

Projet de recherche
Systèmes dynamiques et groupes des transformations

Alexander Prihod'ko

*Université d'État de Moscou Lomonosov, Faculté de Mécaniques et Mathématiques,
Systèmes dynamiques, 119991 Moscou, Russie*

Tél.: +7-(910)-420-89-71 E-mail: sasha.prihodko@gmail.com

§1. Théorie des systèmes dynamiques et l'analyse harmonique	2
1.1 Mesures de Salem–Schaeffer	4
1.2 Mesures singulieres et les sommes de caractères dans les champs finis	5
1.3 Polynômes de Littlewood	6
1.4 L'effet de l'autosimilarité dans les systèmes quantiques	7
§2. Propriétés combinatoires et spectrales de systèmes dynamiques	8
2.1 Compléxité de systèmes dynamiques de rang fini et local	8
2.2 Études combinatoires et spectrales de la transformation adique de Pascal	9
2.3 Automorphisme de Chacon: spectre, symétries et dynamique holomorphe	10
2.4 La théorie spectrale des échanges d'intervalles	11
§3. Théorie ergodique des actions de groupes	12
3.1 Actions mélangeantes de rang fini et local	12
3.2 Géométrie et l'analyse spectrale des groupes et des graphes Schreier	13

Contenu du projet

Le sujet principal de notre projet est l'interaction entre les propriétés combinatoires et spectrales de systèmes dynamiques et les problèmes dans l'analyse harmonique et la théorie des nombres. Nous divisons notre projet en trois parties.

Théorie des systèmes dynamiques et l'analyse harmonique

Dans la première partie on considère quelques modèles dans la théorie spectral des systèmes dynamiques et discute l'application de ces modèles à l'analyse harmonique et la mécanique quantique. Les principaux objectifs de notre recherche sont l'analyse des mesures probabilités de Salem–Schaeffer, des polynômes de Littlewood, les invariants spectraux des systèmes dynamiques et certains problèmes dans la théorie d'approximation diophantienne. On étudie ensuite la connexion entre les systèmes dynamiques d'origine combinatoire et les systèmes quantiques possédant l'autosimilarité spectrale.

Propriétés combinatoires et spectrales de certains systèmes d'entropie nulle

On étudie les propriétés combinatoires, la complexité et les propriétés spectrales des systèmes adiques, systèmes générés par des substitutions, systèmes de rang fini et local et autres systèmes symbolique. On va trouver des nouveaux effets, en établissant une connexion entre les caractéristiques de complexité et les propriétés géométriques du spectre. Nous nous concentrons surtout sur l'élaboration de la technique des produits de Riesz pour certaines catégories de système symbolique.

Théorie ergodique des actions de groupes

La troisième partie de notre projet contient la recherche des propriétés différentes ergodiques des actions de groupes et de systèmes dynamique associé à des graphes Cayley et Schreier. Les objets et les modèles principaux de la recherche sont: les couplages des actions de groupes, les actions avec les propriétés certaines d'approximations, les systèmes d'origine algébrique et les systèmes induits par la structure géométrique des groupes et des graphes.

§1. Théorie des systèmes dynamiques et l'analyse harmonique

N. N. Louzine [1] a présenté en 1911 son premier exemple d'une série $\sum_n c_n z^n$ avec $c_n \rightarrow 0$ divergente à chaque point z du cercle trigonométrique $S^1 = \{|z| = 1\}$. Il est également connu qu'une série trigonométrique arbitraire satisfaisant à condition

$$\sum_n |c_n|^2 = \infty \quad (\clubsuit)$$

produit une série d'une forme $\sum_n e^{i\varphi_n} c_n z^n$ divergente partout. À présent nous considérons la série $\sum_n c_n z^n$ comme la décomposition en série de Fourier d'une mesure probabilité σ sur l'intervalle $[0, 1]$, et nous nous intéressons surtout à la classe de telles mesures σ que les coefficients Fourier de σ

$$c_n = \hat{\sigma}(n) = \int_{S^1} z^n d\sigma$$

satisfont à condition (\mathfrak{J}) . La théorème de Riemann-Lebesgue assure que le coefficient Fourier $\hat{\sigma}(n)$ d'une mesure absolument continue tend vers zéro quand $n \rightarrow \infty$. Autrement dit, chaque mesure sur S^1 ayant $\sum_n |\hat{\sigma}(n)|^2 < \infty$ doit être absolument continue.

Definition 1. On appelle *mesure de Men'shov–Rajchman* une mesure singulière σ ayant la convergence $\hat{\sigma}(n) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. Soit \mathcal{R} l'ensemble de telles mesures.

