Студент ______________________ Группа ________

ОДУ: экзамен 29 июня 2016; второй поток; вариант 1-1

За каждый ответ на вопрос начисляются очки (максимальное количество очков указано в скобках); подсчёт ведётся по пяти задачам, т.е. наихудший результат по задачам отбрасывается. Сумма набранных очков складывается с очками, полученными за работу в семестре. Оценка определяется по этой сумме:
9-12 очков - «удовлетворительно»,
13-17 очков - «хорошо», 18 и больше - «отлично».

Задача 1

(2) Найдите положения равновесия системы

$$\begin{cases} \dot{x} = e^{x+y} - 1; \\ \dot{y} = \sqrt[3]{x^2 + 3y + 1} - 1, \end{cases}$$

исследуйте их на устойчивость и определите их типы.

(3) Для каждого положения равновесия найдите фазовый поток, определяемый линеаризацией данной системы в его окрестности.

Задача 2

(1) Сформулируйте теорему Штурма о нулях решений линейных однородных уравнений второго порядка.

(4) Найдите производную по параметру μ при $\mu = 0$ решения уравнения

$$\dddot{x} + \dot{x} = \mu x^2$$

с начальными условиями $x(0) = \cos\mu$, $\dot{x}(0) = e^{\mu}$,
$\ddot{x}(0) = -1 - \frac{2}{3}\mu$.

Задача 3

(5) Нарисуйте фазовый портрет системы и дайте его описание, т.е. укажите какого типа имеются траектории: положения равновесия, их устойчивость и типы; циклы и их устойчивость, замкнутые кривые, составленные из траекторий

$$\begin{cases} \dot{x} = 3y^2 - 3x; \\ \dot{y} = 3y - 3x^2. \end{cases}$$

Студент ________________________ Группа _________

ОДУ: экзамен 29 июня 2016; второй поток; вариант 1-2

Задача 4

(2) Исследуйте устойчивость системы

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \sin t & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} + \sin t \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

(3) Найдите матрицу монодромии этой системы.

Задача 5

(1) Сформулируйте теоремы о выпрямлении поля направлений и векторного поля, дав необходимые определения.

(3) Найдите общее решение уравнения

$$(x^2 + y^2 - 2y + 2z)\frac{\partial u}{\partial x} - (x^2 + y^2 - 2x + 2z)\frac{\partial u}{\partial y} + 2z(y - x)\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

(1) Найдите для этого уравнения решение задачи Коши с начальным условием $u|_{x+y=0} = 2x^2 + z$.

Задача 6

(2) Найдите образ вектора $(-1, 1, 1)$, приложенного к началу координат, под действием за время $\pi/2$ потока, определяемого векторным полем

$$\mathbf{v} = \big(x^2 - \sin y + \operatorname{sh}^2 z, \sin x + y^2 - z^2, x^2 + y^2 - 2z(x + y + 1)\big).$$

(3) Найдите объём образа единичного куба под действием этого потока за то же время.

1		2		3	4		5			6		бонусы
2	3	1	4	5	2	3	1	3	1	2	3	

Сумма Оценка

Студент ________________________ Группа _________

ОДУ: экзамен 29 июня 2016; второй поток; вариант 2-1

За каждый ответ на вопрос начисляются очки (максимальное количество очков указано в скобках); подсчёт ведётся по пяти задачам, т.е. наихудший результат по задачам отбрасывается. Сумма набранных очков складывается с очками, полученными за работу в семестре. Оценка определяется по этой сумме:
9-12 очков - «удовлетворительно»,
13-17 очков - «хорошо»,18 и больше - «отлично».

Задача 1

(2) Найдите положения равновесия системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 2\sqrt{1+2x+y} - 2; \\ \dot{y} = 2\,\mathrm{arctg}(x^2+y), \end{cases}$$

исследуйте их на устойчивость и определите их типы.

(3) Для каждого положения равновесия найдите фазовый поток, определяемый линеаризацией данной системы в его окрестности.

Задача 2

(1) Сформулируйте теорему Флоке о линейных системах с периодическими коэффициентами.

