

ОДУ — экзамен 19 июня 2017; вариант 3

На экзамене не разрешается: пользоваться электронными приборами, конспектами, книгами и другими печатными или рукописными материалами; разговаривать и пользоваться помощью соседей; возвращаться в аудиторию после выхода из неё.

Оценки: за ответ на каждый вопрос/задачу начисляются очки, максимальное количество очков указано в скобках перед вопросом/задачей; также учитываются очки, полученные в течение семестра за контрольные и домашние задания; 9–12 очков — «удовл.», 13–16 очков — «хор.», 17 очков и более — «отл.».

Проверяются только работы, сданные до назначенного времени!!!

1. (1) Для каких натуральных n графики двух решений уравнения $y^{(n)} = x + y^2$ могут касаться друг друга? Ответ обосновать.
- (1) Что такое первый интеграл системы дифференциальных уравнений?
- (3) Найдите отображение фазового потока, определяемого системой

$$\begin{cases} \dot{x} &= x - 3y + 4z \\ \dot{y} &= 4x - 7y + 8z \\ \dot{z} &= 6x - 7y + 7z \end{cases}$$

2. (1) Привести пример линейной краевой задачи имеющей бесконечное число решений.
- (4) Найдите все особые точки системы

$$\begin{cases} \dot{x} &= y^2 - y - 2 \\ \dot{y} &= -xy - 3y^2 - 2 \end{cases}$$

исследуйте их на устойчивость, укажите их тип. Нарисуйте фазовый портрет.

3. (1) Сформулируйте теорему о непрерывной зависимости решения от параметра.
- (2) Найдите общее решение уравнения

$$xz^2 \frac{\partial u}{\partial x} + 2y(y - z^2) \frac{\partial u}{\partial y} - z^3 \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

- (2) и решение этого уравнения, удовлетворяющее условию $u = x^2 e^z$ при $y = z$.

4. (1) Сформулируйте лемму Гронуолла.
- (1) Сформулируйте теорему об устойчивости нулевого решения линейной системы.
- (3) Найти производную по параметру μ при $\mu = 0$ решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} &= x^2 - y - \mu \sin t \\ \dot{y} &= \sin x + y^3 \end{cases}$$

с начальным условием $x(0) = 1 - \cos \mu$, $y(0) = \sin \mu$.

5. (1) Известно, что вронскиан системы функций тождественно равен нулю. Что можно сказать о линейной зависимости этих функций?
- (1) Дайте определение равномерной распределенности последовательности на отрезке $[0, 1]$.
- (3) У уравнения $xy'' - 2y' + 9x^5y = 0$ с $y(0) = 0$, $y'''(0) = 6$ найти решение в виде степенного ряда.