Aucune mesure discrete n'appartient pas à \mathcal{R} car la suite $\hat{\sigma}(n)$ est Bohr presque périodique. Par contre, la mesure μ_{CL} supportée par l'ensemble de Cantor est singulière, mais $\mu_{\text{CL}} \notin \mathcal{R}$, parce que $\hat{\mu}_{\text{CL}}(3k) = \hat{\mu}_{\text{CL}}(k)$ en raison de la symétrie fractale d'ensemble de Cantor. Le premier exemple d'une mesure singulière dans la classe \mathcal{R} était donné par Menshov [2]. Nader dans le travail [3] a observé que les mesure Men'shov–Rajchmann ne contenaient pas d'une partie discrete, et ensuite, Wiener [4] a déduit la convergence vers zero des sommes

$$\bar{S}_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |\hat{\sigma}(n)|$$

pour les mesures continues (sans partie discrete), et a montré que la densité d'ensemble $\{n: |\hat{\sigma}(n)| > b > 0\}$ était toujours zero dans \mathbb{Z} . Littlewood [5] a trouvé un exemple de mesure singulière σ avec la décroissance polynomiale de $\hat{\sigma}(n) = O(|n|^{-c})$ et Wiener et Wintner [6] ont montré que la puissance c peut être arbitrairement proche à $1/2$. En utilisant l'idée de produit de Riesz [7], Schaeffer a établi l'existence d'une mesure singulière σ telle que $\hat{\sigma}(n) = O(r(|n|) \cdot |n|^{-1/2})$ pour n'importe quelle suite $r(n) \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$, et finalement Salem [8] a obtenu les exemples explicites des mesures ayant la propriété

$$\hat{\sigma} = O(|n|^{-1/2}).$$

Dans le cadre du projet on étudie la relation entre les propriétés combinatoires de systèmes dynamiques symboliques et les propriétés analytiques des mesures spectrales.

Bibliographie

- [1] N. N. Louzine. Sur un cas particulier de la série de Taylor. *Mat. Sb.*, 28:2 (1912), 295–302.
- [2] D. E. Menshov. Sur l'unicité du développement trigonométrique. *C. R. Acad. Sc. Paris, Ser. A-B*, vol. 163 (1916), 433–436.
- [3] L. Nader. Über die Fourierkoeffizienten der Funktionen von beschränkter Schwankung. *M. Z.*, vol. 6 (1920), 270–273.
- [4] N. Wiener. The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients. *J. of Math. and Phys.*, vol. 3 (1924), 72–94.
- [5] J. E. Littlewood. On Fourier coefficients of functions of bounded variation. *Quarterly J. of Math.*, vol. 7 (1936), 219–226.
- [6] N. Wiener, A. Wintner. Fourier–Stieltjes transforms and singular infinite convolutions. *Amer. J. Math.*, vol. 60 (1938), n° 3, 513–522.
- [7] A. C. Schaeffer". The Fourier–Stieltjes coefficients of a function of bounded variation. *Amer. J. Math.*, 61:4 (1939), 934–940.
- [8] R. Salem. On some singular monotonic functions which are strictly increasing. *Trans. Amer. Soc. Math.*, 53 (1943), no. 3, 427–439.

1.1 Mesures de Salem–Schaeffer

Collaboration

- * Laboratoire de Mathématiques Raphaël Salem, Rouen
- * Valery Ryzhikov, Université d'État de Moscou

Contenu de l'investigation

L'objectif de la recherche est de produire une classe nouvelle de mesures de Salem–Schaeffer d'origine dynamique. On a proposé [9] une construction symbolique suivante. Nous commençons par un mot fini w_0 dans une alphabet \mathbb{A} et construisons la séquence des mots w_n ,

$$w_{n+1} = \rho_{\alpha(n,0)}(w_n) \rho_{\alpha(n,1)}(w_n) \cdots \rho_{\alpha(n,q_n-1)}(w_n),$$

où $\rho_\alpha(u)$ dénote la rotation (la décalage circulaire) du mot u et $\alpha(n, j)$ sont des paramètres fixés. Soit T la transformation de déplacement dans le système symbolique (X, \mathcal{A}, μ, T) généré par la séquence des mots w_n muni par la mesure invariante standard. Il est démontré que la transformation T a plusieurs propriétés intéressantes: T a du spectre simple et de décroissance des corrélations

$$\langle T^t f, f \rangle = O(|t|^{-1/2+\varepsilon}) \quad (\clubsuit)$$

pour chaque $\varepsilon > 0$ et chaque fonction f cylindrique dans un ensemble dense dans $L^2(\mu)$. Ainsi donc les mesures spectrales σ_f de T deviennent les candidats à être des exemples nouveaux des mesures de Salem–Schaeffer, ayant la décroissance de coefficient Fourier maximale possible pour toute mesure singulière sur $S^1 \simeq [0, 1]$.

Cette classe de constructions se caractérise par un invariant métrique: on dit que T a la propriété *d'approximation de type \mathcal{I}* si pour chaque partition finie \mathcal{P} et $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble Ω_ε de mesure $1 - \varepsilon$ tel que le \mathcal{P} -codage de l'orbite de chaque point $x \in \Omega_\varepsilon$ est ε -approché par une séquence des mots w_j qui sont tous proches à $\rho_{\alpha_j}(W_\varepsilon)$, où W_ε est un mot universel.

Hypothesis 1. Un système ayant la propriété d'approximation de type \mathcal{I} ne peut pas avoir vitesse de décroissance de corrélations mieux que (\clubsuit) pour toute la fonction cylindrique.

