О СЕМЕЙСТВАХ ПЛОСКИХ ПОЛИНОМОВ ЛИТЛВУДА С УНИМОДУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А.А.Приходько

Аннотация. В работе изучаются унимодулярные комплексные полиномы вида

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n, \quad \text{где} \quad |a_k| = 1.$$

Литлвуд в 1966 г. предложил исследовать оценки норм унимодулярных полиномов, а также полиномов с коэффициентами $\{-1, +1\}$ и $\{0, 1\}$ и, в частности, поставил вопрос о существовании унимодулярного полинома, плоского на единичной комплексной окружности. Это означает, что $(n+1)^{-1/2}|P(z)| \to 1$ для $|z| = 1$, когда степень полинома $n \to \infty$. Основная задача настоящей работы — установить существование параметрических семейств плоских полиномов Литлвуда

$$P^{(t)}(z) = a_0^{(t)} + a_1^{(t)} z + \cdots + a_n^{(t)} z^n, \qquad |a_k^{(t)}| = 1, \quad a_k^{(t+s)} = a_k^{(t)} \cdot a_k^{(s)},$$

в случае, когда t пробегает конечную арифметическую прогрессию $t \in [t_0, t_1] \cap \mathbb{Z}$, где $0 \ll t_0 \ll t_1$. В основу конструкции семейств $P^{(t)}(z)$ положено исследование эргодических свойств динамических систем, возникающих в связи с методом суммирования Ван дер Корпута. Работа выполнена при поддержке CNRS Normandie, гранта РФФИ № 11-01-00759-а и гранта по поддержке ведущих научных школ № НШ-5998.2012.1.

Ключевые слова: квадратичные суммы Гаусса, полиномы Литлвуда, плоские полиномы, произведения Рисса, спектральные инварианты динамической системы, представления Купмана, метод стационарной фазы, метод Ван дер Корпута.

1. Введение

В статье [17] Литлвуд поставил вопрос о том, существует ли комплексный полином $P(z) = a_0 + a_1 z \cdots + a_n z^n$ с унимодулярными коэффициентами $|a_k| = 1$ степени $n \geq 1$, удовлетворяющий условию

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad |z| = 1 \quad \Rightarrow \quad \big|\, (n+1)^{-1/2}|P(z)| - 1 \,\big| < \varepsilon$$

для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$? Такой полином мы называем ε-*ультраплоским*. Нетрудно привести пример унимодулярного полинома, обладающего указанным свойством не в каждой точке единичной окружности $S^1 = \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| = 1\}$, а в среднем, когда отклонение $(n+1)^{-1/2}|P(z)|$ от единицы измеряется нормой пространстве $L^1(S^1)$. В то же время, вопрос о построении полиномов, ε-ультраплоских на всей единичной окружности, оставался открытым до 1980 г. Положительный ответ дал Кахан [11], использовав при этом конструкцию, допускающую оценку скорости аппроксимации $\varepsilon_n = O(n^{-1/17}\sqrt{\log n})$, где $n = \deg P$.

Обозначим как $\mathcal{G}_n$ класс полиномов с унимодулярными коэффициентами степени n, $\mathcal{L}_n$ — подкласс в $\mathcal{G}_n$ полиномов с коэффициентами из множества $\{-1, 1\}$ (см. [29]) и $\mathcal{M}_q$ — семейство полиномов с коэффициентами из $\{0, 1\}$ вида

$$\mathcal{M}_q = \big\{Q(z) = q^{-1/2}(z^{\omega_0} + \cdots + z^{\omega_{q-1}})\colon\ \omega_k \in \mathbb{Z}\big\}.$$

До сих пор открыт вопрос о существовании ультраплоских полиномов в $\mathcal{L}_n$, $n \geq 1$, а также вопрос о существовании L^1-плоских тригонометрических сумм $Q(z) \in \mathcal{M}_q$, $q \geq 2$. Задача об исследовании свойств полиномов Литлвуда обладает множеством различных приложений в анализе и теории чисел [2, 15, 21, 23, 24, 29] и, кроме того, имеет глубокие взаимосвязи с теорией динамических систем и спектральной теорией [1, 6, 9, 26].

1.1. **Спектральные инварианты динамических систем.** Пусть T — обратимое сохраняющее меру преобразование стандартного пространства Лебега $(X, \mathcal{B}, \mu)$, где $\mathcal{B}$ — сигма-алгебра измеримых подмножеств фазового пространства X и μ — вероятностная мера, определённая для множеств из $\mathcal{B}$. В силу теоремы Рохлина [28] можно считать, что пространство X изоморфно отрезку $[0,1]$ с мерой Лебега. Унитарный *оператор Купмана* $\hat{T}$ (см. [19]) определяется как линейный оператор в пространстве $L^2(\mu)$, осущесвляющий сдвиг вдоль траекторий динамической системы, заданной преобразованием T,

$$\hat{T}\colon\ f(x) \mapsto f(Tx).$$

Оператор $\hat{T}$ является унитарным в сепарабельном гильбертовом пространстве $L^2(\mu)$. Каждый унитарный оператор в силу спектральной теоремы однозначно с точностью до унитарной эквивалентности задаётся *мерой максимального спектрального типа* σ и *функцией кратности* $M\colon\ S^1 \to \mathbb{C}$. В случае, когда унитарный оператор $\hat{T}$ является оператором Купмана, о паре $(\sigma, M(z))$ говорят, как о *спектральных инвариантах* динамической системы $(T, X, \mathcal{B}, \mu)$. Отметим, что задачи, обсуждаемые в нашей работе, как правило возникают при исследовании систем с *простым спектром*, для которых $M(z) \equiv 1$. Мера максимального спектрального типа может быть вычислена по следующей формуле, где f_0 — некоторый циклический вектор для $\hat{T}$,

$$\forall k \in \mathbb{Z} \qquad \int_{S^1} z^k\, d\sigma = \left\langle \hat{T}^k f_0,\ f_0 \right\rangle.$$

Полиномы с ограничениями на коэффициенты, аналогичные полиномам Литлвуда возникают в широком классе динамических систем, среди которых мы отметим определённый Вершиком класс адических систем [32, 33], динамические системы конечного ранга (см. [12, 13], [1] и [26]), а также обобщённые морсовские системы [6, 9]. В работах [1, 4, 13, 22] рассмотрен класс *динамических систем ранга* 1 (мы расскажем о них подробнее в разделе 2.1), порождающих *обобщенные произведения Рисса* полиномов Литлвуда с коэффициентами $\{0,1\}$, сходящиеся в слабой топологии к спектральной мере σ динамической системы:

$$\prod_{N=1}^{M} |Q_N|^2 \xrightarrow{w} \sigma \quad \text{при } M \to \infty, \qquad Q_N(z) \in \mathcal{M}_{q_N},$$

Бурген [4] доказал сингулярность произведений Рисса для класса автоморфизмов ранга 1 со случайными параметрами конструкции, предложенного Орнстейном в работе [22]. До сих пор остаётся открытым вопрос о том, существуют ли действие группы $\mathbb{Z}$ ранга 1 с абсолютно непрерывной компонентой в спектре, а также вопрос о том, существует ли на группе $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ произведение Рисса полиномов с коэффициентами $\{0,1\}$ (из классов $\mathcal{M}_q$), слабо сходящееся к мере, имеющей абсолютно непрерывную компоненту. Вопрос о возможности построения плоских полиномов в классе $\mathcal{M}_q$ также остаётся открытым. Недавно вопрос о существовании плоских полиномов был положительно решён [26] в классе $\mathcal{M}^{\mathbb{R}}$ полиномов с коэффициентами $\{0,1\}$ на группе $\mathbb{R}$, а именно, для любого компактного множества $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ существует полином

$$\mathcal{Q}^*(t) = \frac{1}{\sqrt{q}}(e^{i\omega_0 t} + e^{i\omega_1 t} + \cdots + e^{i\omega_{q-1} t}), \quad \omega_j \in \mathbb{R},$$

такой, что

$$\big\|\, |\mathcal{Q}^*(t)| - 1 \,\big\|_{L^1(\mathcal{K})} < \varepsilon.$$

Интересно отметить, что вопрос о существовании плоских полиномов в классе $\mathcal{M}_q$ связан с исследованием семейств полиномов $P^{(t)}(z) \in \mathcal{G}_{q-1}$ с непрерывным параметром t.

1.2. **Основной результат.** В этой работе мы установим существование семейств полиномов $P^{(t)}(z)$, являющихся плоскими относительно метрики в пространстве $L^1(S^1)$ для дискретного множества значений параметра $t \in [t_0, t_1] \cap \mathbb{Z}$, причём в силу специального арифметического характера конструкции свойство быть плоским нарушается в интервалах $(t, t+1)$, $t \in \mathbb{Z}$.

Теорема 1. *Пусть дано конечное множество $\boldsymbol{\tau} \subset \mathbb{N}$, и пусть $H = \text{НОК}(\boldsymbol{\tau})$, $q = \ell \cdot H$, где $\ell \in \mathbb{N}$ и $2H \mid q$. Тогда полиномы из класса $\mathcal{G}_{q-1}$*

$$P^{(t)}(z) = \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{j=0}^{q-1} e^{2\pi i\, t\tilde{\omega}(j)} z^j,$$

где

$$\tilde{\omega}(j) = \omega(j) + \Lambda(s), \qquad j = s\ell + \varkappa, \quad 0 \le \varkappa < \ell,$$
$$\omega(j) = \frac{j^2}{2q}, \qquad \Lambda(s) = \frac{s^2}{2H^2},$$

удовлетворяют оценке

$$\big\|\, |P^{(t)}(z)| - 1 \,\big\|_{L^1(S^1)} = O\left(\frac{H \cdot \ln q}{\sqrt{q}}\right) + O\left(\frac{\ln t}{\sqrt{t}}\right)$$

для $t \in \boldsymbol{\tau}$, а также и для всех $t \in \mathbb{N}$ со свойством $t \mid H$. В частности для любого $\varepsilon > 0$ существует $t_0 > 0$, такое, что полиномы $P^{(t)}(z)$ являются одновременно ε-плоскими относительно метрики $L^1(S^1)$, если $\forall\, t \in \boldsymbol{\tau}\colon\ t \ge t_0$ и $H^3 \cdot \ln^2 q \ll q$, причём оценка погрешности имеет вид $\varepsilon(t_0) = O(t_0^{-1/2} \ln t_0)$.

