta_{\beta,q}(k), \quad (3.48)$$

где

$$x_{\beta,q}(t) = \frac{q}{\beta} \ln \frac{t}{\beta} \quad (3.49)$$

и

$$\Omega_\beta(k) = \frac{1}{\beta} k \ln k. \quad (3.50)$$

Одна из идей, приводящих к рассмотрению экспоненциального гамильтониана, состоит в том, чтобы потребовать сохранение расстояния между стационарными фазами, $y_{k_1}(t) - y_{k_2}(t) = \text{const}$ для любых зафиксированных k_1 и k_2 .

Возмущая экспоненциальный гамильтониан, можно построить континуальное семейство сумм, являющихся плоскими и обладающими другими специальными свойствами. В то же время, удивительное наблюдение состоит в том, что для нахождения плоских сумм дополнительных модификаций исходной конструкции не требуется. Рассмотренное множество параметрических сумм с экспоненциальными частотными функциями уже содержит плоские суммы, правда, такие элементы являются в данном семействе крайне редкими, о чём будет подробно сказано ниже. Важным эффектом от применения сумм, включающих экспоненциально-лестничные частотные функции, является то, что построенные на их основе динамические системы конструируются *яено*, без привлечения стохастических методов.

ЛЕММА 10. *Пусть \mathcal{K} – конечное подмножество \mathbb{Z} . Для любого $\varepsilon > 0$ существует бесконечно много значений $q = q_j \rightarrow \infty$, таких, что для всех $k \in \mathcal{K}$*

$$q_j \cdot \Omega_\beta(k) = -\Omega_\beta(k) + O(\varepsilon) \pmod{1}. \quad (3.51)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы следует из теоремы Пуанкаре о возвращении для преобразования сдвига на торе $\prod_{k \in \mathcal{K}} \mathbb{T}$, заданного вектором $\Omega_\beta(k)$.

СЛЕДСТВИЕ 11. *Когда t изменяется в пределах ограниченного отрезка, отдельённого от нуля, $t \in [t_1, t_2]$, индекс k принимает конечное множество значений $(K_0(t_1), K_1(t_2)) \cap \mathbb{Z}$. Значит, мы можем применить предыдущую лемму к динамической системе, определяемой сдвигом на вектор $\Omega_\beta(k)$, фазовое пространство которой представляет из себя конечномерный тор $\mathbb{T}^{\{K_0(t), \dots, K_1(t)\}}$.*

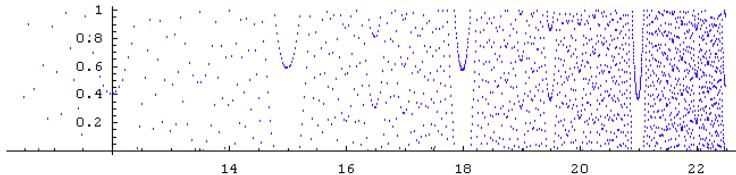


Рис. 5. График частотной функции $\Omega_\beta(k)$

ЛЕММА 12. *Редуцированная осцилляторная сумма*

$$\Sigma_{\beta,q}(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{K_0(t) < k < K_1(t)} e^{2\pi i \eta_{\beta,q}}, \quad \eta_{\beta,q}(k) = -ky_k, \quad (3.52)$$

определенная частотной функцией $\eta_{\beta,q}(k)$, аппроксимируется суммой с частотной функцией $\Omega_\beta(k)$, а именно, если

$$q \cdot \Omega_\beta(k) = -\Omega_\beta(k) + O(\delta) \pmod{1} \quad (3.53)$$

то

$$\left| \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{K_0(t) < k < K_1(t)} e^{2\pi i \eta_{\beta,q}(k)} - \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{K_0(t) < k < K_1(t)} e^{2\pi i (x_{\beta,q}(t)k + \Omega_{\beta}(k))} \right| = O(\delta \sqrt{t}). \quad (3.54)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\eta_{\beta,q}(k) = x_{\beta,q}(t)k - q\Omega_{\beta}(k)$, лемма следует из наблюдения о том, что каждая из сумм содержит не более $K_1(t) - K_0(t) \sim t$ слагаемых. Отметим, что существование значений q , удовлетворяющих (3.53), следует из леммы 10 (в настоящей лемме мы формулируем существование q как условие).

