

ДУ: экзамен 20 июня 2018 года; первый поток; вариант 1<sub>1</sub>

На экзамене не разрешается: пользоваться электронными приборами, конспектами, книгами и другими печатными или рукописными материалами; разговаривать и пользоваться помощью соседей.

**Оценки:** За ответ на каждый вопрос/задачу начисляются очки, максимальное количество очков указано в скобках перед вопросом/задачей; набранное количество очков складывается с очками, полученными за работу в семестре. Оценка определяется по итоговой сумме: 9-12 очков - удовлетворительно, 13-17 очков - хорошо, 18 и выше - отлично. **Зачёт идёт по 5 задачам!!!**

**Задача 1.**

(1) Сформулируйте теорему о дифференцируемой зависимости от начальных условий решения задачи Коши.

(4) Найти образ касательного вектора  $(2, -1)$ , приложенного в точке  $(0, 0)$ , под действием преобразования фазового потока за единичное время системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -\ln(1+x) - x^3 + 2y \\ \dot{y} = x^2 + \sin y - y^2 \end{cases} .$$

**Задача 2.**

(1) Сформулируйте теорему Ляпунова об устойчивости особых точек автономных векторных полей по первому приближению.

(4) Найти все особые точки системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y + xy + y^2/2 \\ \dot{y} = 4x - xy \end{cases}$$

и определить их тип. Нарисовать эскиз фазового портрета системы вблизи каждой из них.

**Задача 3.**

(1) Сформулируйте теорему о существовании и единственности решения задачи Коши для линейного уравнения в частных производных первого порядка.

(2) Найти общее решение уравнения  $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy$ ,

(2) а также частное решение, удовлетворяющее условию  $z|_{y=2} = 1 + x^2$ .

**Задача 4.**

- (1) Сформулируйте теорему Флоке.
- (2) Устойчив ли цикл, соответствующий решению  $x = \cos t$  дифференциального уравнения

$$\ddot{x} - (\ddot{x})^3 + \dot{x} - x^3 = 0 ?$$

- (2) Является ли он предельным?

**Задача 5.**

- (1) Найти векторное поле, определенное на интервале  $(0, 1)$ , с фазовым потоком

$$g^t : x \mapsto x^{e^t},$$

- (2) выпрямить его в окрестности точки  $x = \frac{1}{2}$ ,
- (2) проверить для него формулу изменения фазового объема.

**Задача 6.** Объект единичной массы на плоскости разогнали до скорости 60 метров в минуту, после чего он начал движение по инерции с сопротивлением среды, пропорциональным скорости движения. Через четыре секунды скорость объекта упала в два раза.

- (2) Через какое время скорость объекта уменьшится в восемь раз?
- (3) Через какое время наблюдатель перестанет замечать движение объекта, если его приборы не различают скорости, меньшие 0.2 м/сек?