1.3. **Мотивация.** Задача о построении семейств плоских полиномов с унимодулярными коэффициентами тесно связана с вопросом о том, существует ли динамическая система ранга 1 (см. раздел 2.1 ниже), обладающая абсолютно непрерывной компонентой в спектре ассоциированного унитарного представления? В этой статье мы установим существование семейств плоских полиномов $P^{(t)}(z)$, образующих конечную прогрессию произвольной длины. В то же время, главная цель настоящей работы заключается скорее в том, чтобы увидеть, насколько широко может быть распространён *итерированный метод Ван дер Корпута*, положенный в основу нашей конструкции семейств плоских полиномов. Идея классического метода Ван дер Корпута (см. [31], см. также [30], раздел IV) состоит в том, чтобы аппроксимировать экспоненциальную сумму

$$\mathcal{S}_0 = \sum_{n=0}^{q} e^{2\pi i\, f(n)},$$

где $f(n)$ — медленно изменяющаяся C^2-гладкая функция, более короткой суммой

$$\mathcal{S}_1 = \sum_{k=k_0}^{k_1} |f''(y_k)|^{-1/2}\, e^{2\pi i\,(f(y_k) - k y_k)},$$

ассоциированной с множеством точек стационарности y_k, где

$$f'(y_k) = k, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Итерированный метод Ван дер Корпута опирается на следующее явление [26]: существуют такие функции f, для которых последовательность фаз $\Sigma_k = f(y_k) - ky_k$ снова может быть представлена как ограничение на $\mathbb{Z}$ некоторой регулярной вещественной функции $\eta \in C^2[k_0, k_1]$, а именно, $\Sigma_k = \eta(k)$, причём $\eta'(k_1) - \eta'(k_0) \ll k_1 - k_0$. К новой сумме $\mathcal{S}_1$ можно повторно применить метод Ван дер Корпута и аппроксимировать исходную сумму $\mathcal{S}_0$ ещё более простой суммой $\mathcal{S}_2$, количество слагаемых в которой порядка $m = \eta'(k_1) - \eta'(k_0)$. Мы называем такие суммы $\mathcal{S}_0$ *m-парадоксальными.*

Однако данное явление оказывается крайне неустойчивым относительно варьирования функции $f(n)$. Так например, основной объект нашего исследования — полиномы $P^{(t)}(z)$ представляют собой суммы, в которых функция $f(n)$ зависит от параметров t и θ

$$f(n) = t\omega(n) + \theta n, \qquad z = e^{2\pi i\,\theta}.$$

Если, например, $\omega(n) = n^2/q$, то нетрудно увидеть, что последовательность $\Sigma_{k,\theta}(t) = q(k-\theta)^2/2t$, возникающая в методе Ван дер Корпута оказывается весьма чувствительной по отношению к изменению параметров t, θ and q, когда степень полинома $q \to \infty$.

В какой степени данный эффект возникновения m-парадоксальных сумм может быть устойчив по отношению к варьированию t и θ ? В этой работе мы рассмотрим два ключевых примера: экспоненциальную частотную функцию $\omega_\circ(n) = q\lambda^{-2} \cdot e^{\lambda n/q}$ и упомянутую квадратичную функцию $\omega(n) = n^2/q$. Интересно отметить, что первая функция $\omega_\circ(n)$ порождет полиномы $P^{(t)}(\theta)$, ε-плоские в заданной точке θ_0, но для *целого отрезка* $[t_0, t_1]$ значений t (см. [26]). Наоборот, квадратичная функция $\omega(n)$ порождает 0-парадоксальные суммы при некотором t и *любом* θ, и мы покажем, как, используя этот факт, построить плоские семейства $P^{(t)}(z)$ для конечного множества значений t. В то же время, вопрос о существовании полинома $P^{(t)}(\theta)$, плоского на множестве положительной меры в пространстве параметров $\{(t, \theta)\}$ открыт. Кроме того, длина прогресси L в нашей конструкции намного меньше, чем степень полинома $q \gg \text{НОК}\{1, \dots, L\}$. Иными словами, сложность полинома $P^{(t_0)}(z)$ быстро растёт с ростом длины прогрессии $\{t_0, \dots, t_1\}$, и вопрос о существовании семейств полиномов указанного вида, для которых $L \sim q$ также открыт.

2. Динамическая проблема Литлвуда

Заметим, что нормированное в $L^2(S^1)$ множество полиномов $\mathcal{G}_{q-1}$ фиксированной степени представляет из себя группу, изоморфную тору $\mathbb{T}^q$, относительно операции покомпонентного умножения коэффициентов

$$(P \odot Q)(z) = \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{j=0}^{q-1} a_j b_j z^j, \qquad P(z) = \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{j=0}^{q-1} a_j z^j, \quad Q(z) = \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{j=0}^{q-1} b_j z^j.$$

Напомним, что $|a_j| = |b_j| = \|P\|_2 = \|Q\|_2 = \|P \odot Q\|_2 = 1$. Изучение свойств полиномов из $\mathcal{G}_{q-1}$ относительно данной мультипликативной структуры является нетривиальной задачей, а теорема 1 представляет собой частный случай следующего общего вопроса о семействах унимодулярных полиномов.

Вопрос 2 (*Динамическая проблема Литлвуда о плоских полиномах*)**.** Пусть задан гомоморфизм γ топологической группы Γ в группу $\mathcal{G}_{q-1}$ и некоторая область $U \subseteq \Gamma$. Мы назовём семейство полиномов $\gamma(U)$ *ε-плоским* по отношению к паре норм $(\|\cdot\|_{(1)}, \|\cdot\|_{(2)})$, если

$$\Big\| \big\| \, |P^{(t)}(z)| - 1 \, \big\|_{(1)} \Big\|_{(2)} < \varepsilon,$$

где $\|\cdot\|_{(2)}$ — некоторая норма в пространстве $L^\infty(U)$.

Таким образом, теорема 1 рассматривает случай $\Gamma = \mathbb{Z}$ и $U = \{t_0, \ldots, t_1\}$, $t_0 \gg 1$.

Вопрос 3. Существуют ли плоские при $n \to \infty$ семейства полиномов следующего вида?

(i) $\Gamma = \mathbb{R}$ и $U = [t_0, t_1]$ для $\|\cdot\|_{(2)} = \|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_{(2)} = \|\cdot\|_\infty$;

(ii) $\Gamma = U = \mathbb{Z}_q$ и $\|\cdot\|_{(2)} = \|\cdot\|_1$.

Вопрос 4. Существуют ли полиномы вида $\mathcal{Q}(t) = q^{-1/2}(e^{2\pi i\, t\omega_1} + \cdots + e^{2\pi i\, t\omega_q})$, являющиеся локально ε-плоскими (на каждом отрезке) относительно нормы в $L^1(\mathbb{R})$ для всех $t \in \mathbb{R}$ при $q \to \infty$?

В работе [3] предлагается новый способ конструирования ультраплоских полиномов на окружности, не использующий случайные параметры, и улучшается оценка работы Кахана [11].

Вопрос 5 (*О семействе ультраплоских полиномов – Усиленная теорема Кахана*)**.**

(i) Верна ли вариация теоремы 1, если потребовать, чтобы $\big| |P^{(t)}(z)| - 1 \big| < \varepsilon$ во всех точках $|z| = 1$?

(ii) Существует ли пара ε-ультраплоских полиномов

$$P^{(1)}(z) = \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{j=0}^{q-1} a_j z^j \quad \text{и} \quad P^{(2)}(z) = \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{j=0}^{q-1} a_j^2 z^j, \qquad |a_j| = 1,$$

для сколь угодно большого q?

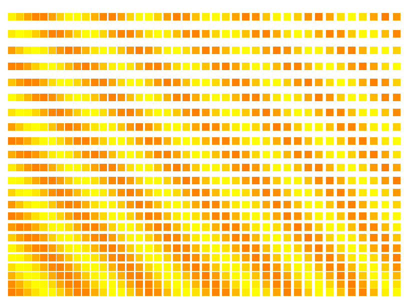

Рис. 1. Множества $c + F_n$, $c \in C_n$, определяющие структуру динамической системы ранга 1 окрашены в соответствии со значениями некоторого характера на группе G, взятого в соответствующих точках множества C_n.

2.1. **Динамические системы ранга 1 и произведения Рисса.** Сейчас мы увидим, как динамическая проблема Литлвуда возникает при исследовании спектральных мер систем ранга 1. Пусть G — аменабельная группа, и пусть заданы пары (F_n, C_n), $n \in \mathbb{N}$, где C_n выбираются как дискретные подмножества в G, а F_n как открытые области конечного объёма, такие, что $x + F_n \cap y + F_n$ для любых $x, y \in C_n$, $x \neq y$. Как правило, множество C_n локально и с точностью до сдвига близко к некоторой решётке Γ_n, а множество F_n с небольшой относительной погрешностью совпадает с фундаментальной областью в группе G по отношению к Γ_n. Будем также предполагать, что $F_{n+1} \supseteq C_n + F_n$ для каждого n, и что

$$\nu(C_n + F_n \mid F_{n+1}) = 1 + o(1)$$

с достаточно хорошей точностью, необходимой для корректности нижеследующей конструкции (см. [5]). Здесь ν — мера Хаара на группе G. Далее для простоты мы считаем, что группа G абелева. Фазовое пространство динамической системы ранга 1 мы определим как обратный предел пространств F_n относительно проекций ϕ_n, которые определяются следующим образом:

$$\phi_n\colon\ F_{n+1}\supset D(\phi_n)\to F_n,\qquad \phi_n(c+f)=f,\quad c\in C_n,\quad f\in F_n.$$

Отображение ϕ_n определено не везде, но условная мера Хаара области определения $D(\phi_n)=C_n+F_n$ по построению близка к 1. Определим фазовое пространство нашей динамической системы как

$$X=\bigl\{(x_m,x_{m+1},\dots,x_n,\dots)\colon\ x_n\in F_n,\ \phi_n(x_{n+1})=x_n\bigr\}.$$

При определённых ограничениях на параметры конструкции на пространстве X существует конечная борелевская мера μ, совпадающая при ограничении на $\{x\colon\ x_n\in F_n\}$ с мерой Хаара на G с точностью до постоянного коэффициента. Эта мера инвариантна относительно действия T^g, которое определяется следующим образом. Для фиксированного $g\in G$ и для почти кажой точки $x\in X$ существует индекс $n_0=n_0(x,g)$, такой, что для всех $n\ge n_0(x,g)$ выполнено: $g+x_n\in F_n$. Положим

$$T^gx=(g+x_{n_0},g+x_{n_0+1},\dots,g+x_n,\dots).$$

Поскольку каждая последовательность $x=(x_n)$ определена с точностью до начального отрезка последовательности, данное определение корректно.

Лемма 6. *Пусть $f(x)$ — некоторая функция на фазовом пространстве X, такая, что $f(x)=f_{n_0}(x_{n_0})$, где $f_n\in L^\infty(F_n)$. Тогда для каждого $n\ge n_0$ поднятие функции $f(x)$ на уровень n имеет вид $f(x)=f_n(x_n)$, причём*

$$f_{n+1}(x_{n+1})=f_n(\phi_n(x_{n+1})),\quad \textit{если}\quad x_{n+1}\in D(\phi_n),$$

и $f_{n+1}(x_{n+1})=0$ иначе.

Заметим, что цилиндрические функции, рассмотренные в лемме, плотны в $L^2(X,\mu)$. Операцию поднятия можно представить как изометрический оператор

$$V_n\colon\ L^2(F_n)\to L^2(F_{n+1}).$$

Легко проверить, что (см. рис. 1)

$$f_{n+1}=V_nf_n=\gamma_n\mathbf{1}_{C_n}*f_n,$$

где $\gamma_n\mathbf{1}_{C_n}$ — дискретная мера — должным образом нормированное равномерное распределение на конечном множестве C_n. Таким образом, для преобразований Фурье $\widehat{f_n}$ имеет место соотношение

$$\widehat{f_n}=\prod_{k=n_0}^{n-1}\widehat{\mathbf{1}}_{C_n}\cdot\widehat{f}_{n_0}$$

и верна следующая теорема (для $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{R}$ см., например, [26]).