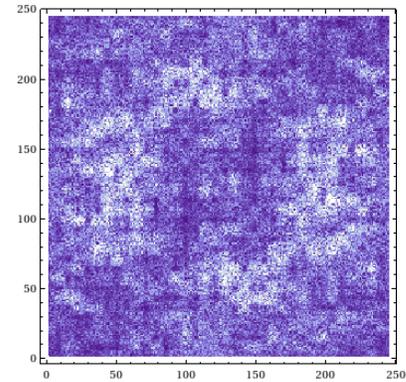
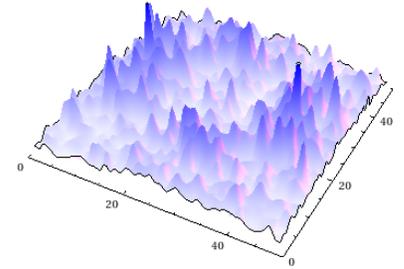
Resultats prévus

- ✓ Existence des actions de groupes \mathbb{Z}^d et \mathbb{R}^d de spectre simple possédants des mesures spectrales de type Salem–Schaeffer.
- ✓ Investigation de l'hypothèse de rigidité 1

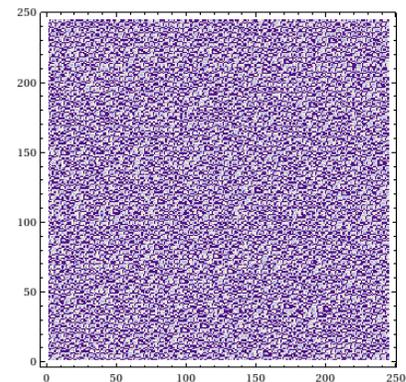
Bibliographie

- [9] A. A. Prikhod'ko. On ergodic properties of “iceberg” transformations. I: Approximation and spectral multiplicity. ArXiv:1008.4301.
- [10] A. A. Prikhod'ko. Singular Salem–Schaeffer measures of dynamical system origin. ArXiv: 1205.6964. *To appear in Functional Analysis & Applications, 2013.*

Figure 1. Une exemple de la distribution spectrale de type Salem–Schaeffer.



Le champ aléatoire d'origine



1.2 Mesures singulieres et les sommes de caractères dans les champs finis

Collaboration

* Ilya Shkredov, Institut de Mathématiques Steklov, Moscou

Contenu de l'investigation

On considère un cas spécial de la construction de la section 1.1. Soit h_n des nombres premiers et $q_n = h_n - 1 = \#\mathbb{F}_{h_n}^*$ le cardinalité du groupe multiplicatif du champ fini \mathbb{F}_{h_n} , et η_n une suite fixé d'éléments primitives dans les champs \mathbb{F}_{h_n} . Considérons la suite de paramètres

$$\alpha_{n,j} := \eta_n^j \quad \text{en } \mathbb{F}_{h_n}.$$

Le système correspondante de type \mathcal{I} est un candidat pour un exemple explicite de mesure spectrale de Salem–Schaeffer.

Dans la base de notre construction c'est les propriétés des sommes de caractères Dirichlet. On s'agit des sommes

$$S_{H,\chi}(x) = \sum_{x \leq n \leq x+H} \chi(n).$$

où $\chi(x)$ est une fonction complexe sur un champ fini F telle que $\chi(xy) = \chi(x)\chi(y)$, $x, y \in F$, et $\chi(0) = 0$. En 1918 Pólya et Vinogradov ont trouvé pour un caractère χ non-primitive une estimation

$$S_{H,\chi} = o(p^{1/2} \log p).$$

Davenport et Erdős [11] ont démontré que la distribution S_{H,χ_L} devient presque gaussienne pour p grand. Mak and Zaharescu [12] ont établi le même loi pour tous les caractères non-réels.

L'idée de notre recherche est à appliquer l'analyse statistique des sommes exponentielles sur les champs finis à l'étude spectrale des systèmes dynamiques de type \mathcal{I} , et à trouver des exemples explicites de mesures spectrales de Salem–Schaeffer.

Resultats prévus

- ✓ Obtenir les estimations d'interpolation trigonométrique du logarithme discret dans le champ fini \mathbb{F}_p
- ✓ Étudier les propriétés analytiques des sommes de caractères dans les champs finis le long de sous-groupes et courbes elliptiques.
- ✓ Démontrer la singularité des mesures spectrales pour les systèmes de type \mathcal{I} associés aux suites $\alpha_{n,j}$.

Bibliographie

- [11] H. Davenport, P. Erdős. The distribution of quadratic and higher residues. *Publ. Math. Debrecen*, vol. 2 (1952), 252–265.
- [12] K. H. Mak, A. Zaharescu. The Distribution of Values of Short Hybrid Exponential Sums on Curves over Finite Fields. *Math. Res. Lett.*, vol. 18 (2011), no. 1, 155–174.

Figure 1. La distribution des phases d'un caractère de Dirichlet sur le champ \mathbb{F}_p .

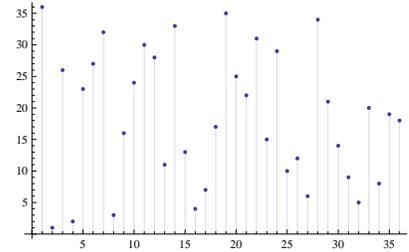
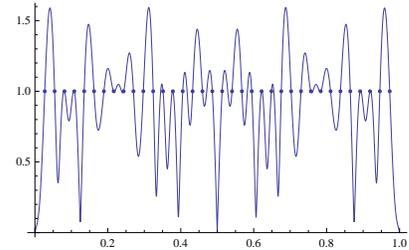


Figure 2. L'approximation trigonométrique d'un caractère de Dirichlet.