Таким образом, сейчас мы можем перейти к изучению сумм, построенных на основе частотной функции $\Omega_{\beta}(k)$ с дополнительным линейным слагаемым xk

$$\Phi_{t,x,\beta} = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{K_0(t) < k < K_1(t)} \exp(2\pi i (xk + \Omega_{\beta}(k))). \quad (3.55)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Применяя метод Ван дер Корпута, мы снова начинаем интерпретировать символ k как величину, принимающую не только целые, но и вещественные значения, иными словами, мы рассматриваем частотную функцию как ограничение на решётку \mathbb{Z} функции, определённой на вещественной прямой \mathbb{R} .

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Ключевое явление, позволяющее обнаружить плоские суммы в рассматриваемом семействе, состоит в том, что, когда k пробегает интервал $(K_0(t), K_1(t))$,

$$k \in (K_0(t), K_1(t)) = \left(\frac{t}{\beta}, \frac{t}{\beta} e^{\beta} \right) \quad (3.56)$$

производная $\Omega_{\beta}(k) = \frac{1}{\beta}(1 + \ln k)$ возрастает *ровно на единицу*:

$$\Omega'_{\beta}(K_1(t)) - \Omega'_{\beta}(K_0(t)) = \frac{1}{\beta} \ln \frac{t}{\beta} - \frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{t}{\beta} e^{\beta} \right) = 1, \quad (3.57)$$

следовательно, существует (почти наверное) ровно одна стационарная фаза $k^* \in (K_0(t), K_1(t))$ (заметим, что здесь $k^* \in \mathbb{R}$; мы сохранили букву k для удобства восприятия выкладок). Отметим также, что частотная функция в редуцированной сумме не зависит явным образом от t . Зависимость от t выражается в том, что с изменением t движутся границы интервала суммирования $K_0(t)$ и $K_1(t)$.

Вычислим производную частотной функции в сумме $\Phi_{t,x,\beta}$:

$$\frac{\partial}{\partial k} (xk + \Omega_{\beta}(k)) = x + \Omega'_{\beta}(k). \quad (3.58)$$

ЛЕММА 13. Пусть выполнены следующие условия:

$$t \geq 1, \quad 0 < \beta < 1, \quad \beta^{-1} \in \mathbb{N}, \quad (3.59)$$

и пусть (k^*, ℓ) — единственное решение уравнения

$$x + \Omega'_\beta(k^*) = \ell, \quad \text{где } \ell \in \mathbb{Z}, \quad k \in (K_0(t), K_1(t)). \quad (3.60)$$

Здесь ℓ — определённое однозначно (для почти всех t) целое значение производной частотной функции, принимаемое в некоторой вещественной точке $k^* \in (K_0(t), K_1(t))$. Тогда

$$\Phi_{t,x,\beta} = e^{2\pi i (xk^* + \Omega_\beta(k^*) - \ell k^*)} + t^{-1/2} \mathcal{E}_\Phi(t, x, \beta), \quad (3.61)$$

$$t^{-1/2} \mathcal{E}_\Phi(t, x, \beta) = O(\beta) + \frac{1}{\sqrt{t}} O\left(\min\{\sqrt{t}, \frac{1}{\|\frac{1}{\beta} \ln \frac{t}{\beta} + x\|_{\mathbb{Z}}}\}\right). \quad (3.62)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим лемму 6 к частотной функции $xk + \Omega_\beta(k)$,

$$(xk + \Omega_\beta(k))'_k = x + \frac{1}{\beta}(1 + \ln k), \quad (xk + \Omega_\beta(k))''_k = \frac{1}{\beta k}. \quad (3.63)$$