Теорема 7. *Пусть $G=\mathbb{Z}^n$ или $G=\mathbb{R}^n$ и $f(x)=f_{n_0}(x_{n_0})\in L^\infty(X,\mu)$. Тогда спектральная мера σ_f может быть вычислена как предел относительно слабой топологии в $C_0^*(G)$ конечных произведений в обобщённом произведении Рисса*

$$d\sigma_f=|\widehat{f}_{n_0}(t)|^2\cdot\prod_{n=n_0}^{\infty}|P_n(t)|^2\,dt,$$

где $P_n=\widehat{\mathbf{1}}_{C_n}$ суть полиномы Литлвуда на дуальной группе $\widehat{G}$ из класса $\mathcal{M}^G$,

$$P_n(t)=\frac{1}{\sqrt{\#C_n}}\sum_{y\in C_n}\chi_y(t),\qquad t\in\widehat{G},$$

и dt — вероятностная мера Хаара на дуальной группе.

Препдоложим, мы интересуемся построением динамической системы ранга 1, обладающей абсолютно непрерывной компонентой в спектре. Легко увидеть, что данное свойство зависит исключительно от структуры бесконечного произведения Рисса $\prod_n |P_n(t)|^2$. Разумно предположить, что введённое Литлвудом свойство *быть плоским*, является достаточным для того, чтобы спектральная мера σ_f была абсолютно непрерывной по отношению к мере Хаара на $\widehat{G}$, а мера максимального спектрального тип системы совпадала с мерой Хаара. В этом случае мы говорим, что система имеет *Лебеговский спектр*. Однако данное утверждение в максимальной общности (для произвольных ε_n-плоских полиномов) a priori не очевидно (см., например, [26]), а в некоторых случаях не верно, так как сложно устроенное отклонение $|P_n(t)|$ от единицы может дать вклад в произведение в виде нетривиальной сингулярной компоненты. Тем не менее, при разумных ограничениях на полиномы $P_n(t)$ произведение будет абсолютно непрерывным, а спектр Лебеговским. В то же время, если полиномы $P_n(t)$ не являются плоскими, то, напротив, доказательство сингулярности произведения не сложно и опирается на общие, не зависящие от структуры полиномов $P_n(t)$ аналитические аргументы (см. [1]), но при этом такие произведения Рисса порождают огромное многообразие сингулярных мер, которые являются не только различными, но и не эквивалентными, тем самым порождая неизоморфные динамические системы ранга 1.

Повторим, тем не менее, что задача построения плоских полиномов в классе $\mathcal{M}^G$ далека от решения. Положительный ответ дан в случае группы $\mathbb{R}$. Для групп $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 1$, и $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$ вопрос открыт. В то же время, существование абсолютно непрерывных произведений Рисса на группе $\widehat{G} = \mathbb{R}^d$ также установлено, но опирается на специальную структуру произведения в целом, в то время как полиномы $P_n(t)$ не являются плоскими в требуемом смысле [27].

Вопрос 8. Для каких абелевых групп G:

(i) существуют полиномы Литлвуда в классе $\mathcal{M}^G$, L^1-плоские на $\widehat{G}$?

(ii) существуют полиномы Литлвуда в классе $\mathcal{M}^G$, являющиеся L^1-плоскими на любом наперёд заданном компактном подмножестве в $\widehat{G} \setminus \{0\}$?

(iii) существуют абсолютно непрерывные бесконечные риссовские произведения полиномов из $\mathcal{M}^G$?

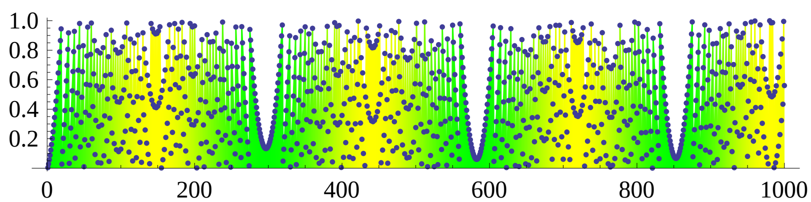

Рис. 2. Точки стационарности y_k в методе Ван дер Корпута. На рисунке изображён график функции частотной функции $f(n) \pmod 1$, $n \in \mathbb{Z}$. Области зелёного цвета обозначают окрестности стационарных точек.

3. Метод Ван дер Корпута

3.1. **Экспоненциальные суммы.** Известно, что полином $P_0(e^{2\pi i\theta}) \in \mathcal{G}_{q-1}$ с квадратичной частотной функцией $\omega(j) = \frac{1}{2}j^2/q$ при большом q является ультраплоским в области $\theta \in \mathbb{T} \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)$. Более того, полином $P_0(e^{2\pi i\theta})$ является плоским относительно нормы в $L^1(\mathbb{T})$. Это наблюдение является примером использования классического метода Ван дер Корпута (см. [31], см. также [30], глава IV), суть которого заключается в следующем. Рассмотрим вещественную функцию $f(y) \in C^2(a,b)$ с монотонной производной на интервале (a,b) и предположим, что функция $f(y)$ достаточно медленно изменяется в пределах промежутка (a,b), а имеенно, пусть $f''(y) \ll 1$. Ван дер Корпут заметил, что сумму $\sum_{j\in(a,b)} e^{2\pi i\, f(j)}$ можно вычислить следующим образом:

$$S_{a,b,f} = \sum_{a<j<b} e^{2\pi i\, f(j)} = \sum_{\alpha<k<\beta} \frac{1}{\sqrt{|f''(y_k)|}}\, e^{2\pi i\,(f(y_k)-ky_k\pm 1/8)} + \mathcal{E}, \tag{1}$$

где $\alpha = f'(a)$, $\beta = f'(b)$, точки y_k являются решениями уравнения $f'(y_k) = k$, $k \in \mathbb{Z}$, и $\mathcal{E}$ — погрешность, оценивание которой представляет собой отдельную задачу. Иными словами, основной вклад в осцилляторную сумму $S_{a,b,f}$ даёт небольшая окрестность *точек стационарности фазы* y_k. Данный метод опирается на следующую лемму о приближении осцилляторных сумм интегралами ([31] и [30], лемма 1, раздел IV.2).

Определение 9. Будем называть *редуцированной суммой* и обозначать $S'_{\alpha,\beta,f}$ первую сумму в правой равенства (1),

$$S'_{\alpha,\beta,f} = \sum_{\alpha<k<\beta} \frac{1}{\sqrt{|f''(y_k)|}}\, e^{2\pi i\,(f(y_k)-ky_k+\sigma\cdot 1/8)}, \tag{2}$$

где $\sigma = \operatorname{sgn} f''(y)$.

Лемма 10. *Пусть $f(y)$ — действительная дифференцируемая функция с монотонно убывающей производной на интервале (a,b) и $\alpha = f'(a)$, $\beta = f'(b)$. Тогда*

$$\sum_{a<j\le b} e^{2\pi i\, f(j)} = \sum_{\alpha-\eta\,<\,k\,<\,\beta+\eta} \int_a^b e^{2\pi i\,(f(y)-ky)}\, dy \;+\; O(\ln(\beta-\alpha+2)),$$

где $\eta \in (0,1)$ суть произвольная постоянная.

Дальнейшее исследование свойств погрешности $\mathcal{E}$ в методе Ван дер Корпута требует знания ряда дополнительных свойств функции $f(y)$. В работе [7] (см. также [16] и refMaryWeissOnHLSeries) Харди и Литлвуд говорят о том, что ими обнаружена сумма

$$S_{\mathrm{HL}}(N,\tilde\alpha,\theta) = \sum_{n=1}^{N} e^{i\tilde\alpha n\ln n + in\theta}, \qquad \tilde\alpha \in \mathbb{R}, \quad \tilde\alpha \ne 0, \quad \theta \in [0,2\pi], \tag{3}$$

которая позволяет проиллюстрировать более простым и элегантным образом проиллюстрировать ряд нетривиальных эффектов в теории тригонометических рядов, нежели экспоненциальные суммы с квадратичной функцией $\omega(n)$, и поведение суммы $S_{\mathrm{HL}}(N,\tilde\alpha,\theta)$ в основном не зависит от арифметической природы $\tilde\alpha$. В частности, сумма удовлетворяют универсальной оценке

$$S_{\mathrm{HL}}(N,\tilde\alpha,\theta) \le \mathcal{A}(\tilde\alpha)\sqrt{N},$$

где $\mathcal{A}(\tilde\alpha)$ — положительная константа, зависящая только от $\tilde\alpha$. Как мы увидим в рзделе 3.5, суммы Харди–Литлвуда возникают в результате применения метода Ван дер Корпута к суммам на основе экспоненциальной частотной функции $\omega_\circ(y) = q\lambda^{-2}\cdot e^{\lambda y/q}$ и в этой конструкции решающую роль играют именно арифметические свойства $\tilde\alpha$ (см. примеры 21 и 25).

Предположим теперь, что $\kappa\lambda_2 \le |f''(x)| \le \lambda_2$. В серии работ нескольких авторов ([31], [25] и др.) устанавливается аналогичная оценка для метода Ван дер Корпута:

$$\mathcal{E} = O(\lambda_2^{-1/2}) + O(\mathcal{E}_3),$$

где $\mathcal{E}_3$ оценивается при условии ограниченности старших производных: $f^{(3)}(x)$ и т.д. Весьма сильная оценка такого типа получена в работах: Колесник [14], Хит-Браун [10]. А именно, предположим, что функция $f(z/a)$ аналитически продолжается в выпуклую область $U \supset [1, b/a]$, и пусть оценка на $|f''(z)|$ сохраняется в области U, причём для $x \in U \cap \mathbb{R}$ выполнено $f''(x) \le \kappa\lambda_2$. Тогда верно равенство ([10], лемма 6)

$$\mathcal{E} = O(\lambda_2^{-1/2}) + O(\ln(2 + (b-a)\lambda_2)).$$

В то же время, для большóго класса дискретных экспоненциальных сумм с медленно изменяющейся частотной функцией $f(y)$ типичные значения $\mathcal{E}$ намного меньше, а именно, порядка $O(\ln(b-a))$, где $b-a$ — число слагаемых в сумме. Мин получил оценку следующего вида ([20], тоерема 2.2, — см. [18]), в которой универсальное слагаемое $O(\lambda_2^{-1/2})$ в оценке заменяется на оценку, зависящую от значений α и β.

Лемма 11. *Пусть $f(y)$ — алгебраическая функция и известно, что $\kappa\lambda_2 \le |f''(y)| \le \lambda_2$, $|f^{(3)}(y)| \le \lambda_2 U^{-1}$, $U \ge 1$, и пусть $f'(a), f'(b) \notin \mathbb{Z}$. Тогда*

$$\begin{aligned}(4)\quad \mathcal{E} = O(\ln(2 + (b-a)\lambda_2)) \ + \ O((b-a+\lambda_2^{-1})U^{-1}) + \\ + O\left(\min\{\lambda_2^{-1/2}, \max\{\frac{1}{\|\alpha\|_{\mathbb{Z}}}, \frac{1}{\|\beta\|_{\mathbb{Z}}}\}\}\right),\end{aligned}$$

где $\alpha = f'(a)$, $\beta = f'(b)$ и $\|t\|_{\mathbb{Z}}$ — расстояние от точки t до множества $\mathbb{Z}$.

