

## ОДУ: экзамен 6 июня 2013; первый поток

**На экзамене не разрешается:** пользоваться электронными приборами, конспектами, книгами и другими печатными или рукописными материалами; разговаривать и пользоваться помощью соседей.

**Оценки:** за ответ на каждый вопрос/задачу начисляются очки, максимальное количество очков указано в скобках перед вопросом/задачей; результаты оцениваются по системе 5 из 6, т.е. учитываются очки, набранные за лучшие ответы на 5 групп вопросов (всего предлагается 6 групп, наихудший результат по одной из 6 групп вопросов отбрасывается); также учитываются очки, полученные в течение семестра за контрольные и домашние задания; 9–12 очков — «удовл.», 13–16 очков — «хор.», 17 очков и более — «отл.».

1. (5) Не используя теорему о непрерывной зависимости решения от параметра, докажите, что значение  $\varphi(1, \mu)$  решения  $x = \varphi(t, \mu)$  уравнения

$$\dot{x} = \operatorname{th} x + t + \sqrt[3]{\mu^2}$$

с начальным условием  $\varphi(0, \mu) = 0$  непрерывно по  $\mu$  при  $\mu = 0$ . (Указание: воспользуйтесь леммой Гронуолла и вспомните доказательство теоремы о непрерывной зависимости решения от параметра.)

2. (3) Найдите все особые точки системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - x^2 - y^2 \\ \dot{y} = 2y(x - 1) \end{cases},$$

исследуйте их на устойчивость, укажите их тип. При исследовании на устойчивость для каждой особой точки нужно указать (и обосновать!), является ли она: а) асимптотически устойчивой; б) устойчивой, но не асимптотически; в) неустойчивой.

- (2) Нарисуйте фазовый портрет системы.

3. (1) Что такое временное среднее функции?

(1) Привести пример гладкого неэргодического отображения окружности в себя.

(3) Найти замыкание орбиты системы  $\dot{\varphi} = \omega$ ,  $\omega = (1, 1/\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ,  $\varphi \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  с начальным условием  $\varphi(0) = 0$ .

4. (2) Пусть  $g^t x$  — фазовый поток векторного поля  $\dot{x} = \sqrt{|x|}(\cos x - 1)$ , на вещественной прямой. Найдите наибольшее  $k$ , при котором производная  $\frac{\partial^k}{\partial t^k} g^t x$  непрерывна по  $(t, x)$  в окрестности точки  $t = x = 0$ . Ответ обосновать.

(3) Найдите фазовый поток системы

$$\begin{cases} \dot{x} &= 3x - 4y - 7z \\ \dot{y} &= x + 7y + 2z \\ \dot{z} &= 2z \end{cases} .$$

5. (5) Найдите производную  $\frac{\partial x}{\partial \mu}$  по параметру  $\mu$  при  $\mu = 0$  решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} &= 3 \ln x - 2 \sin 2y - \operatorname{arctg} 7z + \mu x e^{5t} \\ \dot{y} &= e^{7y} - 1/x + yz + 2z \\ \dot{z} &= \sqrt{1 + 4z} - \cos y \end{cases}$$

с начальными условиями  $x(0) = 1 + \mu^2$ ,  $y(0) = \mu \sin \mu$ ,  $z(0) = \mu^3$ .

6. (3) Найдите площадь образа множества  $|x| + |y| \leq 1$  при действии оператора монодромии системы

$$\begin{cases} \dot{x} &= x + y \cos^2 t \\ \dot{y} &= x + y \cos^3 t \end{cases} .$$

(2) Имеются ли у этой системы устойчивые решения? Ответ обосновать.