ДУ: 18 июня 2015 года; первый поток; вариант 3_1

На экзамене не разрешается: пользоваться электронными электронными приборами, конспектами, книгами и другими печатными или рукописными материалам; разговаривать и пользоваться помощью соседей.

Оценки: За ответ на каждый вопрос/задачу начисляются очки, максимальное количество очков указано в скобках перед вопросом/задачей; набранное количество очков складывается с очками, полученными за работу в семестре. Оценка определяется по итоговой сумме: 9-12 очков - удовлетворительно, 13-17 очков - хорошо, 18 и выше - отлично. **Зачёт идёт по 5 задачам!!!**

Задача 1.

(1) Сформулировать теорему о дифференцируемой зависимости от начальных условий решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений.

(4) Найти образ касательного вектора $(1,0)$, приложенного в точке $(0,0)$, под действием преобразования фазового потока за единичное время системы

$$\begin{cases} \dot{x} &= \operatorname{arctg}(3x) - 2y, \\ \dot{y} &= 2\arcsin x - y. \end{cases}$$

Задача 2.

(3) Найти все особые точки системы

$$\begin{cases} \dot{x} &= \ln(1+9y) - \ln(1+xy), \\ \dot{y} &= \ln(e^{\sin y} + y^4 + 2y + x^2 - 1) - \sin y, \end{cases}$$

исследовать их на устойчивость, указать их тип. При исследовании на устойчивость для каждой особой точки нужно указать (и обосновать!), является ли она: а) асимптотически устойчивой; б) устойчивой, но не асимптотически; в) неустойчивой.

(2) Нарисовать эскиз фазового портрета системы вблизи каждой из особых точек.

Задача 3.

(3) Найти решение уравнения

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = (1-z)(y-2x),$$

принимающее при $y=1$ значение e^x+1.

(2) В окрестности каких точек начальной кривой $x = y^2+1$ существование и единственность решения этого уравнения для любой гладкой начальной функции гарантируется теоремой (сформулировать ее)?

ДУ: 18 июня 2015 года; первый поток; вариант 3_2

Задача 4. Для векторного поля системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} &= x\cos y - y, \\ \dot{y} &= 2x - \sin y \end{cases}$$

(1) Найти площадь образа области $\{x^2+y^2 \leqslant 6x-2y\}$ под действием преобразования фазового потока данного векторного поля за время 3.

(3) Исследовать на устойчивость нулевое положение равновесия и определить его тип. (При исследовании на устойчивость положения равновесия нужно указать и обосновать, является ли оно: а) асимптотически устойчивым; б) устойчивым, но не асимптотически; в) неустойчивым.)

(1) Выяснить, есть ли у данного векторного поля предельный цикл? Ответ обосновать.

Задача 5.

(3) Выяснить устойчивость системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} &= -4x + \sin^2 t, \\ \dot{y} &= x - y(2+\cos t) + z + \sin^2 t, \\ \dot{z} &= x - z. \end{cases}$$

Ответ обосновать.

(2) Есть ли 2π-периодическое решение у этой системы? Ответ обосновать.

Задача 6. Для объекта на прямой сопротивление среды движению пропорционально кубу скорости движения с коэффициентом 1. Через единицу времени после начала движения наблюдатель отметил, что скорость движения уменьшилась в два раза.

(2) Через какое время скорость уменьшится в три раза?

(3) Через какое время наблюдатель перестанет замечать изменение величины скорости, если он не различает значения, отличающиеся менее, чем на 0.1?