Фамилия, группа ________________________________

ОДУ; экзамен 27 июня 2013; первый поток; часть I

На экзамене не разрешается: пользоваться электронными приборами, конспектами, книгами и другими печатными или рукописными материалами; разговаривать и пользоваться помощью соседей.

Оценки: за ответ на каждый вопрос/задачу начисляются очки, максимальное количество очков указано в скобках перед вопросом/задачей; результаты оцениваются по системе 5 из 6, т. е учитываются очки, набранные за лучшие ответы на 5 групп вопросов (всего предлагается 6 групп, наихудший результат по одной из 6 групп вопросов отбрасывается); также учитываются очки, полученные в течение семестра за контрольные и домашние задания; 9–12 очков — «удовл.», 13–16 очков — «хор.», 17 очков и более — «отл.».

1. **(1)** Сформулировать теорему существования решения системы дифференциальных уравнений в нормальной форме.

   (1) Верно ли, что если для решения y дифференциального уравнения $F(x,y,y')=0$ выполнено $\frac{\partial F}{\partial y'}(x,y,y')=0$, то это решение особое? Ответ обосновать.

   (3) Построить по два последовательных приближения (не считая исходного) к решению уравнения $y''+(y')^2+y^2=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

2. **(3)** Найдите все особые точки системы

$$\begin{cases} \dot{x} &= y^2-5y-4x \\ \dot{y} &= x \end{cases},$$

   исследуйте их на устойчивость, укажите их тип. При исследовании на устойчивость для каждой особой точки нужно указать (и обосновать!), является ли она: а) асимптотически устойчивой; б) устойчивой, но не асимптотически; в) неустойчивой.

   (2) Нарисуйте фазовый портрет системы.

3. **(1)** Найти общее решение $u(x,y)$ уравнения в частных производных

$$(y^2-5y)\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

   (4) Найдите производную $\frac{\partial x}{\partial \mu}$ по параметру μ при $\mu=0$ решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} &= y^2-5y-4x \\ \dot{y} &= x \end{cases},$$

   с начальными условиями $x(0)=\ln(1+5\mu)$, $y(0)=5-\mu$.

Фамилия, группа ____________________________________

ОДУ; экзамен 27 июня 2013; первый поток; часть II

4. **(4)** Найдите фазовый поток системы

$$\begin{cases} \dot{x} &= & -x+z \\ \dot{y} &= & -x+z \\ \dot{z} &= & x-y-z \end{cases}.$$

(1) Найдите объём образа единичного куба при действии этого фазового потока за время $t=1$.

5. **(1)** Дайте определение неустойчивого предельного цикла.

(4) Исследуйте на устойчивость предельный $x^2+y^2=1$ цикл системы

$$\begin{cases} \dot{x} &= & y+(2x+3y)(x^2+y^2-1) \\ \dot{y} &= & -x+(10x-3y)(x^2+y^2-1) \end{cases}.$$

6. **(1)** Сформулировать теорему о чередовании нулей двух решений уравнения второго порядка.

(1) Пусть на некотором отрезке непрерывная функция $q(t)$ обладает свойством $q(t) \le 0$. Сколько нулей на этом отрезке может быть у уравнения $y'' + q(t)y = 0$?

(3) Доказать, что любое нетривиальное решение уравнения $y'' + 2xy' + 5y = 0$ имеет на интервале $(-\infty, +\infty)$ не более 6 нулей.