Дифференциальные уравнения, 6 сентября 2013 г.

(часть 1)

1. Постройте линейное дифференциальное уравнение, имеющее своими решениями функции $y_1 = x^2$, $y_2 = e^{-x}$ и $y_3 = \cos x$.

2. Решите систему дифференциальных уравнений $\dot{Y} = AY + B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 13 & -2 \\ -2 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \cos t \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

При каких значениях параметров a, b, c система $\dot{Y} = AY + B$ имеет ограниченные решения? Найдите их.

3. а) Вычислите фазовый поток однородной системы $\dot{Y} = AY$, где A — матрица из задачи 2.

б) Верно ли, что из коммутирования e^A и e^B следует коммутирование матриц A и B?

Дифференциальные уравнения, 6 сентября 2013 г.

(часть 2)

4. а) Постройте выпрямление векторного поля $v(Y) = AY$ в окрестности точки $(1, 1, 0)$, где A — матрица из задачи 1.

б) Найдите производную $\dfrac{\partial z}{\partial z_0}$ в точке $(1, 1, 0)$, где $Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ — решение системы $\dot{Y} = AY + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xz \end{pmatrix}$.

5. Изобразите фазовый портрет системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - x^3 \end{cases}$$

Найдите особые точки системы, определите их тип, исследуйте их на устойчивость.

6. Найдите замыкание траектории $\{\phi(t)\}$ для постоянного векторного поля $v = (\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2})$ на двумерном торе $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$, такой, что $\phi(0) = (0, 0)$.

Дифференциальные уравнения — 6 сентября 2013 г.
(часть 1)

1. Оцените порядок дифференциального уравнения $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, $f \in C^1(\mathbb{R}^{n+1})$, имеющего своими решениями функции $y_1 = \cos x$ и $y_2 = 1 - x^2/2$.

2. Решите систему дифференциальных уравнений $\dot{Y} = AY + B$, где

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & -1 \\ -4 & 17 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \sin t \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

При каких значениях параметров a, b, c система $\dot{Y} = AY + B$ имеет ограниченные решения? Найдите их.

3. а) Вычислите фазовый поток однородной системы $\dot{Y} = AY$, где A — матрица из задачи 2.

б) Приведите пример матриц A и B, таких, что $e^{A+B} \neq e^A e^B$. Верно ли, что из равенства $e^A = E$ следует, что $A = 0$?

Дифференциальные уравнения — 6 сентября 2013 г.
(часть 2)

4. а) Постройте выпрямление векторного поля $v(Y) = AY$ в окрестности точки $(0, -1, 1)$, где A — матрица из задачи 1.

б) Найдите производную $\dfrac{\partial x}{\partial x_0}$ в точке $(0, -1, 1)$, где $Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ — решение системы $\dot{Y} = AY + \begin{pmatrix} -xy \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5. Изобразите фазовый портрет системы

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin y \\ \dot{y} = -\cos x \end{cases}$$

Найдите особые точки системы, определите их тип, иcследуйте их на устойчивость.

6. Вычислите временное среднее функции $f(x) = cos^2 4\pi x$ на окружности $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ относительно поворота окружности на угол $\alpha = \sqrt{2}$, заданного отображением $x \mapsto x + \alpha \pmod 1$