1.3 Polynômes de Littlewood

Collaboration

- * Anatole Stépin, Université d'État de Moscou
- * Bassam Fayad, Université Paris 7 Denis Diderot, Paris

Contenu de l'investigation

Un polynôme complexe est dit *unimodulaire* ([13], [14])

$$P(z) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^j,$$

si $|a_j| = 1$ pour tous j , ou $n \geq 2$. La question de Littlewood très connu dans la théorie des nombre c'est à trouver un polynôme unimodulaire $P(z)$ avant la propriété $||P(z)| - 1| < \varepsilon$ pour chaque $z \in S^1$. Dans ce cas, on dit que $P(z)$ est ε -plat. Cette question a été résolu par Kahane [15] (voir aussi [16]).

Nous nous intéressons à la version du problème de Littlewood renforcé “dynamique”. Nous étudions les familles de polynômes de Littlewood à coefficients unimodulaires

$$Q^{(t)}(z) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} e^{it\omega_j} z^j$$

limité à la cercle trigonométrique $S^1 = \{|z| = 1\}$. On s'intéresse aux estimations universelles de $Q^{(t)}(z)$ sur l'ensemble le plus grand possible.

Problème 1. Soit Ω un ensemble dans $S^1 \times \mathbb{R}_+$. Trouver pour chaque $\varepsilon > 0$ une famille de polynômes $Q^{(t)}(z)$, ε -plats sur l'ensemble Ω en norme $L^1(\Omega)$.

Resultats prévus

- ✓ Le modèle dynamique associé à la méthode généralisée de van der Corput
- ✓ Étude des familles de polynômes de Littlewood unimodulaires
- ✓ Les produits de Riesz de type Kronecker sur certains groupes généraux

Bibliographie

- [13] P. Erdős. An inequality for the maximum of trigonometric polynomials. *Annales Polonica Math.*, vol. 12 (1962), 151–154.
- [14] J.E. Littlewood. On polynomials $\sum^n \pm z^m$, $\sum^n e^{\alpha_m i} z^m$, $z = e^{\theta i}$. *J. London Math. Soc.*, vol. 41 (1966), 367–376.
- [15] J.-P. Kahane. Sur les polynômes à coefficients unimodulaires. *Bull. London Math. Soc.*, vol. 12 (1980), 321–342.
- [16] E. Bombieri, J. Bourgain. On Kahane's ultra-flat polynomials. *J. Eur. Math. Soc.*, vol. 11 (2009), n°3, 627–703.

Figure 3. Les phases stationnaires dans la méthode de Van der Corput.

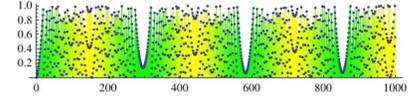
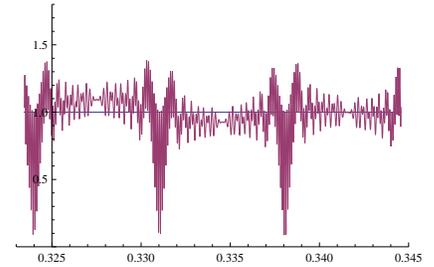


Figure 4. Les familles des polynômes plat à coefficients unimodulaires sur le tore \mathbb{T} .



1.4 L'effet de l'autosimilarité dans les systèmes quantiques

Collaboration

- * Vyacheslav Spiridonov, Institut unifié de recherches nucléaires (JINR), Dubna

Contenu de l'investigation

Les sommes de caractères sur $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$

$$\psi(t, \theta) = \sum_k e^{i(t\omega_k + \theta k)}$$

sont actuellement les solutions de l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H} \psi$$

pour un système quantique avec la propriété caractéristique suivante: le spectre de l'opérateur \hat{H} contient un composant discret Λ tel que

$$q\Lambda \subseteq \Lambda,$$

où q est un paramètre généralement proche de 1. Ce modèle a beaucoup d'applications aux systèmes d'Ising, systèmes solitonique KdV et autres. Il est également relié à la notion d'algèbre de Heisenberg–Weyl q -déformé caractérisé par les relations de commutation

$$\begin{aligned} q^{1/2} x p - q^{-1/2} p x &= i\Lambda, \\ \Lambda p &= qp\Lambda, \quad \Lambda x = q^{-1}x\Lambda, \end{aligned}$$

et le concept des groupes quantiques. On applique les résultats de la section n°1.3 pour découvrir des nouvelles effets dans les systèmes quantiques autosimilaires.

Resultats prévus

- ✓ Étudier les effets solitoniques dans les système avec autosimilarité spectrale
- ✓ Comprendre les propriétés diophantienne des solutions

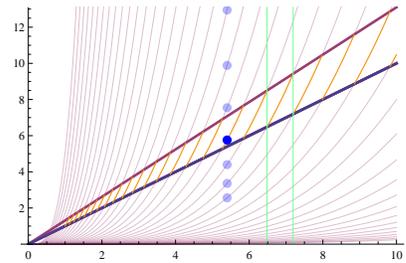
Bibliographie

- [17] V. P. Spiridonov. Deformation of supersymmetric and conformal quantum mechanics through affine transformations. *NASA Conf. Pub.*, vol. 3197 (1993), 93–108.
- [18] A. Lorek, J. Wess. Dynamical Symmetries in q -deformed quantum mechanics. *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields*, vol. 67 (1995), n°4, 671–679.
- [19] J. P. Gazeau, V. P. Spiridonov. Toward discrete wavelets with irrational scaling factor. *J. Math. Phys.*, vol. 37 (1996), n°6, 1–13.
- [20] I. M. Loutsenko, V. P. Spiridonov. A critical phenomenon in solitonic Ising chains. *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, vol. 3 (2007).

