

Программа курса «Дифференциальные уравнения»

2-й курс, 2-й поток, 2015-2016 учебный год.

Лектор А.Ю. Жиров

1. Основные понятия и задачи теории ОДУ: автономные и неавтономные уравнения и системы, задача Коши и краевая задача. Примеры: уравнение роста, логистическое уравнение, цепная линия.
2. Геометрическая интерпретация: поле направлений и векторное поле. Примеры. Элементарные методы решения: формула Барроу и разделение переменных, их геометрическая интерпретация. Симметричная форма записи ОДУ.
3. Продолжение. Модель Лотки-Вольтерра. Понятие фазового потока. Условия его существования, продолжаемость решений, пример непродолжаемого на всю ось времени решения.
4. Линейные уравнения и системы, уравнения Бернулли и Риккати. Метод вариации постоянных. Уравнения в полных дифференциалах, интегрирующий множитель.
5. Интегрируемые комбинации и первые интегралы. Пример: волчок Эйлера, его первые интегралы, существование фазового потока и описание фазовых траекторий. Устойчивые и неустойчивые положения равновесия в этом примере и общее понятие.
6. Уравнения не разрешённые относительно производной. Геометрическая интерпретация. Уравнение Клеро. Огибающие. Примеры.
7. Доказательство теоремы существования и единственности задачи Коши для систем ОДУ. Теорема о сжимающем отображении. Пример неединственности.
8. Непрерывная зависимость от начальных условий и от правой части уравнения. Существование решения линейной системы на всём интервале непрерывности функций, задающей правую часть.
9. Общая теория линейных систем. Определитель Вронского, теорема Остроградского-Лиувилля. Фундаментальная система решений, общее решение неоднородного уравнения.
10. Линейные уравнения порядка n . Версия общей теории. Построение фундаментальной системы решений. Метод вариации для уравнений.
11. Отыскание частного решения для неоднородного уравнения, в случае квазимногочлена в правой части. Уравнение Эйлера.

12. Фазовые портреты линейных систем с постоянными коэффициентами на плоскости.
13. Колеблющиеся решения. Теорема Штурма. Применение к уравнению Бесселя, бесселевы функции.
14. Краевая задача для линейных уравнений второго порядка. Примеры несуществования и неединственности. Существование решения для неоднородного уравнения в случае тривиальности любого решения однородной задачи. Функция Грина.
15. Решение краевой задачи для неоднородного уравнения в случае существования нетривиального решения у однородной задачи. Необходимое и достаточное условие существования.
16. Уравнение Ньютона и кеплерова задача. Вывод законов Кеплера из системы Ньютона.
17. Линейные системы с постоянными коэффициентами. Экспонента матрицы. Её свойства и вычисление в случае вещественных и комплексных собственных значений. Экспонента жордановой клетки. Комплексификация и о веществление.
18. Неоднородные линейные системы с постоянными коэффициентами и непостоянным свободным членом. Метод вариации постоянных. Случай, когда свободный член есть квазимногочлен. Теорема о существовании и единственности ограниченного решения в случае, когда матрица не имеет собственных чисел с нулевой вещественной частью.
19. Неравенство Гронуолла. Теорема о непрерывной зависимости решения системы общего вида от начальных условий и параметров.
20. Лемма Адамара. Теорема о дифференцируемой зависимости решения от начальных условий и параметров. Дифференцирование решений по параметру и начальному условию. Уравнение в вариациях.
21. Локальный поток и одномерное слоение. Действие диффеоморфизма на поле направлений и векторное поле. Теоремы о выпрямлении поля направлений и векторного поля в окрестности его неособой точки.
22. Первые интегралы. Производная по направлению векторного поля. Теорема о существовании полной системы независимых первых интегралов в окрестности неособой точки векторного поля.

23. Дифференциальные уравнения первого порядка с частными производными: линейные однородные, неоднородные, квазилинейные. Характеристики и общее решение линейного однородного уравнения. Постановка задачи Коши. Существование и единственность её решения. Постановка задачи Коши для квазилинейного уравнения. Его общее решение и решение задачи Коши.
24. Устойчивость решений задачи Коши общего дифференциального уравнения. Редукция к задаче об устойчивости положения равновесия. Функция Ляпунова, теорема Ляпунова. Теорема Четаева о неустойчивости.
25. Исследование устойчивости положения равновесия по первому приближению.
26. Фазовые потоки автономных систем. Три типа траекторий. Теорема об изменении фазового объёма. Теорема Дюлака о не существовании циклов двумерной системы.
27. Предельные множества и их свойства. Теорема Бендиксона. Типы предельных циклов.
28. Отображение последования Пуанкаре. Динамические системы с дискретным временем. Устойчивость неподвижной точки. Устойчивость периодического решения автономной системы.
29. Линейные системы с периодическими коэффициентами. Оператор монодромии, мультипликаторы и их свойства. Устойчивость системы с периодическими коэффициентами. Вычисление определителя матрицы монодромии. Вычисление мультипликаторов предельного цикла на плоскости.
30. Теоремы Флоке и Ляпунова о приводимости линейной системы с периодическими коэффициентами.
31. Вращение векторного поля на плоскости вдоль кривой. Индекс изолированной особой точки. Его свойства. сумма индексов особых точек векторного поля на сфере.
32. Уравнения малых колебаний. Линейный поток на торе, двумерный случай.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения.
2. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.
3. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения.

4. Степанов В.Н. Курс дифференциальных уравнений.
5. Филлипов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений.
6. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.
7. Филлипов А.Ф. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям.