

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ ШЕСТОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ*

А. Д. Брюно, И. В. Горючкина

Для шестого уравнения Пенлеве вблизи всех трех его особых точек $x = 0$, $x = 1$ и $x = \infty$ при всех значениях его четырех комплексных параметров получены все асимптотические разложения его решений пяти типов: степенные, степенно-логарифмические, сложные, полу-экзотические и экзотические. Они образуют 117 семейств. В этих разложениях независимая переменная x может иметь комплексные показатели степени. Сначала методами плоской степенной геометрии получены те асимптотические разложения решений всех пяти типов вблизи особой точки $x = 0$, у которых порядок первого члена меньше единицы. Эти разложения названы базовыми. Они образуют 21 семейство. Все другие асимптотические разложения решений вблизи трех особых точек уравнения вычисляются из базовых разложений с помощью симметрий уравнения. Подавляющее большинство этих разложений — новые. Приводятся примеры и сравнения с известными результатами.

Оглавление

Введение

Глава 1. Вычисление асимптотических разложений решений обыкновенных дифференциальных уравнений	17
§ 1. Степенные асимптотики решений	
§ 2. Степенные и степенно-логарифмические разложения	
§ 3. Нестепенные асимптотики решений	
§ 4. Сложные разложения	
§ 5. Экзотические разложения	
§ 6. Другие типы асимптотик и разложений	
§ 7. Неформальные решения	
Глава 2. Разложения решений уравнения P_6 в случае $a \cdot b \neq 0$ вблизи нуля и бесконечности	44
§ 1. Общие свойства уравнения	
§ 2. Разложения вблизи нуля, соответствующие вершинам	
§ 3. Разложения вблизи нуля, соответствующие ребру $\Gamma_4^{(1)}$	
§ 4. Разложения вблизи нуля, соответствующие ребру $\Gamma_1^{(1)}$	
§ 5. Разложения вблизи бесконечности	

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 08-01-00082) и Фонда содействия отечественной науке.

Глава 3. Разложения решений уравнения Р6 в случаях $a = 0, b \neq 0$
и $a \neq 0, b = 0$ вблизи нуля и бесконечности 81

§ 1. Общие свойства уравнения

§ 2. Разложения вблизи нуля, соответствующие вершине $\Gamma_6^{(0)}$

§ 3. Разложения, соответствующие ребру $\Gamma_6^{(1)}$

§ 4. Разложения, соответствующие ребру $\Gamma_7^{(1)}$

§ 5. Разложения вблизи бесконечности при $a = 0, b \neq 0$

§ 6. Сводка результатов в случае $a = 0, b \neq 0$

§ 7. Разложения в случае $a \neq 0, b = 0$

Глава 4. Разложения решений уравнения Р6 в случае
 $a = b = 0$ вблизи нуля и бесконечности 101

§ 1. Разложения

§ 2. Примеры и сравнения с известными результатами

Глава 5. Разложения решений уравнения Р6 вблизи единицы 105

§ 1. Разложения вблизи единицы при $a \cdot c \neq 0$

§ 2. Разложения вблизи единицы при $a \cdot c = 0$

§ 3. Сводка результатов

Введение

В 1884–1885 годах Л. Фукс [47] и А. Пуанкаре [70–72] предложили искать нелинейные дифференциальные уравнения, решения которых не имеют критических подвижных особых точек и не выражаются через ранее известные функции. В 1889 году С. Ковалевская [36] показала, что отсутствие подвижных критических особых точек в решениях позволяет построить решения в аналитическом виде.

Особая точка $x = x_0$ функции $y(x)$ комплексной переменной x называется *критической особой точкой*, если при обходе этой точки значение функции $y(x)$ меняется. *Подвижной особой точкой* решения дифференциального уравнения называется такая особая точка, положение которой зависит от начальных данных задачи. Так, для решения $y = 1/\sqrt{x - x_0}$, где x_0 — произвольная постоянная, точка $x = x_0$ является подвижной критической особой точкой. *Мероморфной функцией* называют всякую однозначную функцию, не имеющую в конечной части комплексной плоскости особых точек, кроме полюсов.

