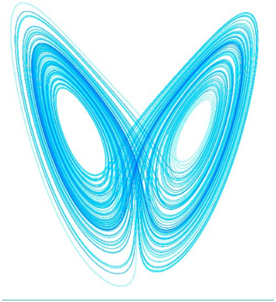
Графы Шрейера групп, порождённых автоматами, и гиперболическая динамика в конечных полях

А.А. Приходько

Московский физико–технический институт

57 Научная конференция МФТИ, посвящённая 120-летию со дня рождения П.Л. Капицы

Гиперболическая динамика. Показатели Ляпунова



$$f\colon\ M \to M$$

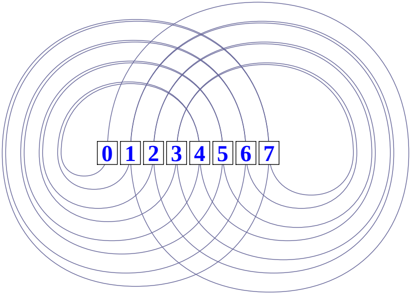
$$\|df^n(x)\| \sim e^{n\,\lambda_0(x)}$$

$\leftarrow$ *Аттрактор Лоренца*

Неравенстро Маргулиса–Рюэля и формула Песина:

$$h_\nu(f) \le_{(=)} \int_M \Sigma(x)\,d\nu, \qquad \Sigma(x) = \sum_{\lambda_i(x)>0} k_i(x)\,\lambda_i(x).$$

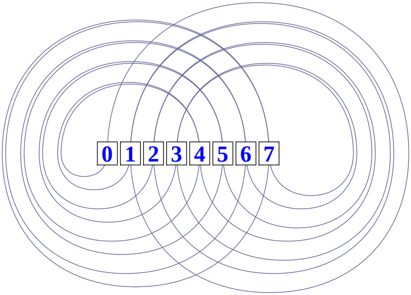
Графы де Брёйна



$$\mathcal{B}_n = (\mathbb{Z}_{2^n}, E_{(n)})$$

$$(x, \sigma_+(x)),\ (x, \sigma_+(x)+1) \in E_{(n)}, \qquad \sigma_+(x) = 2x \pmod{2^n}$$

Графы де Брёйна



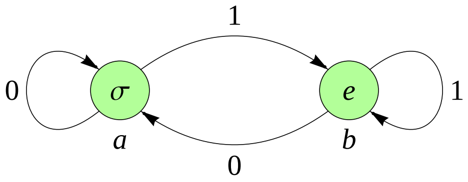
$$x \to 2x, \qquad x \to 2x+1$$

$$x_{n-1}\dots x_1x_0 \to x_{n-2}\dots x_1x_0 0, \qquad x_{n-1}\dots x_1x_0 \to x_{n-2}\dots x_1x_0 1$$

Группа мигающих лампочек

Алгебраическое определение: Вершик, Кайманович.

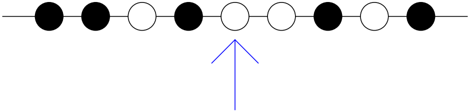
Автоматное представление: Григорчук, Жук.



$$\mathscr{L}_2 = \langle s,\ t\colon\ s^2 = [s^{t^i}, s^{t^j}] = 1\rangle.$$

Группа $\mathscr{L}_2$ — группа, порождённая автоматами $\mathcal{A}_a$ и $\mathcal{A}_b$

Группа мигающих лампочек



Стандартное действие $\mathscr{L}_2$ на бинарных последовательностях:

$$s\colon\ x \mapsto x \oplus \delta_0, \qquad t\colon\ (x_i) \mapsto (x_{i+1}) \quad \text{“}\sim 2x\text{”}$$

Графы Кэли и графы Шрейера

Определение. Граф Шрейера группы G относительно подгруппы $H < G$ и множества образующих S:

$$\Gamma = (G/H, E_H)$$

$$G/H = \{gH\colon\ g \in G\}, \qquad E_H = \{(gH, sgH)\colon\ s \in S,\ g \in G\}$$

Замечание. Если $H = \{1\}$, то граф Шрейер совпадает с графом Кэли (G, S).

Замечание. Подгруппа H не обязательно нормальна.

Классификация конечных графов Шрейера $\mathscr{L}_2$

Алгебраическая структура:

$$\mathscr{L}_2 = \mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z} = A \rtimes \mathbb{Z}$$

где $\mathbb{Z}$ действует на максимальной абелевой подгруппе $A = \bigoplus_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ по правилу $s \mapsto \sigma^s$, и $\sigma\colon\ (v_i) \mapsto (v_{i+1})$.