В работе [8] Гото приводит аналогичные оценки (леммы 2.3 и 2.4), снабжённые исчерпывающим исследованием возникающих в данных оценках констант. Далее, в [18] Лиу рассматривает более общий случай $f \in C^5[a,b]$ и получает оценки такой же структуры, но в предположении, что

$$3f''(y)f^{(4)}(y) - 5(f^{(3)}(y))^2 \ne 0,$$

исключающем классический случай $f(y) = y^2$.

В настоящей работе мы воспользуемся простым частным случаем оценки (4).

Лемма 12. *Пусть $t > 0$ и*

$$f(y) = \frac{y^2}{2Q} + \theta y + c, \qquad y \in (a,b), \quad b - a \le Q,$$

Тогда

$$\begin{aligned}(5)\quad \sum_{a \le j < b} e^{2\pi i\, f(j)} = \mathbf{1}_{\{(a,b)+Q\mathbb{Z}\}}(y_k)\cdot\sqrt{Q}\, e^{2\pi i\,(f(y_k) - k y_k + 1/8)} + \\ + O\left(\ln\left(2 + \frac{b-a}{Q}\right)\right) \ + \ O\left(\min\{\sqrt{Q}, \max\{\frac{1}{\|\alpha\|_{\mathbb{Z}}}, \frac{1}{\|\beta\|_{\mathbb{Z}}}\}\}\right),\end{aligned}$$

где $\alpha = Q^{-1}a + \theta$, $\beta = Q^{-1}b + \theta$ и точка y_k — единственное (если существует) решение уравнения $f'(y_k) = k \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Применим лемму 11. В условиях нашей леммы $f''(y) \equiv \lambda_2 = Q^{-1}$, $f^{(3)}(y) \equiv 0$, а значит, мы можем взять в качестве U любую сколь угодно большую константу (заметим, что это a priori невозможно для упомянутой теоремы Лиу). Таким образом, оценка леммы 11 приобретает форму второго и третьего слагаемых в (5). В то же время, первое слагаемое в формуле (5) есть не что иное, как сумма в правой части уравнения (1), содержащая в нашем случае одно, либо ни одного слагаемого. Индикаторная функция $\mathbf{1}_{\{(a,b)+Q\mathbb{Z}\}}(y_k)$ имеет простой и наглядный смысл: если (единственная) точка стационарности y_k оказывается внутри промежутка суммирования (a,b), то мы включаем одно слагаемое $(f''(y_k))^{-1/2}e^{2\pi i\,(f(y_k)-ky_k+1/8)}$, иначе правая часть формулы (5) содержит только оценку погрешности $\mathcal{E}$. □

Следствием данной оценки является следующая лемма. Положим $e(\theta) = \exp(2\pi i\,\theta)$.

Лемма 13. *Полином*

$$\mathcal{P}_0(\theta) = \frac{1}{\sqrt{q}}\sum_{j=0}^{q-1} e\left(\omega(j)+\theta j\right), \qquad \omega(y) = \frac{y^2}{2q}, \qquad \theta \in \mathbb{T} \simeq [0,1],$$

обладает свойством

$$\big|\,|\mathcal{P}_0(\theta)| - 1\,\big| < \nu(1,q,\theta) = O\left(\frac{1}{\sqrt{q}}\right) + O\left(\min\{1, \frac{1}{\sqrt{q}\,\theta(1-\theta)}\}\right), \tag{6}$$

где символом $\nu(1,q,\theta)$ *обозначена оценка погрешности* $\mathcal{E}$ *из леммы 12 при* $Q = b-a = q$ *и* $\alpha \equiv \beta \equiv \theta \pmod 1$. *В частности,*

$$\big\|\,|\mathcal{P}_0(\theta)| - 1\,\big\|_1 = O\left(\frac{\ln q}{\sqrt{q}}\right).$$

Доказательство. Вычислим стационарные точки y_k. Имеем $\omega'(y_k) - \theta = y_k/q + \theta = k$. Значит, $y_k = q(k-\theta)$ и при каждом $\theta \in \mathbb{T}$, кроме одного исключительного значения $\theta = 0$, существует ровно одна стационарная точка $y_k \in (0,q)$, причём $k = 0$, поэтому

$$\mathcal{P}_0(\theta) = e(\omega(y_0) + \theta y_0 + 1/8) + \mathcal{E} = e\left(-\frac{q\theta^2}{2}\right) + \mathcal{E}.$$

Таким образом, $\big|\,|\mathcal{P}_0(\theta)| - 1\,\big| \le |\mathcal{E}|$ и легко видеть, что оценка погрешности $\nu(1,q,\theta)$ имеет именно такой вид, как указано в (6). □

Следующая лемма является обобщением леммы 13 и доказывается аналогично.

Лемма 14. *Рассмотрим зависящий от параметра* $t \ll q$ *полином*

$$\mathcal{P}_0^{(t)}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{q}}\sum_{j=0}^{q-1} e\left(t\omega(j)+j\theta\right), \qquad \omega(y) = \frac{y^2}{2q},$$

и пусть точки $y_k = y_k(t,\theta)$ *определяются как решения уравнения* $t\cdot\omega'(y_k) + \theta = k$, *где* $k \in \mathbb{Z}$. *Тогда* $\mathcal{P}_0^{(t)}(\theta)$ *аппроксимируется суммой, ассоциированной с множеством точек стационарности* $y_k(t)$,

$$\left|\mathcal{P}_0^{(t)}(\theta) - \frac{1}{\sqrt{t}}\sum_{\alpha<k<\beta} e(t\omega(y_k) - ky_k)\right| < \nu(t,q,\theta) = O\left(\frac{\ln t}{\sqrt{q}}\right) + O\left(\min\{\frac{1}{\sqrt{t}}, \frac{1}{\sqrt{q}\cdot\|\theta\|_{\mathbb{Z}}}\}\right).$$

В частности,

$$\big\|\,|\mathcal{P}_0^{(t)}(\theta)| - 1\,\big\|_1 = O\left(\frac{\ln q}{\sqrt{q}}\right).$$

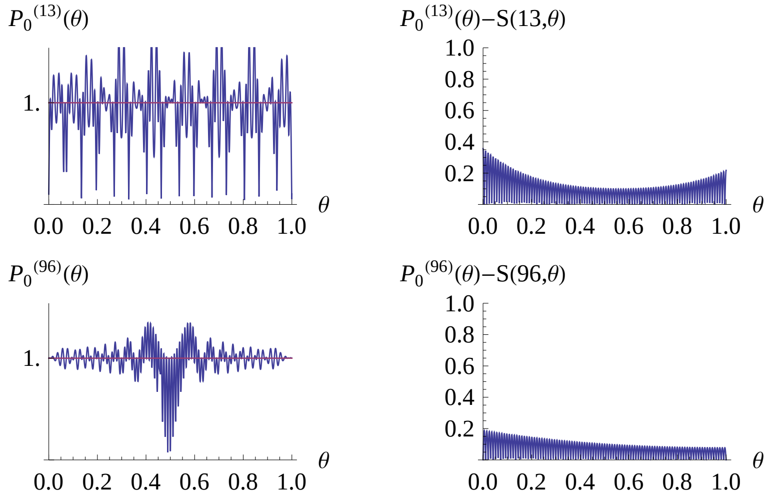

Рис. 3. Иллюстрация к лемме 14: На рисунке изображены графики полиномов $\mathcal{P}_0^{(13)}(\theta)$ и $\mathcal{P}_0^{(96)}(\theta)$ (*слева*), $q = 97$, а также функций, представляющих погрешность аппроксимации в методе Ван дер Корпута (*справа*). Формулировка леммы 14 на первый взгляд содержит парадоксальную особенность – отсутствие зависимости от t при больших t. И действительно, как видно из рисунка, лемма подтверждается даже при $t = q - 1 = 96$. Можно заметить также, что полином $\mathcal{P}_0^{(96)}(\theta)$ является ε-ультраплоским на $\mathbb{T}$ за исключением малой окрестности точки $1/2$. Этот эффект следует из свойств квадратичной функции $\omega(j)$: формулировка леммы инвариантна относительно преобразования $t \mapsto t + q$.

Заметим, что, поскольку $\theta \in \mathbb{T}$ рассматривается как смежный класс $\theta + \mathbb{Z}$, величина $\theta(1-\theta) \asymp \|\theta\|_{\mathbb{Z}}$ служит явной формой представления расстояния $\|\theta\|_{\mathbb{Z}}$, когда окружность $\mathbb{T}$ отождествляется с отрезком $[0,1]$ со склееными концами. Отметим также, что, применяя данную лемму, мы обычно будем рассматривать случай $t \geq 1$. Наконец, обратим внимание на то, что при $t \to 0$ лемма даёт асимптотику оценки $t^{-1/2}$.

3.2. **Суммы Гаусса.** Пусть q — простое число. Один из наиболее важных примеров плоских тригонометрических сумм — суммы Гаусса

$$\mathcal{P}_0^{(r)}(s/q) = \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{j=0}^{q-1} e\left(r\frac{j^2}{q} + \frac{s}{q} \right),$$

обладающие свойством $|\mathcal{P}_0^{(r)}(s/q)| = 1$, как только $(r,q) = 1$ и $s \in \mathbb{Z}_q$. Важно отметить, что это свойство неустойчиво как по отношению к изменению r, если рассматривать $r \in \mathbb{R}$, так и к выбору произвольной точки $\theta \in \mathbb{T}$. Заметим также, что метод Ван дер Корпута нельзя применить “напрямую” к суммам данного вида, поскольку при больших значениях r возникает сумма по множеству стационарных фаз, значения которой трудно проконтролировать при всех значениях θ и, кроме того, накапливается большая ошибка в оценке $\mathcal{E}$.

Основная идея нашего исследования — рассмотреть на ряду с экспоненциальными суммами Гаусса

$$\mathcal{P}^{(t)}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{j=0}^{q-1} e\left(t\omega(j) + j\theta\right), \qquad \omega(y) = \frac{y^2}{2q}$$

с квадратичной функцией $\omega(y)$ семейства полиномов, для которых частотная функция $\tilde{\omega}(y)$ является кусочно-гладкой и отличается от $y^2/2q$ на кусочно постоянную функцию. Иными словами, мы рассмотрим функции $\tilde{\omega}(y)$, для которых $\|\tilde{\omega} - \omega\|_1 = o(1)$.

Заметим, что главное препятствие к обнаружению одновременно плоских полиномов $\mathcal{P}^{(t_1)}(\theta)$ и $\mathcal{P}^{(t_2)}(\theta)$ состоит в том, что различным моментам времени t_1 и t_2 отвечают различные множества точек стационарности фазы $y_{k,\theta}(t)$, где $k \in \{k_0(t,\theta), \ldots, k_1(t,\theta)\}$,

$$t\omega'(y_{k,\theta}) + \theta = k,$$

и, соответственно, разные динамически зависящие от t суммы $\sum_k e^{2\pi i\,(t\omega(y_{k,\theta}(t)) - k\,y_{k,\theta}(t))}$. Сложная структура поведения этих сумм отчасти объясняется тем, что индуцированная квадратичной функцией $\omega(y)$ группа преобразований, траектории которой задают движение точек $y_{k,\theta}(t)$, действует гиперболически (ср. [26]). Это индуцированние производится следующим образом (теперь на некоторое время мы предположим, что $\omega(y)$ — произвольная выпуклая функция класса $C^2(\mathbb{R})$).