Figure 5. La symmetrie multiplicative du spectre.



Figure 6. La dynamique de la phase d'une solution solitonique.



§2. Propriétés combinatoires et spectrales de systèmes dynamiques

2.1 Compléxité de systèmes dynamiques de rang fini et local

Collaboration

- * Élise Janvresse et Thierry de la Rue, Laboratoire de Mathématiques Raphaël Salem, Rouen
- * Karl Petersen, Université de la Caroline du Nord à Chapel Hill

Contenu de l'investigation

On étudie la corrélation des propriétés dynamiques différentes: la compléxité, le rang, l'approximation et l'entropie à l'échelle $\phi(\ell)$, et le type spectral. Soit w_∞ un mot infini dans l'alphabet \mathbb{A} . On construit un ensemble compact K de mots infinis dans \mathbb{A}^∞ comme l'adhérence dans la topologie faible de toutes les translations de w_∞ , et considère la transformation de déplacement $T: (x_j) \mapsto (x_{j+1})$. Ensuite on soit K l'espace des phases du système dynamique topologique (K, T) . En supposant que les distributions empiriques générées par le mot infini w_∞ forment une famille de mesures cohérentes, nous avons les trois points de vue dont nous considérons notre système:

- (a) les propriétés combinatoires du mot w_∞ ;
- (b) les propriétés topologiques et
- (c) les propriétés ergodiques du système (K, \mathcal{A}, μ, T) ,

où μ est la mesure T -invariante.

Dans cette partie du projet on étudie le rang, l'approximation à l'échelle $\phi(\ell)$ et les caractéristiques de la compléxité des orbites typiques pour une série de systèmes symboliques: de la transformation de Pascal, des systèmes de type \mathcal{I} et d'autres. On va aussi établir la relation entre la compléxité ou l'approximation à l'échelle et quelques propriétés spectrales.

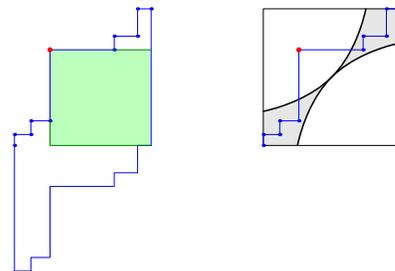
Resultats prévus

- ✓ Calcul de rang des systèmes de type \mathcal{I} aléatoires et concrets
- ✓ Calcul de rang pour quelques systèmes adiques

Bibliographie

- [21] S. Ferenczi. Measure-theoretic complexity of ergodic systems. *Israel J. of Math.*, vol.100 (1997), 189–207.
- [22] X. Mela, K. Petersen. Dynamical properties of the Pascal adic transformation. *Th. Dyn. Sys.*, vol.25 (2003), 227–256.
- [23] S. Ferenczi. Rank and symbolic complexity. *Ergodic theory and dynamical systems*, vol.16 (2008), n°4, 663–682.
- [24] A. A. Prikhod'ko. Lower bounds for symbolic complexity of iceberg dynamical systems. ArXiv: 1201.5757.

Figure 7. Les transformations de type \mathcal{I} sont des systèmes de rang un local et du complexité $p(\ell) \geq \ell^{3-c}$ pour chaque $c > 0$.



2.2 Études combinatoires et spectrales de la transformation adique de Pascal

Collaboration

- * Élise Janvresse et Thierry de la Rue, Laboratoire de Mathématiques Raphaël Salem, Rouen
- * Karl Petersen, Université de la Caroline du Nord à Chapel Hill
- * Anatole Vershik, Institut de Mathématiques Steklov, Saint-Petersbourg

Contenu de l'investigation

On considère un graphe correspondant au triangle de Pascal et l'ensemble X de chemins orientés avec l'ordre lexicographique. Ensuite, la transformation Pascal adique T , introduite par A. Vershik en [25], est défini comme l'application sur l'espace X qui envoie un chemin x au chemin $Tx = x + 1$ suivant – le plus grand, mais le plus proche à x . La transformation Pascal adique T est une transformation ergodique qui préserve la mesure standard sur l'espace X . La complexité symbolique de T a la croissance cubique, $p(\ell) \sim \frac{1}{6}\ell^3$. Il est un des exemples les plus simples de transformations adiques, mais à la fois il y a plusieurs questions compliquées sur les propriétés combinatoires et ergodiques de T .

Problème 1. Est-ce que T est mélangeante?

Problème 1. Quel est le type spectral de T ?

D'après le travail [26] par A. Vershik qui en déduit la propriété de mélange faible d'automorphisme T des propriétés analytiques de suites de Besicovitch–Hamming, nous allons entreprendre l'investigation de mesures spectrales d'automorphisme Pascal adique. Notre plan de recherche prévue comme les expérience informatiques et résultats précis pour quelques classes de fonctions particulières.