Теорема (Григорчук, Приходько, Смирнова–Нагнибеда). Если A действует на конечном графе Шрейера $\Gamma_H = \mathscr{L}_2/H$ транзитивно, то

$$\Gamma_H \cong \mathcal{B}_n.$$

В частности, все такие графы спектрально эквивалентны.

Конечные поля

Конструкция. Пусть $\mathcal{R}_+ = \mathbb{F}_2[t]$ и $Q(t)$ — полином над $\mathbb{F}_2$,

$$Q(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + t^n$$

Рассмотрим кольцо $\mathcal{R}_+/Q(t)\mathcal{R}_+$

Конструкция. Если $P(t)$ неприводим, то $\mathcal{R}_+/P(t)\mathcal{R}_+ \cong \mathbb{F}_{2^n}$

Заметим, что возможны различные, но изоморфные представления поля $\mathbb{F}_{2^n}$.

Гиперболическая динамика в $\mathbb{F}_{2^n}$

Рассмотрим преобразование

$$f\colon\ x \to mx, \qquad m \notin \{0,1\}$$

Конструкция. Автоморфизм Фробениуса $\varphi\colon\ x \to x^p$

Замечание. *Обобщённый показатель Ляпунова* — класс эквивалентности $[m]$ — инвариант относительно изоморфизма, но класс может содержать более одного элемента!

Действия группы $\mathscr{L}_2$ на $\mathbb{F}_{2^n}$

Рассмотрим следующее действие $\mathscr{L}_2$, порождённое "*близкими*" преобразованиями

$$f_0\colon\ x \mapsto mx$$

$$f_1\colon\ x \mapsto mx + \alpha$$

и заметим, что для $s = f_1 f_0^{-1}$

$$s^2 = (f_1 f_0^{-1})^2 = 1 \qquad \text{и} \qquad f_0^{-j} s f_0^j(x) = x + m^{-j}\alpha.$$

Алгебраические свойства

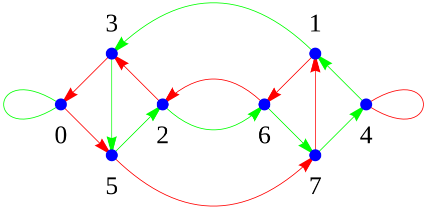
Граф Шрейера имеет ровно 2 петли: $z_j = f_j(z_j)$.

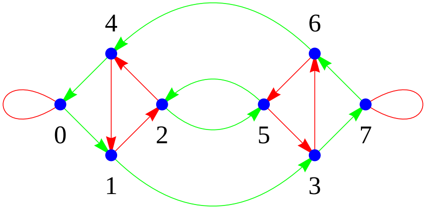
Две канонических формы:

- Можно считать, что $\alpha = 1$, тогда $[m]$ — единственный инвариант действия.
- Можно выбрать произвольное $z_1 \neq 0 = z_0$, тогда при заданном m значение α определяется однозначно.

Сколько действий существует?

Классификация графов Шрейера





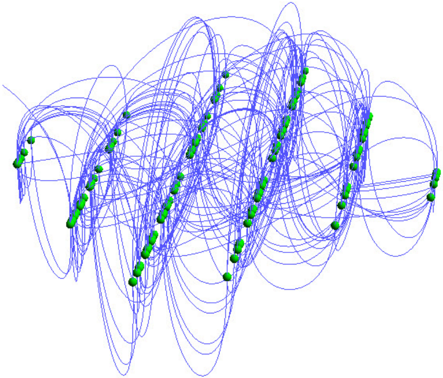
Парадокс: действия с различными показателями Ляпунова $[m]$ слабо (и спектрально) изоморфны.

Классификация графов Шрейера: $n = 2^k$

Теорема. Если $n = 2^k$, то $\Gamma_H \cong \mathcal{B}_{2^{2^k}}$ в сильном смысле (для случая действия на n-м уровне дерева).

Доказательство. $(x+1)^n = x^n + 1$.

Иллюстрация к динамике действия группы $\mathscr{L}_2$



Аналогично конструкции адического преобразования Вершика классифицируем вершины графа в соответствии с количеством “1” в двоичной записи индекса вершины, при этом две сингулярные точки графа соответствуют $000\ldots0$ и $111\ldots1$.

Спасибо за внимание!