Заметим, что $k \sim t/\beta$, следовательно мы можем положить

$$R^{-1} = \frac{1}{\beta \frac{t}{\beta}}, \quad \text{и} \quad R = t. \quad (3.64)$$

Далее, вычислим

$$B_3(k) = -\frac{1}{k}, \quad B_4(k) = \frac{2}{k^2}, \quad B_5(k) = -\frac{6}{k^3}, \quad (3.65)$$

$$U = \frac{t}{\beta} \sim k > 1, \quad |3B_4 - 5B_3^2| = \frac{1}{k^2} \leq U^{-2}, \quad (3.66)$$

так как $k \geq K_0(t) = t/\beta = U$. Далее, напомним, что $\Omega'_\beta(K_1(t)) - \Omega'_\beta(K_0(t)) = 1$. Значит, имеет место следующее представление для суммы $\Phi_{t,x,\beta}$:

$$\Phi_{t,x,\beta} = \frac{1}{\sqrt{t} |\Omega''_\beta(k^*)|} e^{2\pi i (xk^* + \Omega_\beta(k^*) - \ell k^*)} + t^{-1/2} \mathcal{E}_\Phi(t, x, \beta), \quad (3.67)$$

где (k^*, ℓ) — единственное решение уравнения $x + \Omega'_\beta(k^*) = \ell$, где $\ell \in \mathbb{Z}$ и $k^* \in (K_0(t), K_1(t))$. Очевидно, коэффициент при экспоненте в правой части близок к 1 по абсолютной величине,

$$\frac{1}{\sqrt{t} |\Omega''_\beta(k^*)|} = \left(t \frac{1}{\beta k^*}\right)^{-1/2} = \left(t \frac{1}{\beta \cdot \beta^{-1} t (1 + O(\beta))}\right)^{-1/2} = 1 + O(\beta), \quad (3.68)$$

и, применяя лемму 6, мы получаем следующую оценку для погрешности \mathcal{E}_0

$$\mathcal{E}_0(t, x) = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + O(1) + \mathcal{E}_3, \quad \mathcal{E}_3 = O(\min\{\sqrt{t}, \tilde{\nu}\}), \quad (3.69)$$

где

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\|(xk + \Omega_\beta(k))'|_{k=K_0(t)}\|_{\mathbb{Z}}} = \frac{1}{\|x + \frac{1}{\beta} \ln \frac{t}{\beta}\|_{\mathbb{Z}}}. \quad (3.70)$$

Наконец,

$$t^{-1/2} \mathcal{E}_\Phi(t, x) = O(\beta) + \frac{1}{\sqrt{t}} O\left(\min\{\sqrt{t}, \frac{1}{\|x + \frac{1}{\beta} \ln \frac{t}{\beta}\|_{\mathbb{Z}}}\}\right). \quad (3.71)$$

Теперь, чтобы объединить два шага процедуры последовательного применения метода Ван дер Корпта, состоящих в переходе от суммы $S_{\beta,q}(t)$ к сумме $\Phi_{t,x,\beta}$ и в последующем применении леммы 13, достаточно оценить погрешность, связанную в краевым эффектом прохождения стационарной фазы через границу области, и определяемую фазовым слагаемым $x_{\beta,q}(t) + \frac{1}{\beta} \ln \frac{t}{\beta}$.