Programme de recherche

- A. Expérience empiriques des propriétés mélangeantes dans la représentation symbolique
- B. Étude profonde de la structure symbolique et calcul de rang.
- C. Recherche des propriétés géométriques des mesure spectral et une version de technique des produit de Riesz pour l'automorphisme Pascal adique

Bibliographie

[25] A. M. Vershik. A theorem on periodic Markov approximation in ergodic theory. *J. Sov. Math.*, 28 (1985), 667–674.

[26] A. M. Vershik. The Pascal automorphism has a continuous spectrum. *Funct. Anal. Appl.*, 45:3 (2011), 173–186.

Figure 8. Codage du graphe de Bratteli–Vershik pour l'automorphisme Pascal adique sur l'arbre Pascal

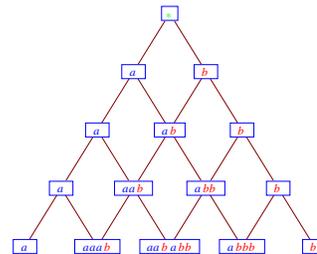


Figure 9. La structure symbolique et l'approximation de l'automorphisme Pascal adique

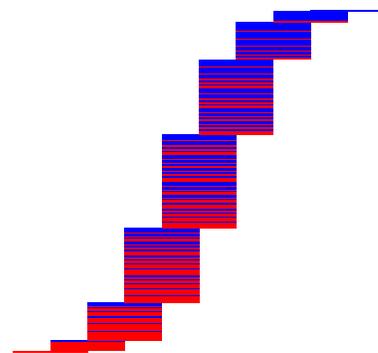
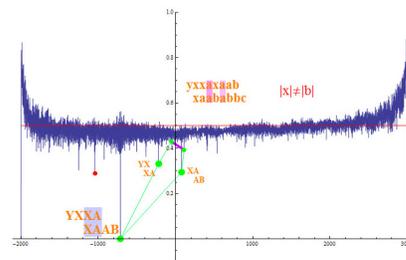


Figure 10. La structure des corrélations



2.3 Automorphisme de Chacon: spectre, symétries et dynamique holomorphe

Collaboration

- * Élise Janvresse et Thierry de la Rue, Laboratoire de Mathématiques Raphaël Salem, Rouen
- * Valery Ryzhikov, Université d'État de Moscou

Contenu de l'investigation

L'automorphisme de Chacon, un construction très connu dans la théorie ergodique, est défini comme la transformation de déplacement dans un système symbolique induit par la substitution

$$0 \rightarrow 0010, \quad 1 \rightarrow 1.$$

L'automorphisme de Chacon est une combinaison intéressante de propriétés dynamique. T est faiblement mélangeant mais il n'est pas mélangeant. Il a le centralisateur trivial et la propriété de minimalité des auto-couplages (MSJ). Il est connu aussi que $\sigma \perp \sigma * \sigma$, et tous les convolutions $\sigma * \dots * \sigma$ du type spectral σ de T sont mutuellement singulieres. Dans le cadre du projet on étudie les propriétés asymptotique de la representation unitaire $\hat{T}f(x) = f(Tx)$ générée par l'automorphisme de Chacon T . Soit \mathcal{C} la cloture des operateurs \hat{T}^k , $k \in \mathbb{Z}$. \mathcal{C} est complètement décrit en [27]:

$$\mathcal{C} = \{ \Theta, P_{m_1}(\hat{T}) \cdots P_{m_r}(\hat{T}) \cdot \hat{T}^j \},$$

où $P_m(\hat{T})$ est une famille de polynômes speciale qui est actuellement un point fixé d'un marche aléatoire sur le graphe Schreier

$$\Gamma = BS(1, 3) / \langle s \rangle$$

du groupe Baumslag–Solitar (voir aussi section n°3.2). On va continuer la recherche du phénomène de la symétrie spectrale non-commutative en général et pour les transformations autosimilaires de type Chacon.

Resultats prévus

- ✓ Expliquer l'effet de la symétrie spectrale non-commutative
- ✓ Étudier la dynamique complexe induite par la fonction génératrice $H(x, z) = \sum_m P_m(x) z^m$.

Bibliographie

- [27] É. Janvresse, A. A. Prikhod'ko, T. De la Rue, V. V. Ryzhikov. Weak limits of powers of Chacon's automorphism. ArXiv: 1301.2904. To appear in *Ergodic Theory & Dynamical Systems*, 2013.

Figure 11. L'automorphisme de Chacon est une application integrale ayant la rotation 3-adique dans la base et une fonction de plafond 3-adique lisse partout sauf en $-1 = 222\dots$

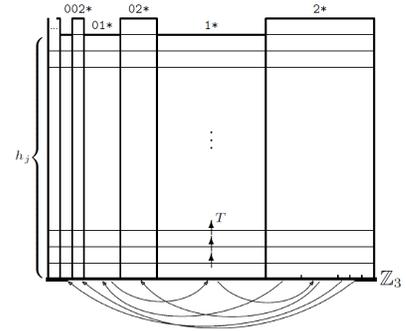


Figure 12. Les points singuliers des polynômes duals à $P_m(x)$.