В 1887 году Э. Пикар [68] предложил исследовать класс обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$y'' = F(x, y, y'), \tag{1}$$

где F — рациональная функция от y и y' и мероморфная функция от x , и найти среди уравнений (1) те уравнения, решения которых не имеют подвижных критических особых точек. В начале XX века П. Пенлеве [65–67], его ученики Б. Гамбье [49] и Р. Гарнье [50, 51] решили задачу, поставленную Фуксом и Пикаром. Они нашли 50 канонических уравнений вида (1) с решениями, не имеющими подвижных критических особых точек. При этом решения 44-х уравнений из этих 50-ти выражались

через известные (элементарные или специальные) функции, а решения оставшихся шести уравнений определяли новые специальные функции, которые теперь называются *трансцендентами Пенлеве*.

Шестое уравнение Пенлеве впервые было опубликовано в работе Р. Фукса [48]. Оно имеет вид

$$y'' = \frac{(y')^2}{2} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-x} \right) - y' \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-x} \right) + \frac{y(y-1)(y-x)}{x^2(x-1)^2} \left[a + b \frac{x}{y^2} + c \frac{x-1}{(y-1)^2} + d \frac{x(x-1)}{(y-x)^2} \right], \quad (2)$$

где a, b, c, d — комплексные параметры, x и y — комплексные переменные, $y' = dy/dx$. Оно имеет три особые точки $x = 0$, $x = 1$ и $x = \infty$ и обозначается как Р6. Э. Пикар [69] нашел его решения в явном виде при определенных значениях четырех параметров: $a = b = c = 0$, $d = 1/2$. Р. Гарнье [51] изучал его решения без ограничений на параметры.

Новая волна интереса к уравнениям Пенлеве возникла в 70-е годы XX века после обнаружения М. Абловицем, А. Рамани и Х. Сегуром [1, 42, 43] связи интегрируемых нелинейных уравнений в частных производных с уравнениями Пенлеве (см. также [35, 37]). Так, шестое уравнение Пенлеве является редукцией уравнения Эрнста из общей теории относительности. В настоящее время для уравнений Пенлеве рассматриваются задачи: об асимптотическом поведении их решений вблизи особых точек; локальные и глобальные свойства решений; рациональные и алгебраические решения; дискретизация; приложения уравнений Пенлеве (в основном в физике).

Здесь изучаются асимптотические разложения решений шестого уравнения Пенлеве (2) в его особых точках $x = 0, 1, \infty$. Разложения в неособых точках описаны в [54, § 46], и с помощью степенной геометрии — в [13, 24]. Подобные исследования проводились многими авторами. С. Шимомура [73–76], М. Джимбо [61], Х. Кимура [62], К. Окамото [64] доказали разными методами существование и сходимости двупараметрических семейств разложений решений шестого уравнения Пенлеве. В книге В. Громака, И. Лэйне, С. Шимомуры [54, § 46] описаны асимптотические разложения его решений по целым степеням независимой переменной. При специальных значениях параметров шестого уравнения Пенлеве Б. Дубровин и М. Мацокко [46, 63], а также Д. Гуцетти [55] получили первые несколько членов некоторых нестепенных и экзотических асимптотик. Сравнения их результатов с нашими приведены в конце Введения и в § 2 гл. 4.

Изучение асимптотических разложений и асимптотик решений уравнений Пенлеве вблизи особых точек состоит из трех следующих этапов.

Этап 1. Нахождение формальных решений в виде асимптотических разложений

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x), \quad (3)$$

где $\varphi_{k+1}(x) = o(\varphi_k(x))$, и формальных асимптотик

$$y \sim \sum_{k=0}^m \varphi_k(x), \quad (4)$$

где остаточный член есть $o(\varphi_m(x))$.

Этап 2. Доказательство существования решения с асимптотическим разложением (3) или асимптотикой (4). Причем такое решение может быть не единственным.

Этап 3. Установление связи между асимптотиками одного решения вблизи разных особых точек уравнения. Особенно — между произвольными постоянными семейств асимптотических разложений.

Основной результат настоящей работы: при всех значениях четырех комплексных параметров a, b, c, d найдены все те формальные решения (3) уравнения (2) вблизи трех его особых точек $x = 0, 1, \infty$, которые можно получить с помощью плоской степенной геометрии.

Согласно [21–23] трехмерная степенная геометрия позволяет получить такие асимптотики решений первых четырех уравнений Пенлеве (в частности, эллиптические), которые не отлавливаются посредством двумерной степенной геометрии. Возможно, что такая же ситуация и с Р6. Но это — тема для отдельной работы.

Вопрос о существовании решения с найденным формальным разложением обсуждается в § 7 гл. 1 с общих позиций. Это также тема отдельной работы. К настоящему времени не для всякого формального решения (3) найдено соответствующее фактическое решение. Но не известно ни одного контрпримера, когда формальному решению (3) не соответствует фактическое решение.