ЛЕММА 14. *Выражение $x + \frac{1}{\beta} \ln \frac{t}{\beta}$ в формуле (3.71) при $x = x_{\beta,q}(t)$ принимает следующий вид:*

$$v_{\beta,q}(t) = x_{\beta,q}(t) + \frac{1}{\beta} \ln \frac{t}{\beta} = (q+1) \frac{1}{\beta} \ln \frac{t}{\beta}. \quad (3.72)$$

ЛЕММА 15. *Фазовая компонента $A_{\beta,q}(t) = xk^* + \Omega_{\beta}(k^*) - \ell k^*$ в показателе экспоненты в (3.61) при $x = x_{\beta,q}(t)$ имеет следующий вид:*

$$A(t) = \Omega_{\beta}(k^*) + x_{\beta,q}(t)k^* - \ell k^* = -\frac{1}{\beta} k^*(t). \quad (3.73)$$

Мы подчеркнули зависимость значения k^* от параметра t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как по построению $x_{\beta,q}(t) + \Omega'_{\beta}(k^*) = \ell$, а значит,

$$x_{\beta,q}(t) + \Omega'_{\beta}(k^*) = x_{\beta,q}(t) + \frac{1}{\beta}(\ln k^* + 1) = \ell, \quad (3.74)$$

или, в другой форме,

$$\frac{1}{\beta} \ln k^* = \ell - x_{\beta,q}(t) - \frac{1}{\beta}, \quad (3.75)$$

имеем,

$$\begin{aligned} x_{\beta,q}(t)k^* + \Omega_{\beta}(k^*) - \ell k^* &= x_{\beta,q}(t)k^* + k^* \cdot \frac{1}{\beta} \ln k^* - \ell k^* = \\ &= x_{\beta,q}(t)k^* + k^* \left(\ell - x_{\beta,q}(t) - \frac{1}{\beta} \right) - \ell k^* = -\frac{1}{\beta} k^*(t). \end{aligned} \quad (3.76)$$

ЛЕММА 16. *Пусть выполнены условия лемм 7 и 13. Тогда для произвольного $\delta > 0$ существует $q = q_j \rightarrow \infty$, такое, что для $t \geq 1$*

$$S_{\beta,q}(t) = e^{2\pi i A(t)} + \tilde{\mathcal{E}}(t) \quad (3.77)$$

причём погрешность для почти всех точек t оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}}(t) &= O(\delta \sqrt{t}) + O(\beta \sqrt{t}) + O\left(\frac{\max\{1, \ln t\}}{\sqrt{q}}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{q}} \min\{\sqrt{\frac{q}{t}}, \nu_{\beta}(t)\}\right) + \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{t}} O\left(\min\{\sqrt{t}, \frac{1}{\|(q+1)\frac{1}{\beta} \ln \frac{t}{\beta}\|_{\mathbb{Z}}}\}\right). \end{aligned} \quad (3.78)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Объединяя леммы 7, 12 и 13, составим оценку для погрешности, складывая оценки трёх лемм. Кроме того, оценивая погрешность, связанную с краевым эффектом прохождения точкой стационарной фазы $k^*(t)$ границы области суммирования (на втором шаге), пользуемся выражением для $x + \frac{1}{\beta} \ln \frac{t}{\beta}$, полученным в лемме 14.

ЛЕММА 17. В условиях лемм 8, 9 16, предположим, что

$$t \in [t_1, t_2] \quad u \quad t_2 - t_1 \geq \frac{1}{q+1} \beta t_2. \quad (3.79)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left\| |S_{\beta,q}(t)|_{[t_1,t_2]} - 1 \right\|_1 &= O((t_2 - t_1) \sqrt{t_2} \max\{\delta, \beta\}) + \\ &\quad + O\left((t_2 - t_1) \frac{\ln q}{\sqrt{q}}\right) + O\left((t_2 - t_1) \frac{\ln t_2}{\sqrt{t_1}}\right). \end{aligned} \quad (3.80)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для того, чтобы доказать лемму, сейчас достаточно оценить влияние на результирующую оценку третьего слагаемого в оценке леммы 16. Имеем

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\sqrt{t}} \min\{\sqrt{t}, \frac{1}{\|(q+1)\frac{1}{\beta} \ln \frac{t}{\beta}\|_{\mathbb{Z}}}\} dt \lesssim (t_2 - t_1) \frac{\ln t_2}{t_1}. \quad (3.81)$$

