

ОДУ - экзамен 27 июня 2013; первый поток; часть I

На экзамене не разрешается: пользоваться электронными приборами, конспектами, книгами и другими печатными или рукописными материалами; разговаривать и пользоваться помощью соседей.

Оценки: за ответ на каждый вопрос/задачу начисляются очки, максимальное количество очков указано в скобках перед вопросом/задачей; результаты оцениваются по системе 5 из 6, т.е. учитываются очки, набранные за лучшие ответы на 5 групп вопросов (всего предлагается 6 групп, наихудший результат по одной из 6 групп вопросов отбрасывается); также учитываются очки, полученные в течение семестра за контрольные и домашние задания; 9–12 очков — «удовл.», 13–16 очков — «хор.», 17 очков и более — «отл.».

1. (1) Свести уравнение n -го порядка к системе дифференциальных уравнений в нормальной форме.
- (1) Сформулировать теорему единственности дифференциального уравнения $F(x, y, y') = 0$.
- (3) Можно ли любое решение уравнения $y' = x^5 - y^5$ продолжить сколь угодно далеко вправо?
2. (3) Найдите все особые точки системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x^4 - x - 2y \end{cases},$$

исследуйте их на устойчивость, укажите их тип. При исследовании на устойчивость для каждой особой точки нужно указать (и обосновать!), является ли она: а) асимптотически устойчивой; б) устойчивой, но не асимптотически; в) неустойчивой.

- (2) Нарисуйте фазовый портрет системы.
3. (1) Найти общее решение $u(x, y)$ уравнения в частных производных

$$y \frac{\partial u}{\partial x} + (x^4 - x) \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

- (4) Найдите производную $\frac{\partial x}{\partial \mu}$ по параметру μ при $\mu = 0$ решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x^4 - x - 2y \end{cases},$$

с начальными условиями $x(0) = e^\mu$, $y(0) = -3\mu$.

ОДУ - экзамен 27 июня 2013; первый поток; часть II

4. (4) Найдите фазовый поток системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + z \\ \dot{y} = -z \\ \dot{z} = -x + y - z \end{cases} .$$

- (1) Найдите объём образа единичного куба при действии этого фазового потока за время $t = 1$.
5. (1) Дайте определение полуустойчивого предельного цикла.
- (4) Исследуйте на устойчивость предельный $x^2 + y^2 = 1$ цикл системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y + (x + y)(x^2 + y^2 - 1) \\ \dot{y} = -x + (3x - 2y)(x^2 + y^2 - 1) \end{cases} .$$

6. (1) Сформулировать теорему сравнения двух приведённых уравнений второго порядка.
- (1) Заменой зависимой переменной свести уравнение $a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0$ к виду $y'' + q(t)y = 0$.
- (3) Доказать, что любое нетривиальное решение уравнения $y'' - xy' + y = 0$ имеет на интервале $(-\infty, +\infty)$ не более 5 нулей.