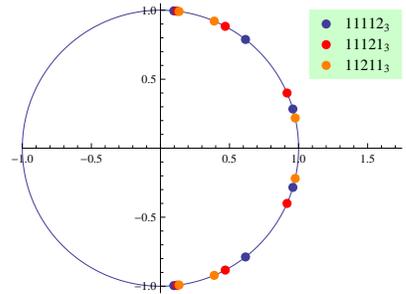
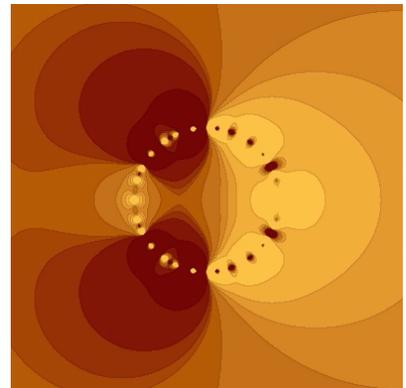


Figure 13. La génératrice $H(z, x)$ des polynômes $P_m(x)$ en point $x = -1$.



2.4 La théorie spectrale des échanges d'intervalles

Collaboration

* Alexander Bufetov, Université Aix-Marseille.

Contenu de l'investigation

Soit $[0, 1) = [\alpha_0, \alpha_1) \cup [\alpha_1, \alpha_2) \cup \dots \cup [\alpha_{m-1}, \alpha_m)$ une partition finie de l'intervalle $[0, 1)$, où $\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_m$. La *transformation d'échange d'intervalles (IET)* permute les intervalles (α_{i-1}, α_i) de manière rigide selon une permutation fixée $\gamma \in S_m$:

$$\begin{aligned} [0, 1) \ni x \mapsto Tx \in [0, 1) = \\ = T[\alpha_{\gamma^{-1}(1)-1}, \alpha_{\gamma^{-1}(1)}) \cup \dots \cup T[\alpha_{\gamma^{-1}(m)-1}, \alpha_{\gamma^{-1}(m)}). \end{aligned}$$

La construction d'échange d'intervalles est un modèle célèbre dans la théorie des systèmes dynamiques ayant beaucoup d'applications et d'interprétations. Par exemple, tous les flots minimaux lisses sur une surface bidimensionnelle compacte préservants le volume est un flot integral ayant dans la base une transformation IET (voir figure). Par ailleurs, il est connu que tout automorphisme ergodique est un échange d'ensemble infini d'intervalles.

L'étude des échanges d'intervalles est le sujet des nombreuses questions ouvertes. Les problèmes concernant les transformations IET sont abtuelement formulées de la manière suivante:

- quelles sont les propriétés ergodiques des applications IET typique ou
- quelle est la structure d'une transformation IET particulière?

Une objectif de notre recherche est de decouvrir des nouvelles propriétés spectrales des transformations IET, en général est pour certaines classes particulières.

Programme de recherche

- Utilisant les resultats obtenus dans les sections 1.1, 1.3 et 2.2 il est prévu à developper une version de technique de produit de Riesz pour les transformations IET
- Décrire le type spectral pour quelques classes de transformations IET

[28] M. Keane. Interval exchange transformations. *Mathematische Zeitschrift*, 141, 25 (1975).

[29] A. Avila, A. Bufetov. Exponential decay of correlations for the Rauzy–Veech–Zorich induction map. *Fields Institute Communications*, vol. 51, 2007.

[30] M. Viana. Dynamics of interval exchange transformation and Teichmüller flows, 2008.

Figure 14. Un flot sur une surface bidimensionnelle ayant une application de Poincaré donné par IET.

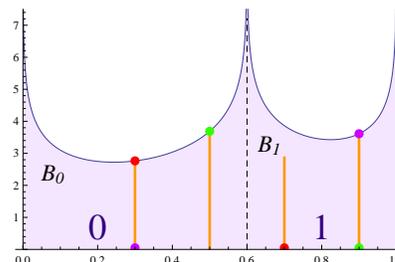
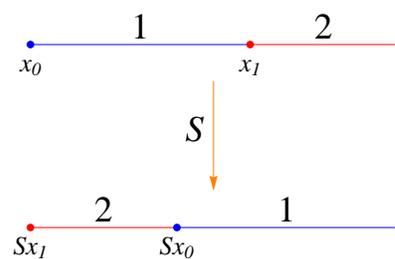


Figure 15. Une rotation d'un cercle, en effet, il est une transformation d'échanges de deux intervalles.



§3. Théorie ergodique des actions de groupes

3.1 Actions mélangeantes de rang fini et local

Collaboration

* Valery Ryzhikov, Université d'État de Moscou

Contenu de l'investigation

La classe de systèmes dynamiques de rang fini et de rang local est la source importante d'exemples dans la théorie ergodique des systèmes d'entropie nulle. Une application T ayant une mesure invariante est dit *transformation de rang un* s'il est approché arbitrairement bien par une suite de tours de Rokhlin associées à l'application T .

Dans le cadre du projet on considère des actions de rang un de groupes non-commutatifs. Cette class généralisée montre une série d'effets nouveaux ergodiques. On d'étudie les auto-couplages est les propriétés spectrales de quelques actions de groupes de rang un approchés par des déplacements sur les espaces homogènes. En particulier, nous considerons quelques groupes continus de Lie, y compris les groupes de Heisenberg \mathbb{H}_n .