ЛЕММА 18. Если параметры t_1, t_2, β, q удовлетворяют условиям

$$t_1 \geq 1, \quad t_2 - t_1 \geq \beta, \quad t_2 \leq \frac{1}{\beta} \leq \frac{q}{\ln q}, \quad (3.82)$$

то существует последовательность $q_j \rightarrow \infty$, такая, что

$$\left\| |S_{\beta,q_j}(t)|_{[t_1,t_2]} - 1 \right\|_1^2 \lesssim \left\| |S_{\beta,q_j}(t)|_{[t_1,t_2]} - 1 \right\|_1 = O\left((t_2 - t_1) \frac{\ln t_2}{\sqrt{t_1}}\right), \quad (3.83)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно заметить, что компоненты оценки в лемме 17 мажорируются общей оценкой $O\left((t_2 - t_1) t_1^{-1/2} \ln t_2\right)$. Первое из цепочки неравенств следует из того факта, что $\tilde{\mathcal{E}}(t) = O(1)$.

3.3. Исследование фазовой компоненты $A(t)$. Сейчас мы вычислим явную зависимость от t фазовой компоненты $A(t)$, возникающей при вычислении сумм $\Sigma_{\beta,q}(t)$ (см. лемму 15). Имеем

$$A(t) = \Omega_{\beta}(k^*) + x_{\beta,q}(t)k^* - \ell k^* = -\frac{1}{\beta}k^*(t). \quad (3.84)$$

Принимая во внимание то, что $k^*(t)$ при любом t принадлежит промежутку $(K_0(t), K_1(t))$, а в момент достижения границы этого промежутка претерпевает скачок, мгновенно перемещаясь на противоположный край промежутка, исследование функции $k^*: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ правильнее заменить изучением отображения

$$\tilde{k}^*: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+/e^{\beta\mathbb{Z}}, \quad e^{\beta\mathbb{Z}} = \{e^{\beta j}: j \in \mathbb{Z}\}, \quad (3.85)$$

которое интерпретируется следующим образом. Мы рассматриваем значения новой функции $k^*(t)$ с точностью до сокращения на множитель e^{β} , иными словами, функция \tilde{k}^* принимает значения в фактор-группе мультипликативной группы \mathbb{R}_+ по (мультипликативной) решётке, порождённой элементом e^{β} . При

этом $\tilde{k}^*(t) = \tilde{k}^*(t)$, если понимать данное равенство как совпадение графиков данных функций в конусе

$$G = \left\{ (t, k) \in \mathbb{R}_+^2 : \frac{1}{\beta} \cdot t < k < \frac{1}{\beta} e^\beta \cdot t \right\}. \quad (3.86)$$

Тогда фазовый множитель $A(t)$ может быть представлен в виде:

$$A(t) = \frac{1}{\beta} \tilde{k}^*(t) \cdot e^{-1+\beta\ell(t)}, \quad (3.87)$$

где функция $\ell(t)$ является кусочно постоянной и имеет скачки в точках бифуркации, а в качестве представителя класса эквивалентности $k^*(t)$ берётся гладкая функция

$$\tilde{k}^*(t) = e^{-\beta x_{\beta,q}(t)} = e^{-q \ln t / \beta} = t^{-q} \cdot \beta^q, \quad (3.88)$$

значит,

$$A(t) = t^{-q} \cdot e^{-1+\beta\ell(t)} \beta^{q-1} = t^{-q} \cdot \gamma(t), \quad (3.89)$$

где $\gamma(t)$ — кусочно постоянная функция, имеющая скачки в моменты бифуркации точки стационарной фазы.

3.4. Тригонометрические суммы, построенные на основе общих экспоненциально-лестничных функций.