(4) Найдите производную по параметру μ при $\mu = 0$ решения уравнения

$$\dddot{x} - \dot{x} = \mu x^2 - \mu e^{2t} - 2\mu\cos^2 t$$

с начальными условиями $x(0) = \ln(1+2\mu)$, $\dot{x}(0) = 1 + \frac{6}{5}\mu$, $\ddot{x}(0) = \cos\mu$.

Задача 3

(5) Нарисуйте фазовый портрет системы и дайте его описание, т.е. укажите какого типа имеются траектории: положения равновесия, их устойчивость и типы; циклы и их устойчивость, замкнутые кривые, составленные из траекторий

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + 2y - 3; \\ \dot{y} = 2x(1-y). \end{cases}$$

Студент ________________________ Группа _________

ОДУ: экзамен 29 июня 2016; второй поток; вариант 2-2

Задача 4

(2) Исследуйте устойчивость системы

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \cos^2 t & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} + \cos^2 t \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

(3) Найдите матрицу монодромии этой системы.

Задача 5

(1) Дайте определение функции Ляпунова и сформулируйте теорему Ляпунова об устойчивости.

(3) Найдите общее решение уравнения

$$(x^2 + y^2 + 2y + 3z^2)\frac{\partial u}{\partial x} + (x^2 + y^2 - 2x + 3z^2)\frac{\partial u}{\partial y} = 2z(x+y)\frac{\partial u}{\partial z}.$$

(1) Найдите для этого уравнения решение задачи Коши с начальным условием $u|_{x=y} = 2y^2 + z^2$.

Задача 6

(2) Найдите образ вектора $(2, 0, 2)$, приложенного к началу координат, под действием за время $\ln 2$ потока, определяемого векторным полем

$$\mathbf{v} = \big(x(\operatorname{ch} y - \operatorname{th}^2 z), x^2 - \operatorname{sh} y + \sin z, \operatorname{ch} x - \cos y - \operatorname{th} z\big).$$

(3) Найдите объём образа единичного куба под действием этого потока за то же время.

1		2		3	4		5			6		бонусы
2	3	1	4	5	2	3	1	3	1	2	3	

Сумма Оценка

Студент ______________________ Группа ________

ОДУ: экзамен 29 июня 2016; второй поток; вариант 3-1

За каждый ответ на вопрос начисляются очки (максимальное количество очков указано в скобках); подсчёт ведётся по пяти задачам, т.е. наихудший результат по задачам отбрасывается. Сумма набранных очков складывается с очками, полученными за работу в семестре. Оценка определяется по этой сумме:
9-12 очков - «удовлетворительно»,
13-17 очков - «хорошо»,18 и больше - «отлично».

Задача 1

(2) Найдите положения равновесия системы

$$\begin{cases} \dot{x} = e^{x+2y} - 1; \\ \dot{y} = 2\sqrt{x^2 + y + 1} - 2, \end{cases}$$

исследуйте их на устойчивость и определите их типы.

(3) Для каждого положения равновесия найдите фазовый поток, определяемый линеаризацией данной системы в его окрестности.

Задача 2

(1) Запишите неравенство Гронуолла.

(4) Найдите производную по параметру μ при $\mu = 0$ решения уравнения

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + x = \mu(1 + x)^2 - \mu$$

с начальными условиями $x(0) = 10^{\mu^2}$, $\dot{x}(0) = 1 + \sin\mu$.

Задача 3

(5) Нарисуйте фазовый портрет системы и дайте его описание, т.е. укажите какого типа имеются траектории: положения равновесия, их устойчивость и типы; циклы и их устойчивость, замкнутые кривые, составленные из траекторий

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y(x^2 + y^2); \\ \dot{y} = -y + x(x^2 + y^2). \end{cases}$$

Студент ______________________ Группа ________

ОДУ: экзамен 29 июня 2016; второй поток; вариант 3-2

Задача 4

(2) Исследуйте устойчивость системы

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \cos t & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} + \cos t \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

(3) Найдите матрицу монодромии этой системы.

Задача 5

(1) Дайте определение функции Четаева и сформулируйте теорему Четаева о неустойчивости.

(3) Найдите общее решение уравнения

$$(x^2 + y^2 + 2y + 2z)\frac{\partial u}{\partial x} + (x^2 + y^2 - 2x + 2z)\frac{\partial u}{\partial y} - 2z(x + y)\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

(1) Найдите для этого уравнения решение задачи Коши с начальным условием $u|_{x=y} = 2x^2 + z$.

Задача 6

(2) Найдите образ вектора $(-1, 1, -1)$, приложенного к началу координат, под действием за время π потока, определяемого векторным полем

$$\mathbf{v} = \big(x^3 + 2y^2 + \sin z, x^3 + 3y + \operatorname{sh}^2 z, -\operatorname{th} x + 5x \sin y - 3x^2 z)\big).$$

(3) Найдите объём образа единичного куба под действием этого потока за то же время.

1		2		3	4		5			6		бонусы
2	3	1	4	5	2	3	1	3	1	2	3	

Сумма Оценка

Студент ________________________ Группа _________

ОДУ: экзамен 29 июня 2016; второй поток; вариант 4-1

За каждый ответ на вопрос начисляются очки (максимальное количество очков указано в скобках); подсчёт ведётся по пяти задачам, т.е. наихудший результат по задачам отбрасывается. Сумма набранных очков складывается с очками, полученными за работу в семестре. Оценка определяется по этой сумме:
9-12 очков - «удовлетворительно»,
13-17 очков - «хорошо»,18 и больше - «отлично».

Задача 1

(2) Найдите положения равновесия системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 2\sqrt{1+x+y} - 2; \\ \dot{y} = -\operatorname{arctg}(x^2 - y), \end{cases}$$

исследуйте их на устойчивость и определите их типы.

(3) Для каждого положения равновесия найдите фазовый поток, определяемый линеаризацией данной системы в его окрестности.

Задача 2

(1) Сформулируйте лемму Адамара.

(4) Найдите производную по параметру μ при $\mu = 0$ решения уравнения

$$\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = \mu e^{-2t}x^2 + 2\mu e^t$$

с начальными условиями $x(0) = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\mu$, $\dot{x}(0) = 5^{\mu^2}$.

Задача 3

(5) Нарисуйте фазовый портрет системы и дайте его описание, т.е. укажите какого типа имеются траектории: положения равновесия, их устойчивость и типы; циклы и их устойчивость, замкнутые кривые, составленные из траекторий

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x^2 - 3y^2 - 2y + 1; \\ \dot{y} = 8x - 8xy. \end{cases}$$

Студент ________________________ Группа _________

ОДУ: экзамен 29 июня 2016; второй поток; вариант 4-2

Задача 4

(2) Исследуйте устойчивость системы

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \sin^2 t & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} + \sin^2 t \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

(3) Найдите матрицу монодромии этой системы.

Задача 5

(1) Дайте определение индекса изолированного положения равновесия потока на плоскости и сформулируйте теорему о сумме индексов.

(3) Найдите общее решение уравнения

$$(x^2 + y^2 - 2y + 3z^2)\frac{\partial u}{\partial x} - (x^2 + y^2 - 2x + 3z^2)\frac{\partial u}{\partial y} + 2z(y - x)\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

(1) Найдите для этого уравнения решение задачи Коши с начальным условием $u|_{x+y=0} = 2y^2 + z^2$.

Задача 6

(2) Найдите образ вектора $(1, 1, 2)$, приложенного к началу координат, под действием за время 1 потока, определяемого векторным полем

$$\mathbf{v} = \bigl(2\,\mathrm{th}\,x + y + \sin^2 z, \sin^2 x + 2y + z, x^3 + 2z(1 + \mathrm{th}^2\,x)\bigr).$$

(3) Найдите объём образа единичного куба под действием этого потока за то же время.

1		2		3	4		5			6		бонусы
2	3	1	4	5	2	3	1	3	1	2	3	

Сумма Оценка