3.3. **Общая схема метода Ван дер Корпута для сумм с параметром.**

Лемма 15. *Пусть $\omega(y) \in C^2(\mathbb{R})$ — неотрицательная функция, такая, что $\omega''(y) > 0$. Рассмотрим уравнение*

$$t\omega'(y) = x = k - \theta, \qquad y, x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Положим $\phi(y) = \omega'(y)$ и определим семейство отображений R^t следующим образом:

$$R^t(y) = \phi^{-1}\left(\frac{\phi(y)}{t}\right). \tag{7}$$

Тогда $\{R^t\}$ — действие мультипликативной группы $\mathbb{R}_+$. Каждая точка стационарности $y_k(t) = y_{k,\theta}(t)$ движется по траектории динамической системы $\{R^t\}$, а именно,

$$y_k(t) = R^t y_k(1).$$

Кроме того, действие R^t задаётся автономным (стационарным) дифференциальным уравнением относительно $\tau = \ln t$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} y = -\frac{\phi(y)}{\phi'(y)},$$

где $t\dot{y} = \frac{\partial}{\partial \tau} y$.

Доказательство. Положение стационарной точки $y_k = y_k(t)$ определяется уравнением $t\omega'(y_k) = x = \mathrm{const}$, откуда выводим

$$y_k(t) = \phi^{-1}(x/t) = R^t(y_k(1))$$

и, учитывая, что $x = \phi(y_k(1))$, имеем

$$R^t(y_k(1)) = y_k(t) = \phi^{-1}(\phi(y_k(1))/t).$$

Данное соотношение зависит только от частного значения $y^* = y_k(1)$, следовательно, действие R^t определяется уравнением (7). Легко проверить, что $R^{st} = R^s \circ R^t$. □

Здесь и далее, фиксируя значение θ, мы часто будем опускать индекс θ в обозначении точки стационарности $y_k(t) = y_{k,\theta}(t)$.

Наблюдение 16. Редуцированная сумма (2), возникающая в результате применения метода Ван дер Корпута к сумме $\sum_{j=0}^{q-1} e(t\omega(j)+\theta j)$ имеет вид

$$\mathcal{S}(t,\theta) = S'_{K_0(t),K_1(t),t\omega(y)+\theta y} = \sum_{K_0(t)<k<K_1(t)} \frac{1}{\sqrt{q\,\omega''(y_k)}}\, e^{2\pi i\,\Sigma_k(t,\theta)}, \tag{8}$$

где

$$\Sigma_k(t,\theta) \overset{def}{=} t\omega(y_k) - (k-\theta)y_k, \qquad K_0(t) = t\omega'(0)+\theta, \quad K_1(t) = t\omega'(q)+\theta.$$

Наблюдение 17. Суммирование по промежутку $(K_0(t), K_1(t))$ в формуле (8), очевидно, эквивалентно суммированию по подмножеству стационарных точек $y_k(t)$, попадающих в интервал $(0,q)$ в момент времени t. Иными словами, редуцированную сумму можно представить в виде

$$\mathcal{S}(t,\theta) = \sum_{k:\ R^t y_{k,\theta}(1)\in(0,q)} \frac{e^{2\pi i\,\Sigma_k(t,\theta)}}{\sqrt{q\,\omega''(y_k)}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{1}_{(0,q)}(R^t y_k(1))\cdot \frac{e^{2\pi i\,\Sigma_k(t,\theta)}}{\sqrt{q\,\omega''(y_k)}}\,. \tag{9}$$

Исследуем теперь зависимость от времени t значений $\Sigma_k = \Sigma_k(t,\theta)$.

Наблюдение 18. В силу фундаментального уравнения $t\omega'(y_k) = x = k-\theta$ производная величины $\Sigma_k(t,\theta) = t\omega(y_k(t)) - xy_k(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{\Sigma}_k = t\omega'(y_k)\,\dot{y}_k + \omega(y_k) - x\dot{y}_k = \omega(y_k).$$

Значит, $\Sigma_k(t,\theta)$ как функция от y является решением дифференциального уравнения, не зависящего явным обазом от k,

$$\dot{\Sigma}_k = \omega(y_k(t)). \tag{10}$$

Кроме того, лекго увидеть, что

$$t\,\ddot{\Sigma}_k = ky_k \quad \text{и} \quad \Sigma_{\tau\tau} - \Sigma_\tau = e^\tau \omega_\tau,$$

где $(\cdot)_\tau$ обозначает производную по τ.

Таким образом, свойства двух рассмотренных динамических систем: действия R^t и уравнения (10), представляющего эволюцию $\Sigma_k(t)$, полносью определяют структуру редуцированной суммы $\mathcal{S}(t,\theta)$. Итак, объединяя наблюдения 16, 17 и 18, приходим к следующей теореме.

Теорема 19 (динамическая интерпретация метода Ван дер Корпута)**.** *Пусть*

$$\mathcal{P}^{(t)}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} h(j)\, e^{2\pi i\,(t\omega(j)+\theta j)},$$

где $h(y) = \mathbf{1}_{(a,b)}$ — индикатор некоторого интервала прямой и $\omega(y)$ — C^2-гладкая функция, $\omega''(y) > 0$. Тогда суммы, дающие основной вклад в полином $\mathcal{P}^{(t)}(\theta)$ в методе Ван дер Корпута, могут быть представлены в виде:

$$\mathcal{S}(t,\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{h(y_k)}{\sqrt{q\,\omega''(y_k)}}\, e^{2\pi i\,\Sigma_k(t,\theta)} = \sum_{y\in Y(t)} \frac{h(y)}{\sqrt{q\,\omega''(y)}}\, e^{2\pi i\,\widetilde{\Sigma}(t,y)},$$

где

$$\frac{d}{dt}\widetilde{\Sigma}(t,y(t)) = \omega(y(t)), \qquad Y(t) = R^t Y_0 \quad \textit{и} \quad Y_0 = \{y\colon\ \omega'(y) \in -\theta+\mathbb{Z}\}.$$

Замечание 20. Аналогичный результат верен и для сумм вида $\sum_j h(j)e(t\omega(j)+\theta j)$, где роль $h(y)$ в теореме 19 играет произвольная финитная гладкая функция на прямой $\mathbb{R}$.

Пример 21. Рассмотрим экспоненциальную частотную функцию

$$\omega_\circ(y) = \frac{q}{\lambda^2}\, e^{\lambda y/q}, \qquad \lambda^{-1} \in \mathbb{N}, \quad y \in [0, q].$$

и зафиксируем некоторую точку $\theta = \theta_0$, скажем, $\theta_0 = 0$. Точки стационарности, определяемые данной функцией, имеют вид

$$y_k(t) = \frac{q}{\lambda} \ln \frac{\lambda k}{t},$$

а действие R^t есть в точности действие сдвигами на прямой $\mathbb{R}$,

$$R^t\colon\ y \mapsto y - \frac{q}{\lambda} \ln t.$$

Для пары динамических систем (7) и (10), порождённых функцией $\omega_\circ(y)$, выполнены следующие замечательные соотношения:

$$\frac{d}{dt}\Sigma(y_k) = \frac{q}{\lambda} \cdot \frac{k}{t}, \qquad \frac{d}{dt}(t\omega_\circ(y)) = 0, \qquad \dot{y}_{k+s} - \dot{y}_k = 0.$$

Вычислим явно значения функции $\Sigma_k(t, \theta)$ по модулю 1 (см. [26]),

$$\Sigma_k(t, \theta) = -k y_k = q \cdot \frac{1}{\lambda} k \ln k + \xi(t)\, k = q\, \Omega(k) + \xi(t)\, k,$$

где

$$\Omega(k) = \frac{1}{\lambda} k \ln k.$$

3.4. **Бифуркации точек стационарности.** Рассмотрим снова нашу экспоненциальную сумму

$$\mathcal{P}^{(t)}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{j=0}^{q-1} e^{2\pi i\, (t\omega(j) + \theta j)}$$

и отметим, что деление на $\sqrt{q}$ в точности соответствует нормированию суммы в $L^2(\mathbb{T})$. С точки зрения квантовой механики рассматривается движение свободной частицы, заданное уравнением Шрёдингера с гамильтонианом $\omega(y)$ (нет зависимости от пространственной переменной θ) и волновая функция $\psi(t, \theta) = \mathcal{P}^{(t)}(\theta)$ нормирована стандартным образом, а именно, $|\psi(t, \theta)|^2$ интерпретируется как вероятность обнаружения частицы в точке θ. Кроме того, мы рассматриваем случай, когда допустимые значения импульса дискретны, а разрешённые значения энергии суть $\{\omega(j)\colon\ j \in \mathbb{Z}\}$. Заметим теперь, что глобальная (для всех θ) оценка экспоненциальной суммы в методе Ван дер Корпута при данной нормировке приобретает вид $|\psi(t, \theta)|^2 = O(\mathrm{const})$, в то время как математическое ожидание $\mathsf{E}|\psi(t, \theta)|^2 = 1$. При этом, если стационарные точки далеки от границы области суммирования $\partial(0, q)$ (см. леммы 11 и 12), функция $\psi(t, \theta)$ приближается с точностью $O(q^{-1/2})$ редуцированной суммой $\mathcal{S}(t, \theta)$. В результате мы видим, что в окрестности точек (t^*, θ^*), для которых одно из значений $y_k \in \partial(0, q)$, оценка $|\psi(t, \theta)|^2 = O(\mathrm{const})$ может быть интерпретирована как высокая степень неопределённости амплитуды $|\psi(t, \theta)|$ относительно нашей модели.

Данное явление можно связать с перестройкой (*бифуркацией*) конфигурации стационарных точек по отношению к области $(0, q)$. Этот эффект удобно проиллюстрировать на примере экспоненциальной функции $\omega_\circ(y)$, рассмотренной выше. Уникальной чертой гамильтониана $\omega_\circ(y)$ (однозначно определяющей его вид) является соотношение $y_{k+1}(t) - y_k(t) = \mathrm{const}$. Относительно изменения времени t бифуркации на правой границе области (точка q) происходят несколько чаще, чем на левой (точка 0), таким образом, число точек y_k *внутри области* $(0, q)$ постепенно растёт как $O(t)$.

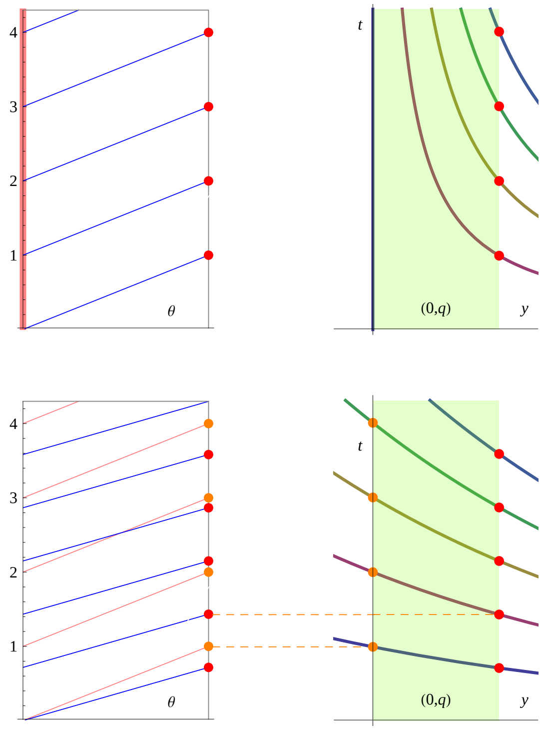

Рис. 4. Бифуркационная диаграма (*слева*) и траектории точек стационарности (*справа*) для квадратичной и экспоненциальной функций $\omega(y)$ и $\omega_\circ(y)$ (*верхний* и *нижний* ряд соответственно). Линии разного цвета на бифуркационной диаграме в пространстве $\mathbb{R}\times\mathbb{T}$ отвечают двум точкам границы области суммирования $\partial(0,q)$. Точки красного и оранжевого цвета отмечают моменты бифуркаций t_j при $\theta=0$. На рисунке также видно, что две линии на бифуркационной диаграме являются гладкими кривыми. Это любопытное геометрическое явление имеет место и для многомерных тригонометрических сумм.