ЛЕММА 19. *Рассмотрим сумму*

$$S_{m,\beta,q}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{y=0}^{q-1} e^{2\pi i \tau \omega(y)}, \quad (3.90)$$

где

$$\omega(y, m) = m \frac{q}{\beta^2} e^{\beta y / q}. \quad (3.91)$$

Предположим, что параметры $t_1 = m\tau_1$, $t_2 = m\tau_2$, а также β и q удовлетворяют условиям леммы 18, а именно,

$$m\tau_1 \geq 1, \quad m(\tau_2 - \tau_1) \geq \beta, \quad m\tau_2 \leq \frac{1}{\beta} \leq \frac{q}{\ln q}. \quad (3.92)$$

Тогда для некоторой последовательности $q_j \rightarrow \infty$ выполнено:

$$\left\| |S_{\beta,q_j}(t)|_{[\tau_1, \tau_2]} \right\|^2 - 1 \Big\|_1 = O \left((\tau_2 - \tau_1) \frac{\ln(m\tau_2)}{\sqrt{m\tau_1}} \right). \quad (3.93)$$

Применяя эту лемму в ситуации, когда τ_1 и τ_2 зафиксированы и, в то же время, m достаточно велико, мы приходим к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 20. *Пусть $0 < \tau_1 < \tau_2$ and given $\delta > 0$. Тогда существует $m_0 \geq \tau_1^{-1}$ и $\beta_0(m_0) > 0$, такие, что для всех $m \geq m_0$ и для любого $\beta < \beta_0(m_0)$, $\beta^{-1} \in \mathbb{N}$, существует бесконечная последовательность $q_j \rightarrow$*

∞ , порождающая тригонометрические суммы, построенные на основе экспоненциально-лестничной частотной функции

$$\omega_{m,\beta,q_j}(y) = m \frac{q_j}{\beta^2} e^{\beta y/q_j}, \quad (3.94)$$

являющиеся δ -плоскими в $L^1([\tau_1, \tau_2])$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для того чтобы были выполнены условия леммы 19 необходимо потребовать, чтобы были выполнены соотношения:

$$\beta \leqslant \frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_1} \quad \text{и} \quad m \in [\tau_1^{-1}, \beta^{-1}\tau_2^{-1}]. \quad (3.95)$$

Таким образом, сначала мы выбираем m_0 , такое, что для любого $m \geq m_0$ оценка в (3.93) меньше, чем δ . Далее, мы выбираем $\beta_0(m)$ настолько малое, чтобы выполнялось условие $m \leq \beta^{-1}\tau_2^{-1}$, а также дополнительное требование $\beta \leq \frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_1}$. Таким образом, сейчас наша лемма следует из леммы 19.

Автор выражает благодарность А. М. Стёпину, М. Леманчику, Ж-П. Тувено, Б. Файаду, С. В. Конягину, Б. С. Кашину и В. В. Рыжикову за внимание к работе и плодотворные дискуссии. Автор признателен рецензенту за серию полезных замечаний, которые позволили улучшить текст статьи.

