

ДУ: экзамен 20 июня 2018 года; первый поток; вариант З₁

На экзамене не разрешается: пользоваться электронными приборами, конспектами, книгами и другими печатными или рукописными материалами; разговаривать и пользоваться помощью соседей.

Оценки: За ответ на каждый вопрос/задачу начисляются очки, максимальное количество очков указано в скобках перед вопросом/задачей; набранное количество очков складывается с очками, полученными за работу в семестре. Оценка определяется по итоговой сумме: 9-12 очков - удовлетворительно, 13-17 очков - хорошо, 18 и выше - отлично. **Зачёт идёт по 5 задачам!!!**

Задача 1.

(1) Сформулируйте основную теорему теории линейных систем.

(4) Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 4y - 6e^t \\ \dot{y} = x + 2y \end{cases}.$$

Задача 2.

(1) Сформулируйте теорему об изменении фазового объема.

(4) Найти образ касательного вектора $(0, 1)$, приложенного в точке $(0, 0)$, под действием преобразования фазового потока за единичное время системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x - \arcsin y \\ \dot{y} = x + \operatorname{arctg} y \end{cases}.$$

Задача 3.

(1) Дайте определение характеристической точки задачи Коши для линейного уравнения в частных производных первого порядка.

(2) Найти общее решение уравнения $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - x^2 - y^2$,

(2) а также частное решение, удовлетворяющее условию $z|_{y=-2} = x - x^2$.

Задача 4.

- (1) Что такое ω -предельное множество траектории? Какими свойствами оно обладает?
- (2) Устойчив ли цикл, соответствующий решению $x = \cos t$ дифференциального уравнения

$$\ddot{x} + \dot{x} + x((\ddot{x})^2 + (\dot{x})^2 - 1) = 0 ?$$

- (2) Является ли он предельным?

Задача 5.

- (1) Найти векторное поле, определенное на интервале $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, с фазовым потоком

$$g^t: x \mapsto \operatorname{arctg}(e^t \operatorname{tg} x),$$

- (2) выпрямить его в окрестности точки $x = 1$,
- (2) проверить групповое свойство семейства преобразований $\{g^t\}$.

Задача 6. После разгона на льду озера до скорости 120 км/час шайба продолжила движение по инерции с сопротивлением, пропорциональным квадрату скорости движения. Через 4 минуты её скорость упала в 5 раз.

- (2) Через какое время скорость шайбы уменьшится в десять раз?
- (3) Через какое время наблюдатель перестанет замечать движение объекта, если его приборы не различают скорости меньше 0.01 км/мин?