На рисунке 4 изображена бифуркационная диаграма этой системы, а также системы, порождённой квадратичной функцией $\omega(y)=y^2/2q$.

3.5. m**-Парадоксальные суммы.** Как было отмечено выше, в разделе 3.2, возникновение плоского полинома в семействе $\mathcal{P}^{(t)}(\theta)$ может быть явлением, крайне неустойчивым по отношению к изменению t. Сейчас мы рассмотрим пример [26] построения плоских сумм $\mathcal{P}^{(t)}(0)$ для целого интервала (t_0,t_1), с точностью до множества меры ε, в котором также наблюдается неустойчивость явления по отношению к варьированию θ.

Рассмотрим отношение эквивалентности $\circlearrowleft$ означающее равенство с точностью до линейного слагаемого, и пусть $[\Sigma_k]_\circlearrowleft$ — соответствующий класс эквивалентности.

Наблюдение 22. Последовательности $\Sigma_k(t,\theta)$, порождаемые $\omega_\circ(y)$, с точностью до линейного слагаемого представляются траекторией

$$[\Sigma_k]_\circlearrowleft = q\,\Omega(k)$$

потока на бесконечномерном торе $\mathbb{T}^\infty$, заданного постоянным векторным полем $\Omega(k)$. Последовательность $\Omega(k)$ есть не что иное, как частотная функция тригонометрических сумм Харди–Литлвуда (3).

Определение 23. Пусть $f \in C^2(a,b)$ и $0 < |f''(y)| = o(1)$. Назовём сумму

$$S_{a,b,f} = \sum_{j \in (a,b)} e^{2\pi i\, f(j)}$$

(ε, m)-*парадоксальной*, если для некоторой функции $\eta \in C^2(\alpha, \beta)$, $\alpha = f'(a)$, $\beta = f'(b)$, последовательность фаз редуцированной суммы $\Sigma_k = f(y_k) - ky_k$ аппроксимируется функцией $\eta(k)$, $\|\Sigma_k - \eta(k)\|_{\mathbb{Z}} \le \varepsilon$, причём $\eta'(\beta) - \eta'(\alpha) \approx_\varepsilon m$, где $\|x\|_{\mathbb{Z}}$ — стандартная метрика на $\mathbb{T}$.

Идея рассмотрения m-парадоксальных сумм объясняется следующей теоремой.

Теорема 24 (итерированный метод Ван дер Корпута)**.** *Пусть редуцированная сумма $S'_{\alpha,\beta,f}$, полученная в результате применения метода Ван дер Корпута, является (ε, m)-парадоксальной для некоторого $\varepsilon > 0$ и $\Sigma_k = f(y_k) - ky_k \approx_\varepsilon \eta(k)$, и пусть $m > 0$, тогда повторное применение данного метода приводит к цепочке равенств*

$$S_{a,b,f} = S'_{\alpha,\beta,f} + \mathcal{E} = S''_{A,B,f} + \mathcal{E} + \mathcal{E}',$$

где

$$S''_{A,B,f} = \sum_{l:\ \kappa_l \in (\alpha,\beta)} e\big(\eta(\kappa_l) - l\kappa_l\big),$$

κ_l суть решения уравнения $\eta'(\kappa_l) = l \in \mathbb{Z}$, $A = \eta'(\alpha)$, $B = \eta'(\beta)$, и $\mathcal{E}'$ — погрешность, возникающая при повторном применении метода, оценка которой зависит от свойств исходной функции $f(y)$. Кроме того, $B - A = m$.

В работе [26] данная теорема применяется к экспоненциальной частотной функции, рассмотреммой в примере 21, и позволяет доказать существование полиномов Литлвуда на $\mathbb{R}$, являющихся плоскими на любом, предварительно заданном компактном множестве в $\mathbb{R}$ относительно метрики пространвнства $L^1(\mathbb{R})$.

Термин "*парадоксальная сумма*" объясняется тем, что, как правило, величины Σ_k растут, как число слаемых в сумме $O(b-a)$ (или степень полинома), которое может быть очень большим. Поэтому тот факт, что последовательность Σ_k приближается (mod 1) гладкой функцией умеренного роста, оказывается редким являнием. Задача существенно усложняется при переходе к зависящим от параметров семействам сумм, таким, как полиномы $\mathcal{P}^{(t)}(\theta)$. Следующие два примера демонстрируют механизм появления парадоксальных сумм. Мы также увидим, что данное явление оказывается неустойчивым по отношению к варьированию одного или двух параметров t и θ.

Пример 25. Слагаемые в редуцированных суммах $\mathcal{S}(t,0)$, порождённых экспоненциальной частотной функцией $\omega_\circ(y)$, как мы увидели в примере 21, с точностью до характера совпадают с траекторией $q\,\Omega(k)$ динамической системы на $\mathbb{T}^\infty$, заданной постоянных векторным полем $\Omega(k)$, где степень полинома q играет роль времени. Фактически нас будут интересовать предельные точки этой тректории относительно слабой топологии на $\mathbb{T}^\infty$. А именно, если зафиксировать промежуток $[t_0, t_1] \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$, то лишь конечное число точек стационарности y_k, $k \in [\kappa_0, \kappa_1]$, попадают внутрь области $(0, q)$ хотя бы для одного $t \in [t_0, t_1]$. Следовательно, применяя теорему Пуанкаре о возвращении, мы находим бесконечную последовательность q_j положительной плотности в $\mathbb{Z}$, такую, что

$$\forall\, k \in [\kappa_0, \kappa_1] \qquad q_j \cdot \Omega(k) \approx_\varepsilon 0 \pmod 1.$$

Таким образом, верна следующая теорема [26].

Теорема 26. *Для любого $\varepsilon > 0$, отрезка прямой $[t_0, t_1]$, $t_0 > 0$, и $m \in \mathbb{Z}$ существуют (ε, m)-парадоксальные суммы $\mathcal{P}^{(t)}(0)$, построенные на основе экспоненциальной функции вида $\omega_\circ(y) = q\lambda^{-2} \cdot e^{\lambda y/q}$, $\lambda^{-1} \in \mathbb{N}$, для бесконечного множества степеней q, имеющего положительную плотность в $\mathbb{Z}$.*

Доказательство. В самом деле, если q_j — момент возвращения траектории $q\,\Omega(k)$ к нулю с точностью до $\varepsilon/(|m|+1)$ в координатах $\kappa_0, \dots, \kappa_1$, то $(q_j + m)\,\Omega(k)$ с точностью до ε приближает $m\Omega(k)$, а в то же время,

$$\Omega'(K_1(t)) - \Omega'(K_0(t)) = 1,$$

и достаточно положить $\eta(k) = m\Omega(k) + \mathrm{const}$. □

Заметим, теперь, что для произвольного θ

$$y_{k,\theta}(t) = \frac{q}{\lambda} \ln \frac{\lambda(k-\theta)}{t} \quad \text{и} \quad \Omega_\theta = \frac{1}{\lambda} k \ln(k-\theta),$$

таким образом, m-парадоксальные суммы существуют для произвольного фиксированного θ_0, но уже при малом возмущении θ это свойстство теряется. Рассмотрим теперь пример другого характера.

3.6. **Арифметические свойства $\Sigma_k(t)$.** Мы увидели, что обнаружение m-парадоксальных сумм для гамильтониана $\omega_\circ(y)$ зависит от диофантовых свойств последовательности

$$\lambda\Omega = (2\ln 2, 3\ln 3, 4\ln 4, 5\ln 5, \dots, k\ln k, \dots). \tag{11}$$

Для формализации данной проблемы удобно использовать модель, в которой на бесконечном торе $\mathbb{T}^\infty$ вводится слабая топология и затем рассматривается топологическая динамическая система на $\mathbb{T}^\infty$, заданная постоянным векторным полем $\Omega(k)$. Интересно рассмотреть как поток, так и дискретное преобразование сдвига на вектор $\Omega(k)$. Напомним, что две последовательности x_k и y_k близки в слабой топологии, если $|x_k - y_k| < \varepsilon$ для большого, но конечно интервала индексов $[1, \dots, N]$. Если зафиксировать N и ε, то из эргодической теоремы следует, что среднее время возвращения $\bar{q}_1$ в окрестность

$$W_{\varepsilon,N} = \{x\colon\ |x_k| < \varepsilon,\ 1 < k \le N\}$$

будет порядка $\bar{q}_1 \le \varepsilon^{-(N-1)}$. В ситуации общего положения ограничение системы на конечномерный тор $T^{\times[k_0,k_1]}$ часто оказывается эргодическим, а указанная оценка — точной. Значит, если мы интересуемся построением примера плоской тригонометрической суммы, конструкция которой подразумевает поиск предельной точки с точностью $\varepsilon = 0.1$ при $N = 23$, то $\bar{q}_1 \sim 10^{23}$, то есть степень полинома оказывается значением, весьма большим для численного эксперимента. В то же время, момент первого возвращения q_1^* определяется не эргодической теоремой, а диофантовыми свойствами последовательности $(\Omega(k_0), \dots, \Omega(k_1))$.

Вопрос 27. Как оценивается время первого возвращения в окрестность

$$W_{\varepsilon,k_0,k_1} = \{x\colon\ |x_k| < \varepsilon,\ k_0 \le k \le k_1\}$$

траектории потока, стартующей из точки 0, на $\mathbb{T}^\infty$, заданного постоянным векторным полем $\lambda\Omega(k) = (\dots, k\ln k, \dots)$?

Легко видеть, что над полем $\mathbb{Q}$ базис пространства, порождённого $k\ln k$, образуют логарифмы простых чисел $\ln p$, значит, сформулированный вопрос связан с аналогичным вопросом для последовательности $\lambda\Omega'(k)$, порождённой элементами ряда для дзета-функции Римана:

$$\zeta(x_0+qi)=\sum_{k=1}^{\infty}k^{-x_0}e^{i\,q\,\ln k}$$

Вопрос 28. Как оценивается время q_1^* первого возвращения в окрестность W_{ε,k_1,k_2} для траектории потока, порождённого векторным полем

$$\lambda\Omega'(k)=(\ln 2,\ln 3,\dots,\ln k,\dots)\quad ?$$

Важно ответить, что рассматриваемые в настояшей работе тригонометрические суммы (см. теорему 1 и конструкции в разделе 4) не столь чувствительны к диофантовым свойствам частотной функции $\omega(y)$, соответственно, построенные полиномы допускают численное моделирование, а теорема 1 — экспериментальную проверку при умеренных значениях степени полинома q.