Список литературы

- [1] Д. В. Аносов, *О спектральных кратностях в эргодической теории*, Совр. пробл. матем., **3**, МИАН, М., 2003, 3–85.
- [2] J. Dieudonné, *Infinite-dimensional Calculus*, Hermann, 1971.
- [3] T. Erdelyi, *Polynomials with Littlewood-type coefficient constraints*, Approximation Theory X: Abstract and Classical Analysis, Charles K. Chui, Larry L. Schumaker, and Joachim Stockler (Eds.), Vanderbilt University Press, Nashville, TN, 2002, 153–196, ISBN 0-8265-1415-4.
- [4] G. R. Goodson, *A Survey of Recent Results in the Spectral Theory of Ergodic Dynamical Systems*, Journal of Dynamical and Control Systems, **Vol. 5**, Issue 2 (1999), 173–226.
- [5] P. R. Halmos, *Lectures on ergodic theory*, Publications of the Mathematical Society of Japan, 3, Math. Soc. Japan, Tokyo, 1956.
- [6] А. А. Кириллов, *Динамические системы, факторы и представления групп*, УМН, **22**:5(137) (1967), 67–80.
- [7] И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, С. В. Фомин. *Эргодическая теория*, М.: Наука, 1980.
- [8] A. B. Katok, A. M. Stepin. *Approximations in ergodic theory*, УМН, **22**:5(137) (1967), 81–106.
- [9] M. G. Nadkarni. *Spectral Theory of Dynamical Systems*, Hindustan Book Agency, New Delhi, (1998); Birkhäuser Advanced Texts : Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts: Basel Textbooks] Birkhäuser Verlag, Basel, 1998.
- [10] В. А. Рохлин, *Избранные вопросы метрической теории динамических систем*, УМН, **4**:2(30) (1949), 57–128.
- [11] Э. Ч. Титчмарш, *Дзета-функция Римана*, М.: УРСС, 2010.
- [12] J.-P. Thouvenot, *Some properties and applications of joinings in ergodic theory*, Ergodic Theory and its Connections with Harmonic Analysis, (K. E. Petersen, ed.), Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995, pp. 207–235.

- [13] С. Улам, *Нерешённые математические задачи*, М.: Наука, 1964.
- [14] A. M. Vershik, A. N. Livshits, *Adic models of ergodic transformations, spectral theory, and related topics*, Adv. Sov. Math., **9** (1992), 185–204.
- [15] E. H. El Abdalaoui, M. Lemańczyk, *Approximate transitivity property and Lebesgue spectrum*, Preprint, arXiv:0903.0503v2 [math.DS], 2009.
- [16] E. H. El Abdalaoui, F. Parreau, A. A. Prikhod'ko, *A new class of Ornstein transformations with singular spectrum*, Annales de l'Institut Henri Poincaré (B) Probability and Statistics, **Vol. 42**, Issue 6, 2006, 671–681.
- [17] T. R. Adams, *On Smorodinsky conjecture*, Proc. Amer. Math. Soc., **126** (1998), no. 3, 739–744.
- [18] О. Н. Агеев, *Динамические системы с четнократной лебеговской компонентой в спектре*, Матем. сб., **136(178)**:3(7) (1988), 307–319.
- [19] O. N. Ageev, *The homogeneous spectrum problem in ergodic theory*, Invent. Math., **160**:2 (2005).
- [20] J. Bourgain, *On the spectral type of Ornstein class one transformations*, Isr. J. Math., **84** (1993), 53–63.
- [21] E. Bombieri, J. Bourgain, *On Kahane's ultra-flat polynomials*, J. Eur. Math. Soc., **11**:3 (2009), 627–703.
- [22] J. S. Byrnes, *On polynomials with coefficients of modulus one*, Bull. London Math. Soc., **9** (1977), 171–176.
- [23] R. V. Chacon, *A geometric constructions of measure preserving transformations*, Proc. 5th Berkley Sympos. Math. Statist. Probab., Univ. Calif. 1965/66, vol. 2, no. 2. Univ. of California Press, Berkeley 1967, pp. 335–360.
- [24] J. R. Choksi, M. G. Nadkarni, *The maximal spectral type of rank one transformation*, Dan. Math. Pull., **37** (1) (1994), 29–36.
- [25] A. I. Danilenko, V. V. Ryzhikov, *On self-similarities of ergodic flows*, preprint, arXiv:1011.0343.
- [26] T. Downarowicz, Y Lacroix, *Merit factors and Morse sequences*, Theoretical Computer Science, **209** (1998), Issue 1–2, 377–387.
- [27] P. Borwein, T. Erdélyi, G. Kós, *Littlewood-type problems on $[0, 1]$* , Proc. London Math. Soc. (3) **79** (1999), 22–46.
- [28] S. Ferenczi, *Systems of finite rank*, Colloq. Math., **73** (1997), 35–65.
- [29] N. Friedman, *Replication and stacking in ergodic theory*, Amer. Math. Monthly, **99**, (1992), 31–34.
- [30] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, *Some problems of diophantine approximation: A remarkable trigonometric series*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **10** (1916), no. 2, 583–586.
- [31] J. P. Kahane, *Sur les polynômes à coefficients unimodulaires*, Bull. London Math. Soc. **12** (1980), 321–342.
- [32] Kazuo Goto, *Some results on Littlewood's problem and Orlicz's problem*, Math. J. Okayama Univ. **41** (1999), 121–136.
- [33] I. Klemeš, *The spectral type of staircase transformations*, Thohoku Math. J., **48** (1994), pp. 247–258.
- [34] I. Klemeš, K. Reinhold, *Rank one transformations with singular spectre type*, Isr. J. Math., **vol 98**, (1997), 1–14.
- [35] T. W. Körner, *On a polynomial of Byrnes*, Bull. London Math. Soc., **12** (1980), 219–224.
- [36] J. E. Littlewood, *On polynomials*, $\sum^n \pm z^m$, $\sum^n e^{\alpha_n i} z^m$, $z = e^{\theta i}$, J. London Math. Soc., **vol. 41** (1966), 367–376.
- [37] Hong-Quan Liu, *On a fundamental result in van der Corput's method of estimating exponential sums*, Acta Arithmetica, XC.4 (1999), 357–370.

