Вариант 1

Задачи

1. (**2**) Нарисуйте (не находя общего решения) интегральные кривые уравнения

$$\dot{x} = \sqrt[3]{x^4(x^3-1)}.$$

(**2**) Найдите все точки, в которых нарушается теорема единственности, обосновав свой ответ.

2. (**1**) Найдите у системы

$$\begin{cases} \dot{x} &= \quad 2y + (3x+6y)(x^2+y^2-1) \\ \dot{y} &= -2x + (7x-4y)(x^2+y^2-1) \end{cases}$$

цикл и укажите какое-нибудь непостоянное периодическое решение, которое ему соответствует.

(**3**) Исследуйте найденный цикл на устойчивость. Является ли он предельным?

3. (**4**) Найдите производную по параметру ε при $\varepsilon = 0$ решения уравнения

$$\ddot{x} + \dot{x} = \varepsilon x^2 + 2\varepsilon e^{-t}$$

с начальными условиями $x(0) = \sin\varepsilon$, $\dot{x}(0) = \cos\varepsilon$.

Вопросы

4. (**1**) Запишите в симметричной форме систему уравнений, которому удовлетворяют фазовые кривые векторного поля

$$\dot{x} = 2y, \quad \dot{y} = -z, \quad \dot{z} = x + y$$

вне начала координат.

5. (**2**) Система

$$\ddot{x} = \frac{x}{(x^2+y^2)^3}, \quad \ddot{y} = \frac{y}{(x^2+y^2)^3}$$

описывает движение материальной точки в центральном силовом поле. Как изменится период её обращения по круговой орбите, если радиус последней увеличится вдвое?

6. (**2**) Найдите наименьшее расстояние между соседними нулями ненулевого решения уравнения $\ddot{x} + x(t - |t| + 5) = 0$.

7. (**3**) Существует ли у векторного поля

$$\begin{cases} \dot{x} &= -2x + 10x^3 \\ \dot{y} &= -3y + 4xy^5 \end{cases}$$

первый интеграл, определённый в некоторой окрестности начала координат и не равный в ней постоянной?

Вариант 2

Задачи

8. (**4**) Решите задачу Коши

$$y''y - y'^2 = \frac{y^2}{x^2}, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0.$$

9. (**2**) Найдите все особые точки системы

$$\begin{cases} \dot{x} &= 2xy \\ \dot{y} &= 2x - y^2 + 4 \end{cases},$$

определите их типы и исследуйте на устойчивость. При исследовании на устойчивость для каждой особой точки нужно указать, является ли она: а) асимптотически устойчивой; б) устойчивой, но не асимптотически; в) неустойчивой.

(**2**) Нарисуйте фазовый портрет системы.

10. (**4**) Найдите производную по параметру ε при $\varepsilon = 0$ решения уравнения

$$\ddot{x} + x = 2\varepsilon x^2$$

с начальными условиями $x(0) = e^{\varepsilon}$, $\dot{x}(0) = \sin\varepsilon$.

Вопросы

11. (**1**) Приведите пример (указав явную формулу) однопараметрической группы диффеоморфизмов плоскости, фазовая скорость которой равна нулю ровно в одной точке.

12. (**2**) Функции $x = -1$ и $x = \sin t$ удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$x^{(n)} = f\left(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)}\right)$$

с непрерывно дифференцируемой правой частью $f : \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}$. Найдите наименьшее n, при котором это возможно и приведите для него пример уравнения указанного вида.

13. (**2**) Найдите e^{tA}, если

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

14. (**3**) Найдите число циклов у системы

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y - \varepsilon x \\ \dot{y} &= x + \varepsilon x^2 y \end{cases}$$

при малых положительных $\varepsilon \in \mathbb{R}$ и исследуйте их на устойчивость.