3.7. **Предельные точки Σ_k для сумм Гаусса.** Вернёмся к рассмотрению квадратичной функции $\omega(y)=y^2/2q$.

Теорема 29. *Для любого конечного множества значений $\mathcal{T}=\{t_1,\dots,t_N\}\subset(0,+\infty)$, соизмеримых над $\mathbb{Q}$, существует бесконечное множество степеней q, для которых суммы $\mathcal{P}^{(t)}(\theta)$ являются 0-парадоксальными при всех $\theta\in\mathbb{T}$.*

Доказательство. Теорема непосредственно следует из вычисления Σ_k. Итак,

$$y_{k,\theta}(t)=\frac{q}{t}(k-\theta),$$

следовательно,

$$\Sigma_{k,\theta}(t)=t\omega(y_k)+\theta y_k-ky_k=t\frac{y_k^2}{2q}-ky_k=y_k\left(\frac{t}{2q}y_k-(k-\theta)\right)=-\frac{q}{2t}(k-\theta)^2.$$

Выберем q, такое, что $q/t\in\mathbb{Z}$ для любого $t\in\mathcal{T}$. Тогда

$$\Sigma_{k,\theta}(t)=-\frac{q}{t}\theta\cdot k-\frac{q\theta^2}{2t}\overset{def}{=}\eta(k)\tag{12}$$

становится при $t\in\mathcal{T}$ линейной функцией, откуда $\eta'(\beta)-\eta'(\alpha)=0$, и теорема доказана. □

4. Доказательство теоремы 1

4.1. **Основная конструкция.** Основной эффект, приводящий к построению семейств плоских полиномов $P^{(t)}(x)$ с дискретным параметром t состоит в следующем. Фактически мы построим полином не на окружности, а на группе $\widehat{G}$, дуальной к группе, являющаяся расширением $\mathbb{Z}_\ell$,

$$G=\mathbb{Z}_\ell\oplus\mathbb{Z}_H,$$

и затем отобразим *разрывным образом* группу G на $\mathbb{Z}_{\ell H}$:

$$\Phi\colon\ y\mapsto s\ell+j,\quad \text{где}\quad y\in\mathbb{Z}_{\ell H},\quad 0\le j<\ell,\quad s\in\mathbb{Z}_H.$$

При этом для большинства y (с вероятностью, близкой к 1) наше отображение Φ почти коммутирует с $\mathbb{Z}$-действием сдвигами на $\mathbb{Z}_{\ell H}$ и G соответственно. Иными словами, следующая диаграма почти коммутативна:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\widetilde{S}"] \arrow[d, "\Phi"'] \arrow[dr, phantom, "\approx"] & G \arrow[d, "\Phi"] \\ \mathbb{Z}_{\ell H} \arrow[r, "S"'] & \mathbb{Z}_{\ell H} \end{tikzcd}$$

Далее мы увидим, что для $t \ll q$ точки стационарности, порождённые квадратичной функцией $\omega(y) = y^2/2q$, проецируются на класс смежности подгруппы $t^{-1}H \cdot \mathbb{Z}_H$ в $\mathbb{Z}_H$. Наконец, мы построим квадратичную форму $\Lambda(s)$ на $\mathbb{Z}_H$, обладающую весьма специальным свойством. При ограничении на любой класс смежности подгруппы $t^{-1}H \cdot \mathbb{Z}_H$ форма $t\Lambda(s)$ с точностью до некоторого линейного слагаемого совпадает с формой $u^2/2t$, $u \in \mathbb{Z}_t$, где $t \mid H$.

Итак, пусть дано конечное множество $\boldsymbol{\tau} \subset \mathbb{N}$. Рассмотрим некоторое достаточно большое $\ell \in \mathbb{N}$ (оно будет определено позднее), положим $H = \text{НОК}(\boldsymbol{\tau})$ и определим функцию $\tilde{\omega}(y) = \omega(y) + \Lambda(s)$ как сумму стандартной квадратичной функции ω и кусочно постоянной поправки $\Lambda(s)$, где

$$\omega(y) = \frac{y^2}{2q}, \qquad \Lambda(s) = \frac{s^2}{2H^2}, \qquad s = \left\lfloor \frac{y}{\ell} \right\rfloor, \qquad q = \ell H.$$

Замечание 30. Все рассмотренные в разделах 1–3 конструкции применимы к кусочно гладким функциям $\tilde{\omega}(y)$, а также в более общих предположениях. В частности, если функция $\tilde{\omega}(y)$ отличается от функции $\omega(y) \in C^2(\mathbb{R})$ на кусочно посточнную добавку, то динамическая система R^t, определяющая эволюцию точек y_k, сохраняется для $\tilde{\omega}(y)$.

Лемма 31. *Предположим, что $2t \mid q$, а значит, суммы $\mathcal{P}_0^{(t)}(\theta)$, порождённые квадратичной функцией $\omega(y)$ являются 0-парадоксальными (см. определение 23 и теорему 29). Тогда последовательность Σ_k, отвечающая модифицированной функции $\tilde{\omega}(y)$, имеет вид*

$$[\Sigma_k]_{\circlearrowleft} = \frac{k^2}{2t}. \tag{13}$$

Доказательство. Точки стационарности y_k образуют прогрессию с шагом $t^{-1}q \in \mathbb{Z}$, значит, индексы интервалов длины ℓ, содержащих y_k в пределах промежутка $[0, q)$, можно представить в виде $s(k) = s_0 + k \cdot H/t$, где $k = k_0, \ldots, k_0 + t - 1$. Следовательно, значения формы $\Lambda(s(k))$ приобретают вид

$$\Lambda(s(k)) = \frac{(s_0 + k \cdot t^{-1}H)^2}{2H^2} = \frac{k^2}{2t^2} + \frac{ks_0}{tH} + \frac{s_0^2}{2H^2}$$

В то же время, по условию $[t\omega(y_k) - ky_k]_{\circlearrowleft} = 0$, а, значит, с точностью до линейного слагаемого $t\Sigma_k$ совпадает с $[t\Lambda(s(k))]_{\circlearrowleft} = k^2/2t$ и равенство (13) доказано. $\square$

Таким образом, к нашим суммам примени́м итерированный метод Ван дер Корпута. Первый шаг редукции приводит к соотношению

$$\mathcal{P}^{(t)}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{j=0}^{q-1} e^{2\pi i\,(t\tilde{\omega}(j) + \theta j)} = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{k=1}^{t} e\left(\frac{k^2}{2t} + \xi_{t,\theta}\, k + c_{t,\theta}\right) + \mathcal{E}(t, \theta),$$

где $\mathcal{E}(t, \theta)$ — погрешность первого шага. Общая идея состоит в том, что теперь, применяя метод Ван дер Корпута второй раз,

$$\mathcal{P}^{(t)}(\theta) = S(t, \theta) + \mathcal{E}(t, \theta) = e^{2\pi i\, \mathcal{A}(t,\theta)} + \mathcal{E}(t, \theta) + \mathcal{E}'(t, \theta),$$

мы приходим к полиному степени 0 и видим, что с $|\mathcal{P}^{(t)}(\theta)| \approx 1$ с точностью до поправок $\mathcal{E}(t,\theta)$ и $\mathcal{E}'(t,\theta)$, основной вклад в которые, как мы уже знаем из раздела 3, дают θ в окрестности точек бифуркации, когда стационарная точка, порождённая редуцированой суммой $\mathcal{S}(t,\theta)$ подходит к границе области суммирования $(0,t)$. Для того, чтобы произвести оценивание поправок $\mathcal{E}(t,\theta)$ и $\mathcal{E}'(t,\theta)$ в $L^1(\mathbb{T})$ вычислим параметры $\xi_{t,\theta}$ и $c_{t,\theta}$. Фактически сейчас мы повторим вычисление Σ_k, но будем аккуратно собирать воедино все линейные слагаемые. В силу теоремы 29 (см. соотношение (12)) имеем

$$t\tilde{\omega}(y_k) = \left[-\frac{q}{t}\theta\cdot k - \frac{q\theta^2}{2t}\right] + \left[\frac{k^2}{2t} + \frac{ks_0}{H} + \frac{ts_0^2}{2H^2}\right],$$

где скобки $[\dots]$ обозначают группы слагаемых, произошедшие от $\omega(y)$ и $\Lambda(s(k))$ соответственно. Далее, вычислим зависимость s_0 от θ,

$$s_0(\theta) = \left\lfloor \frac{y_1}{\ell} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{t^{-1}q\cdot(1-\theta)}{\ell} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{H}{t}\,(1-\theta) \right\rfloor.$$

Значит,

$$t\tilde{\omega}(y_k) = \frac{k^2}{2t} + k\left(-\frac{q}{t}\theta + \frac{s_0}{H}\right) + \left(-\frac{q\theta^2}{2t} + \frac{ts_0^2}{2H^2}\right) \stackrel{def}{=} \eta(k)$$

и

$$\xi_{t,\theta} = -\frac{q}{t}\theta + \frac{s_0}{H} \quad \text{и} \quad c_{t,\theta} = -\frac{q\theta^2}{2t} + \frac{ts_0^2}{2H^2}.$$

Рассмотрим теперь функцию $\eta(k)$ как функцию на $\mathbb{R}$ и найдём стационарную точку $k = \kappa(t,\theta)$ второго шага в цепочке редукций. Решая уравнение $\eta'(k) = 0$, получаем

$$\kappa(t,\theta) = -t\,\xi_{t,\theta} = q\theta - \frac{ts_0}{H}.$$

Оценка $\mathcal{E}(t,\theta)$ аналогична случаю для квадратичной функции $\omega(y)$, которая даётся в лемме 14, с одним лишь дополнением. Теперь нам нужно просуммировать оценки для каждого из H интервалов непрерывности функции $\tilde{\omega}(y)$. Имеем

$$\|\mathcal{E}(t,\theta)\|_{L^1(\mathbb{T})} \le H\cdot O\left(\frac{\ln q}{\sqrt{q}}\right). \tag{14}$$

Вторая же погрешность $\mathcal{E}(t,\theta)$ обладает более богатым поведением. Действительно, заметим, что *бифуркация*, то есть изменение структуры множества точек стационарности в пределах области суммирования, а также последовательности Σ_k проходит многократно — каждый раз, когда точка θ проходит значение θ^*, для которого $\kappa(t,\theta^*) \in t\mathbb{Z}$, то есть тогда, когда одна точка стационарности редуцированной суммы покидает интервал $(0,t)$, а другая входит в этот интервал. Зафиксируем отдельное значение s_0^*. Легко видеть, что множество $\{\theta\colon\ s_0(\theta) = s_0^*\}$ представляет собой промежуток длины tH^{-1}, и при этом расстояние между соседними точками бифуркации $\kappa(t,\theta^*)$ при условии постоянства $s_0(\theta)$ равно q^{-1}. По условию теоремы $t \gg 1$, а значит, поскольку $\ell \gg 1$,

$$q^{-1} = \ell^{-1}H^{-1} \ll tH^{-1}.$$

Таким образом, оценка 14, точнее её структура, в точности сохраняется и для второго слагаемого $\mathcal{E}'(t,\theta)$, где только нужно учесть, что на втором шаге t играет роль “q” в лемме 14,

$$\|\mathcal{E}'(t,\theta)\|_{L^1(\mathbb{T})} \le O\left(\frac{\ln t}{\sqrt{t}}\right). \tag{15}$$

Почему в данной формуле отсутствует множитель H? Дело в том, что функция $k^2/2t$ не является больше разрывной на $(0,t)$, как это происходило с исходной частотной функций

$\tilde{\omega}(y)$ и мы применяем лемму 14 в оригинальной формулировке. Теперь для завершения доказательства нам осталось лишь сравнить оценки (14) и (15). В самом деле, если выполнено условие $H^3 \cdot \ln^2 q \ll q$ второй части формулировки теоремы, то

$$H \cdot \frac{\ln q}{\sqrt{q}} \ll \frac{\ln t}{\sqrt{t}},$$

и общая оценка отклонения полинома $P^{(t)}(z)$ от единицы имеет вид $\varepsilon(t_0) = O(t_0^{-1/2} \ln t_0)$, где t_0 — нижняя граница множества $\boldsymbol{\tau}$. Теорема 1 доказана.