- [38] M. Guenais, *Morse cocycles and simple Lebesgue spectrum*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, **19:2** (1999), 437–446.
- [39] J. Mathew, M. G. Nadkarni, *A measure preserving transformation whose spectrum has Lebesgue component of multiplicity two*, Bulletin of the London Mathematical Society, **16(4)** 1984, 402–406.
- [40] S. H. Min, *Methods in Number Theory*, Vol. 2, Science Press, 1981 (in Chinese).
- [41] D. S. Ornstein, On the root problem in ergodic theory. Proc. 6th Berkley Sympos. Math. Statist. Probab., Univ. Calif. 1970, vol. 2. Univ. of California Press, Berkeley 1972, pp. 347–356.
- [42] В. И. Оседец, *О спектре эргодических автоморфизмов*, Докл. АН СССР **168:5** (1966), 1009–1011.
- [43] В. И. Оседец, *Автоморфизм с простым и непрерывным спектром без группового свойства спектра*, Матем. заметки **5:3** (1969), 323–326.
- [44] А. А. Приходько, *Стochastic constructions of rank 1 flows*, Матем. сб., **192:12** (2001), 61–92.
- [45] E. A., Jr. Robinson, *Ergodic measure preserving transformations with arbitrary finite spectral multiplicities*, Invent. Math., **72** (1983), no. 2, 299–314.
- [46] В. В. Рыжиков, *Перемешивание, ранг и минимальное самоприсоединение действий с инвариантной мерой*, Матем. сб., **183:3** (1992), 133–160.
- [47] V. V. Ryzhikov, *Сплетения тензорных произведений и стохастический централизатор динамических систем*, Матем. сб., **188:2** (1997), 67–94.
- [48] V. V. Ryzhikov, *О спектральных и перемешивающих свойствах конструкций ранга 1 в эргодической теории*, Докл. АН СССР **409:4** (2006), 448–450.
- [49] A. Scardicchio, *Classical and quantum dynamics of a particle constrained on a circle*, Physics Letters A, **Vol. 300**, Issue 1 (2002), Pages 7–17.
- [50] А. М. Стёпин, *Спектральные свойства типичных динамических систем*, Изв. АН СССР. Сер. Матем., **50:4** (1986), 801–834.

А. А. Приходько

Московский государственный университет
им. М. М. Ломоносова

E-mail: sasha.prihodko@gmail.com

Поступила в редакцию

07.04.2011