Вариант 1

Задачи

1. (**4**) Шайбу положили на плоскость, наклонённую к горизонту под углом в $30°$, и отпустили. Найдите закон изменения пройденного шайбой расстояния, если известно, что сопротивление среды пропорционально её скорости, которая при $t \to +\infty$ стремится к 80 м/с.

2. (**2**) Найдите все особые точки системы

$$\begin{cases} \dot{x} &= x^2 + y^2 - 1 \\ \dot{y} &= x^2 + (y-1)^2 - 1 \end{cases}$$

определите их типы и исследуйте на устойчивость. При исследовании на устойчивость для каждой особой точки нужно указать, является ли она: а) асимптотически устойчивой; б) устойчивой, но не асимптотически; в) неустойчивой.

(**2**) Нарисуйте фазовый портрет системы.

3. (**4**) Найдите производные $\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}$ и $\frac{\partial y}{\partial \varepsilon}$ по параметру ε при $\varepsilon = 0$ решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} &= e^x \sin y - \varepsilon^2 e^{-t} \\ \dot{y} &= -\operatorname{arctg} x + \ln(1+\varepsilon)\cos^2 t \end{cases}$$

с начальными условиями $x(0) = \cos\varepsilon - 1$, $y(0) = \varepsilon$.

Вопросы

4. (**3**) Через каждую точку (x, y) плоскости проведена прямая, перпендикулярная вектору $(1 + y^2, x)$. Запишите это поле направлений как дифференциальное уравнение в нормальной форме.

5. (**3**) Найдите однопараметрическую группу симметрий уравнения $\ddot{x} = x^3/t^3$.

6. (**3**) Найдите площадь образа множества $x^2 + y^2 \leqslant 2x$ при преобразовании g^{-1} из фазового потока векторного поля:

$$\begin{cases} \dot{x} &= 2x + \cos y \\ \dot{y} &= \ln(1 + x^2) + y \end{cases}.$$

7. (**3**) Правые части непрерывно дифференцируемой автономной системы из двух уравнений с зависимыми переменными x и y обращаются в нуль при $x^2 + y^2 \geqslant 1$. Верно ли, что решение такой системы с нулевыми начальными условиями продолжается на всю числовую прямую?

Вариант 2

Задачи

8. (**2**) Найдите все решения уравнения $\ln(y'/x) - xy' + 2y = 0$.

   (**2**) Укажите особое решение и покажите, что указанное решение является особым (нарисовав картинку или аналитически).

9. (**4**) Найдите функцию $u(x, y, z)$, удовлетворяющую уравнению с частными производными:
$$x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} + (x^3y^2 + xz)\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$
   и начальному условию:
$$u|_{x=1} = z.$$

10. (**4**) Исследуйте на устойчивость систему:
$$\dot{\mathrm{x}} = A(t)\mathrm{x}, \quad A(t) = \begin{cases} A_1, & \text{если} \quad [t] = 2k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}, \\ A_2, & \text{если} \quad [t] = 2k+1, \text{ где } k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$
$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -\ln\sqrt{2} & \pi/4 \\ -\pi/4 & -\ln\sqrt{2} \end{pmatrix},$$
   $[t]$ — целая часть t. При исследовании на устойчивость нужно указать, является ли система: а) асимптотически устойчивой; б) устойчивой, но не асимптотически; в) неустойчивой.

Вопросы

11. (**3**) Приведите пример квазиоднородного дифференциального уравнения в нормальной форме, которое не является однородным, со следующими весами: $\deg x = 1$ (независимая переменная) и $\deg y = 3$ (зависимая переменная).

12. (**3**) Составьте линейное однородное уравнение с постоянными вещественными коэффициентами, имеющее решение $1 - te^{-t} + \sin 2t$ и наименьший возможный порядок.

13. (**3**) Есть ли циклы у векторного поля:
$$\begin{cases} \dot{x} = e^x + \cos(y+1) \\ \dot{y} = \ln(1+x^2) + y^3 \end{cases} ?$$

14. (**3**) Найдите предел при $\varepsilon \to 0$ решения задачи Коши
$$\dot{x} = \sqrt{x^2 + \varepsilon^2 t^2}, \quad x(0) = 0,$$
    обосновав его существование.

Вариант 3

Задачи

15. (**4**) Найдите нетривиальный первый интеграл векторного поля

$$\begin{cases} \dot{x} &= & x \\ \dot{y} &= & y - 2xy^2 \end{cases}.$$

16. (**2**) Найдите фазовый поток векторного поля

$$\begin{cases} \dot{x} &= & y \\ \dot{y} &= & 4x \end{cases}.$$

(**2**) Выпрямите указанное векторное поле в окрестности точки $(1, 0)$, предъявив в явном виде диффеоморфизм, обратный к выпрямляющему.

17. (**2**) Найдите предельные циклы системы

$$\begin{cases} \dot{x} &= & -2y + x(x^2+y^2-1)^3(x^2+y^2-2)^2 \\ \dot{y} &= & 2x + y(x^2+y^2-1)^3(x^2+y^2-2)^2 \end{cases}$$

и исследуйте их на устойчивость.

(**2**) Нарисуйте фазовый портрет системы.

Вопросы

18. (**3**) Дифференциальное уравнение $y' = x/(1 + x^2 + y^4)$ задаёт поле направлений. Запишите перпендикулярное ему поле направлений как дифференциальное уравнение в симметричной форме.

19. (**3**) Рассмотрим осциллятор с трением, колебания которого под действием периодической внешней силы описываются уравнением $\ddot{x} + 2\dot{x} + 11x = \cos \nu t$. Найдите максимальную амплитуду установившихся вынужденных колебаний осциллятора и частоту $\nu > 0$, при которой она достигается.

20. (**3**) Все коэффициенты матрицы линейной однородной системы на плоскости постоянны и отрицательны. Верно ли, что система устойчива?

21. (**3**) Третья производная функции f на прямой определена в каждой точке, но разрывна. Известно, что $f(0) = 0$. Доопределим функцию $f(t)/t$ до непрерывной на всей числовой прямой. Сколько у получившейся функции непрерывных производных?