Для большинства формальных решений или асимптотик решений уравнений Пенлеве, найденных ранее кустарными способами, доказано существование фактических решений (также кустарными способами).

Вопрос о связи между асимптотиками одного решения в разных особых точках уравнения Р6 (т. е. этап 3) в данной работе не рассматривается. Это также тема для отдельной работы.

В дальнейшем под асимптотическим разложением решений уравнения (2) понимается разложение его формального решения.

При $x \rightarrow 0$ рассмотрим асимптотические разложения решений уравнения (2) вида

$$y = c_r x^r + \sum_s c_s x^s, \tag{5}$$

где показатели степени r и s — комплексные числа, $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} r$, $\operatorname{Re} s$ возрастают.

Будем различать три типа разложений (5); в них конечно число показателей s с одинаковой вещественной частью $\operatorname{Re} s$:

Тип 1. c_r и c_s — постоянные (*степенные разложения*).

Тип 2. c_r — постоянный, c_s — многочлены от $\ln x$ (*степенно-логарифмические разложения*).

Тип 3. c_r и c_s — степенные ряды по убывающим степеням $\ln x$ (*сложные разложения*).

Кроме того, будем различать три типа разложений вида

$$y = \sum_\rho c_\rho x^\rho + \sum_s c_s x^s, \tag{6}$$

где все $\operatorname{Re} \rho$ одинаковы, $\operatorname{Re} \rho < \operatorname{Re} s$, первая сумма содержит больше одного слагаемого, коэффициенты c_ρ и c_s — многочлены от $\ln x$:

Тип 4. Первая сумма в (6) содержит конечное число слагаемых. Для крайних значений $\text{Im } \rho$ коэффициенты c_ρ постоянны. В таких разложениях конечно число показателей s с одинаковой вещественной частью $\text{Re } s$ (*полуэкзотические разложения*).

Пусть $\min(\text{Im } \rho)$ в (6) достигается при $\rho = \rho_*$, а $\max(\text{Im } \rho)$ — при $\rho = \rho^*$. Полуэкзотическое разложение (6) имеет два обратных разложения

$$(y^{-1})_* = c_{\rho_*}^{-1} x^{-\rho_*} \left(\sum_{\sigma} b_{\sigma} x^{\sigma} + \sum_t b_t x^t \right), \quad (7)$$

и

$$(y^{-1})^* = c_{\rho^*}^{-1} x^{-\rho^*} \left(\sum_{\sigma} \tilde{b}_{\sigma} x^{\sigma} + \sum_t \tilde{b}_t x^t \right), \quad (8)$$

где $\text{Re } \sigma = 0$.

Тип 5. Первая сумма в (6) имеет бесконечное число слагаемых, но $\text{Im } \rho$ ограничено либо снизу, либо сверху. Для крайнего значения $\text{Im } \rho$ коэффициент $c_\rho = \text{const} \in \mathbb{C}$ (*экзотические разложения*).

Экзотическое разложение (6) имеет в качестве обратного одно из разложений (7) или (8).

Тип 6. Первая сумма в (6) содержит бесконечное число слагаемых и значения $\text{Im } \rho$ не ограничены с обеих сторон (*сверхэкзотические разложения*).

Впрочем, в уравнениях Пенлеве разложения типа 6 не встречаются.

Кроме того, предполагаем, что аргумент комплексной переменной x ограничен с двух сторон.

Аналогично определяются типы асимптотических разложений при $x \rightarrow 1$ и $x \rightarrow \infty$.

Уравнение (2) имеет три симметрии, переводящие особые точки друг в друга. Поэтому сначала решается задача вблизи $x = 0$, а затем с помощью симметрий получаются асимптотические разложения решений вблизи $x = \infty$ и $x = 1$.

Работа состоит из пяти глав. В *главе 1* излагаются методы и результаты плоской степенной геометрии [2–26, 44], которые используются в этой работе. Первый член асимптотического разложения (5) вычисляется из укороченного уравнения, состоящего из тех членов исходного уравнения, которые являются ведущими для этого разложения (вносят больший вклад в окрестности рассматриваемой точки). Эти уравнения выделяются при помощи графиков. Показатели степени s дальнейших членов разложения $c_s x^s$ находятся алгоритмически. Для этого используется первая вариация укороченного уравнения. Коэффициенты c_s вычисляются последовательно. В § 1 описывается методика выделения укороченных уравнений и построение степенных асимптотик решений исходного уравнения. В § 2 излагаются алгоритмы вычисления показателей степени всех членов асимптотического разложения, имеющих первым членом степенную функцию, и коэффициентов такого разложения. В § 3 рассматривается вопрос существования нестепенных асимптотик решений исходного уравнения и описывается алгоритм их нахождения. В § 4 предлагается способ вычисления сложных разложений (разложений с нестепенной асимптотикой). В § 5 определяются