Programme de recherche

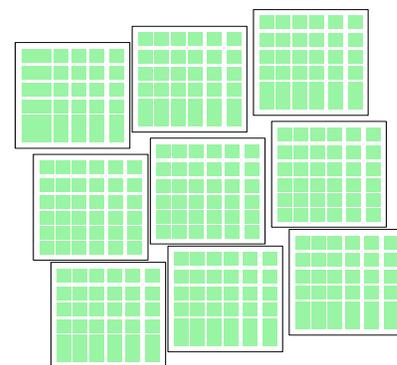
- A. Nouvelles constructions mélangeantes des actions de groupes de Heisenberg \mathbb{H}_n
- B. L'Étude d'auto-couplages pseudo-diagonals des actions de rang un de groupe \mathbb{H}_n
- C. Exemples d'actions de groupes de rang un mélangeantes sans propriété MSJ
- D. Exploration de la théorie generale d'auto-couplages d'une des actions mélangeantes de group Heisenberg
- E. Investigation des propriétés spectrales d'actions de rang un de groupe \mathbb{H}_n

Objectifs à court terme: A–C (2013–2014), à long terme: D–E (cinq ans).

Bibliographie

- [31] A. A. Prikhod'ko. Ergodic Joinings of $GL(n, \mathbb{Z})$ -Action on n -Torus. *J. Dynam. Control Systems*, vol.5 (1999), no.3, 385–396.
- [32] A. I. Danilenko, C. E. Silva. Mixing rank-one actions of locally compact abelian groups. *Annales de l'institut Henri Poincaré (B) Probabilités et Statistiques*, vol. 43 (2007), issue 4, 375–398.
- [33] A. I. Danilenko. Mixing actions of Heisenberg group. arXiv:1112.5248.
- [34] El Abdalaoui, E.H.; Parreau, F.; Prikhod'ko, A.A. A new class of Ornstein transformations with singular spectrum. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Probab. Stat.* vol. 42 (2006), no. 6, 671–681.

Figure 16. Hiérarchies de pavages aléatoires.



3.2 Géométrie et l'analyse spectrale des groupes et des graphes Schreier

Collaboration

- * Rostislav Grigorchuk, Université de Texas A&M
- * Tatiana Smirnova-Nagnibeda, Université de Genève

Contenu de l'investigation

Dans la théorie des groupes les méthodes géométriques et asymptotiques sont la source de plusieurs constructions et exemples. Ils montrent aussi une liaison entre l'étude des groupes et la théorie des systèmes dynamiques. On s'agit d'un groupe donné par un ensemble fini de générateurs et des relations

$$G = \langle s_1, \dots, s_m \mid r_1, \dots, r_n \rangle,$$

où r_i sont des mot dans l'alphabet $\mathbb{A} = \{s_1^{\pm 1}, \dots, s_m^{\pm 1}\}$. Le premier exemple d'un groupe de croissance intermédiaire donné par R. Grigorchuk en 1983 est actuellement supporté sur la construction speciale de système dynamique autosimilaire sur un arbre. Le taux de croissance du group G est caracterisé par la fonction $r(n)$ qui mesure les boules $B(e, n)$ dans le graphe Cayley du group G , autrement dit la complexité asymptotique du graph Cayley. Une généralisation du concept de graphe Cayley est la notion de graphe Schreier, ayant l'ensemble de sommets $\{gH\}$ reliés par les arêtes (gH, sgH) , où $s \in \{s_1, \dots, s_m\}$ et H est un sous-groupe par neccesaire normal. Ainsi donc l'investigation des graphes Cayley est Schreier devient très importante pour comprendre les propriétés asymptotiques des groupes et des systèmes dinamique associés.

Le but de notre recherche est à etudier les propriétés spectrales des groupe et des graphes Schreiers pour une classe de groupes de transformations d'arbres autosimilaires.

Resultats prévus

- A. Étude combinatoire des graphes Schreier finis du groupe \mathcal{L}_p ("Lamplighter")
- B. Recherche de propriétés spectrales du marche aléatoire sur le groupe \mathcal{L}_p est autres groupes autosimilaires
- C. Investigation de quelques actions non-commutatives sur les champs Galois \mathbb{F}_{p^n}
- D. Étude d'effet de la symmetrie spectral de representations unitaires pour les systèmes dynamiques classiques donné par des actions de group \mathbb{Z} et \mathbb{R} (cf. n° 2.3).

Bibliographie

- [35] R. I. Grigorchuk. On the Milnor problem of group growth. *Soviet Math. Dokl.*, vol. 28 (1983), no. 1, 23–26.
- [36] R. I. Grigorchuk, V. Kaimanovich and T. Smirnova-Nagnibeda. Ergodic properties of boundary actions and Nielsen's Method. *Adv. Math.*, vol. 230 (2012), no. 3, 1340—1380.
- [37] P. de la Harpe. Topics in geometric group theory. University of Chicago Press, 2000.

Figure 17. La graphe Cayley du groupe \mathcal{L}_2 .

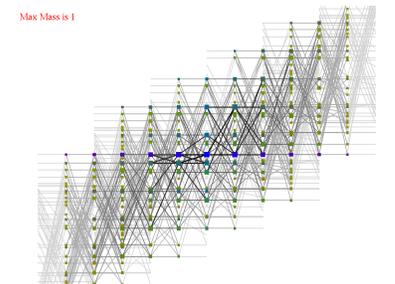


Figure 18. Quelques graphe Schreiers finis du groupe \mathcal{L}_2 .