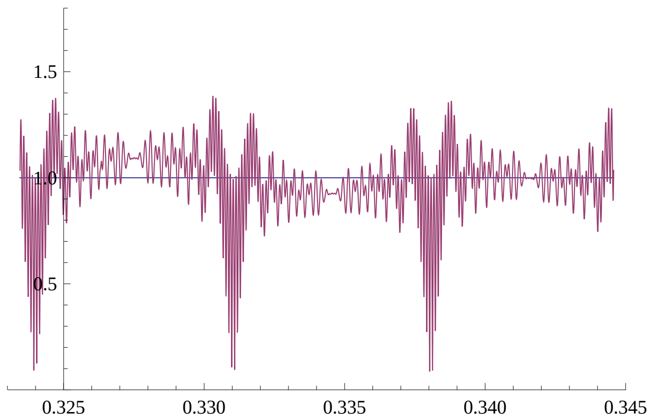

Рис. 5. Полиномы $\mathcal{P}^{(t)}(\theta)$

4.2. **Элементарный пример.** Рассмотрим функцию

$$\tilde{\omega}(y) = \frac{y^2}{2q} + \frac{s^2}{2p_1^2 p_2^2}, \qquad q = \ell \cdot p_1 p_2, \qquad s = \left\lfloor \frac{y}{\ell} \right\rfloor,$$

где p_1, p_2 — различные простые числа и $2 \mid \ell$. Заметим, что второе слагаемое является разрывной кусочно-постоянной функцией, принимающей значения $s^2/2p_1^2p_2^2$ на последовательных отрезках длины ℓ. Рассмотрим сумму при $t = p_1$

$$\mathcal{P}^{(p_1)}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{j=0}^{q-1} e^{2\pi i\,(p_1\omega(j) + j\theta)}.$$

Точки стационарности y_k имеют вид

$$y_k = \frac{q}{t}(k - \theta) = 2\ell p_2(k - \theta),$$

откуда $y_{k+1} - y_k = \ell p_2$. Значит, поскольку $2t = 2p_1 | q$, в силу (12) находим

$$\Sigma_k = t\tilde{\omega}(y_k) - ky_k = t\frac{s(k)^2}{2H^2} - \frac{q}{t}\theta \cdot k - \frac{q\theta^2}{2t}.$$

Теперь вспомним, что $s(k) = s_0 + k \cdot (\ell p_2)/\ell = s_0 + p_2 k$, следовательно,

$$t\frac{s(k)^2}{2H^2} = \frac{(p_2 k + s_0)^2}{2p_1 p_2^2} = \frac{k^2}{2p_1} + \frac{2p_2 s_0 k + s_0^2}{2p_1 p_2^2}$$

и при этом $k \in [1, p_1]$. Значит, с точностью до линейного сомножителя

$$\left[t\frac{s(k)^2}{2H^2}\right]_{\circlearrowleft} = \frac{k^2}{2p_1} = \eta(k)$$

и сумма является ε-плоской для типичного значения θ, поскольку $\eta'(p_1) - \eta'(1) = 1$.

Заметим, что, задаваясь всё более сложным набором $\{p_1, p_2, \dots\}$, мы будем приходить к полиному всё более высокой степени. Тем не менее, наиболее элементарные примеры допускают численное моделрование (см. рис. 5), в отличие от конструкции, опирающейся на экспоненциальную частотную функцию $\omega_\circ(y)$, где, как было сказано выше, важную роль играют диофантовы свойства последовательности $k \ln k$ и даже самые простые случаи приводят к огромным значениям степени полинома q.

4.3. **Алгебраическая интерпретация формы** $\Lambda(s)$**.** Рассмотрим разложение числа H на простые сомножители:

$$H = p_1^{r_1} \cdots p_L^{r_L},$$

и пусть $s_1, \dots, s_L$ — каноническая система координат, возникающая при изоморфизме

$$\mathbb{Z}_H \cong \mathbb{Z}_{p_1^{r_1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_L^{r_L}}.$$

Предположим, что мы интересуемся видом данной формы с точностью до линейной функции. Тогда лекго видеть, что форма $\Lambda(s)$ обладает следующим универсальным представлением.

Лемма 32. *Форма* $\Lambda(s)$ *на группе* $\mathbb{Z}_H$ *удовлетворяет соотношению*

$$[Q(s)]_\circlearrowleft = [Q(s_1, \dots, s_L)]_\circlearrowleft = \frac{s_1^2}{2p_1^2} + \cdots + \frac{s_L^2}{2p_L^2},$$

причём данная форма представления не зависит от выбора системы координат.

Кроме того, отметим, что форма $\Lambda(s)$, если не производить факторизацию по линейным функциям, не является корректно определённой функцией на группе $\mathbb{Z}_H$, и если продолжать $\Lambda(s)$ вдоль некоторой орбиты преобразования сдвига, то возникает соответствующее *действие монодромии*.

Автор благодарен участникам семинара “Теория и статистическая физика” под руководством Б.М. Гуревича, В.И. Оселедца и С.А. Пирогова, семинара “Современные проблемы теории чисел” под руководством С.В. Конягина и И.Д. Шкредова, а также участникам “Петербургского семинара по теории представлений и динамическим системам” под руководством А.М. Вершика за проявленный интерес к данной работе и полезные замечания.

Список литературы

1. El H. El Abdalaoui, F. Parreau, and A.A. Prikhod'ko, *A new class of Ornstein transformations with singular spectrum*, Annales de l'Institut Henri Poincare (B) Probability and Statistics **42** (2006), no. 6, 671–681.
2. F. Amoroso, *Sur le diamètre transfini entier d'un intervalle réel*, Ann. Inst. Fourier Grenoble **40** (1990), 885–911.
3. E. Bombieri and J. Bourgain, *On Kahane's ultra-flat polynomials*, J. Eur. Math. Soc. **11** (2009), no. 3, 627—-703.
4. J. Bourgain, *On the spectral type of ornstein class one transformations*, Isr. J. Math. **84** (1993), 53–63.
5. A.I. Danilenko, *Funny rank-one weak mixing for nonsingular Abelian actions*, Isr. J. Math. **121** (2001), 29–54.
6. T. Downarowicz and Y. Lacroix, *Merit factors and morse sequences*, Theoretical Computer Science archive **209** (1998), no. 1–2, 377–387.
7. G.H.Hardy and J.E.Littlewood, *Some problems of diophantine approximation: A remarkable trigonometric series*, Proc Natl Acad Sci U S A **10** (1916), no. 2, 583–586.
8. K. Goto, *Some results on littlewood's problem and orlicz's problem*, Math. J. Okayama Univ. **41** (1999), 121–136.

9. M. Guenais, *Morse cocycles and simple lebesgue spectrum*, Ergodic Theory and Dynamical Systems **19:2** (1999), 437–446.
10. D.R. Heath-Brown, *The Pjateckiĭ–Šapiro prime number theory*, J. Number Theory **16** (1983), 242–266.
11. J.-P. Kahane, *Sur les polynômes à coefficients unimodulaires*, Bull. London Math. Soc. **12** (1980), 321–342.
12. I. Klemes, *The spectral type of staircase transformations*, Thohoku Math. J. **48** (1994), 247–258.
13. I. Klemes and K. Reinhold, *Rank one transformations with singular spectre type*, Isr. J. Math. **98** (1997), 1–14.
14. G. Kolesnik, *On the order of* $\zeta(1/2+it)$ *and* $\Delta(R)$, Pacific J. Math. **98** (1982), no. 1, 107–122.
15. S. Konjagin, *On a question of Pichorides*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér I Math. **324** (1997), 385–388.
16. J.E. Littlewood, *On the mean values of certain trigonometrical polynomials*, J. London Math. Soc. **36** (1961), 307–334.
17. ———, *On polynomials,* $\sum^n \pm z^m$, $\sum^n e^{\alpha_n i} z^m$, $z = e^{\theta i}$, J. London Math., Soc. **41** (1966), 367–376.
18. H.-Q. Liu, *On a fundamental result in van der Corput's method of estimating exponential sums*, Acta Arithmetica **XC.4** (1999), 357–370.
19. M. Lemańczyk, *Spectral Theory of Dynamical Systems, Encyclopedia of Complexity and System Science*, Springer Verlag, 2009.
20. S.H. Min, *Methods in Number Theory (in Chinese)*, **2** (1981).
21. F.L. Nazarov, *Local estimates of exponential polynomials and their applications to the inequalities of uncertainty principle type*, St. Petersburg Math. J. **5** (1994), 663—-717.
22. D.S. Ornstein, *On the root problem in ergodic theory*, Proc. 6th Berkley Sympos. Math. Statist. Probab., Univ. Calif. **2** (1970), 347–356.
23. P. Borwein and T. Erdélyi and G. Kós, *Littlewood-type problems on* $[0,1]$, Proc. London Math. Soc. **79** (1999), no. 3, 22—-46.
24. P. Erdös, *An inequality for the maximum of trigonometric polynomials*, Annales Polonica Math. **12** (1962), 151–154.
25. E. Phillips, *The zeta-function of Riemann, further developments of van der Corput's method*, Quart. J. Math. **4** (1933), 209—-225.
26. A.A. Prikhod'ko, *On flat trigonometric sums and flows with simple Lebesgue spectrum, Preprint, ArXiv:1002.2808v1. To appear in Sb. Math. (2012)*, 1–27.
27. ———, *On group actions with simple Lebesgue spectrum, Preprint, ArXiv:1111.0230v1*, (2012), 1–16.
28. V.A. Rokhlin, *On the fundamental ideas of measure theory*, Mat. Sb. (N.S.) **25** (1949), no. 67, 107–150.
29. T. Erdélyi, *Polynomials with littlewood-type coefficient constraints*, Approximation Theory X: Abstract and Classical Analysis, Charles K. Chui, Larry L. Schumaker, and Joachim Stockler (Eds.) (2002), 153–196.
30. E.C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-Function,* 2^{nd} *ed., revised by D.R. Heath-Brown*, Oxford, 1986.
31. J.G. van der Corput, *Zahlentheoretische Abschätzungen*, Math. Ann. **87** (1922), 53–79.
32. A.M. Vershik, *A theorem on periodic Markov approximation in ergodic theory*, J. Sov. Math. **28** (1985), 667—-674.
33. ———, *The pascal automorphism has a continuous spectrum*, Funct. Anal. Appl. **45** (2011), no. 3, 173–186.