экзотические и полужэкзотические разложения и описывается методика их вычислений. В § 6 указываются экспоненциальные асимптотики и добавки к разложениям типов 1, 2, 4, которые не встречаются для уравнения P6. В § 7 приведены результаты о существовании фактического решения, имеющего формальное решение в качестве своего асимптотического разложения. Там сформулирована общая теорема о сходимости степенного разложения и впервые дано ее доказательство для частного случая.

В главе 2 для шестого уравнения Пенлеве при $a \cdot b \neq 0$, $x \rightarrow 0$ и $x \rightarrow \infty$ ищутся асимптотические разложения всех пяти типов. В § 1 уравнение (2) записывается в виде дифференциальной суммы. Для этого оно умножается на $2x^2(x-1)^2y(y-1)(y-x)$ и правая часть переносится влево. Получается уравнение

$$f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} 2y''x^2(x-1)^2y(y-1)(y-x) - (y')^2[x^2(x-1)^2y(y-1)(y-x) + x^2(x-1)^2y(y-x) + x^2(x-1)^2y(y-1)] + 2y'[x(x-1)^2y \times (y-1)(y-x) + x^2(x-1)y(y-1)(y-x) + x^2(x-1)^2y(y-1)] - [2ay^2(y-1)^2(y-x)^2 + 2bx(y-1)^2(y-x)^2 + 2c(x-1)y^2(y-x)^2 + 2dx(x-1)y^2(y-1)^2] = 0. \tag{9}$$

Затем исследуются основные свойства уравнения (9): многоугольник уравнения, симметрии и исключительные решения: $\mathcal{I}_1 : y = 0$ при $b = 0$, $\mathcal{I}_2 : y = 1$ при $c = 0$, $\mathcal{I}_3 : y = x$ при $d = 1/2$, $\mathcal{I}_4 : y = \infty$ при $a = 0$. Многоугольник уравнения (9) и обозначения семейств асимптотических разложений, соответствующих вершинам и ребрам многоугольника, показаны на рис. 1.

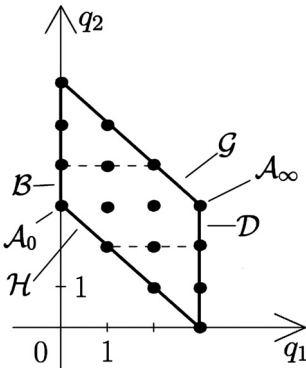


Рис. 1. Многоугольник уравнения (9) и обозначения семейств разложений, соответствующих его вершинам и ребрам при $a \cdot b \neq 0$

В § 2 изучаются асимптотические разложения (5) решений вблизи нуля, соответствующие вершинам многоугольника. Показано, что они имеются только для вершины с координатами $(q_1, q_2) = (0, 3)$. Основной результат:

Теорема 2.2.1. При $x \rightarrow 0$ существует двумерное (по c_r и r) семейство разложений решений с постоянными коэффициентами, определенное формулой

$$\mathcal{A}_0 : y = c_r x^r + \sum_s c_s x^s, \tag{2.2.6}$$

где комплексные показатели степени таковы: r — произвольный с $\text{Re } r \in (0, 1)$, $s \in \{r + lr + m(1-r)l, m \geq$

$\geq 0; l + m > 0; l, m \in \mathbb{Z}\}$; комплексные коэффициенты таковы: c_r — произвольная ненулевая комплексная постоянная, остальные c_s постоянны и однозначно определены.

Разложения (2.2.6) сходятся для малых $|x|$. Семейство \mathcal{A}_0 и его сходимость были известны [60–62, 64, 73–78]. Семейство \mathcal{A}_0 существует при всех значениях параметров и исчерпывает все разложения, соответствующие вершине $(0, 3)$.

В § 3 изучаются асимптотические разложения решений вблизи нуля, соответствующие левому вертикальному ребру многоугольника (рис. 1). Для удобства читателя основной результат можно сформулировать так (более подробно, чем в тексте гл. 2):

Теорема 2.3.1. (а) При $x \rightarrow 0$ и $a \neq 0$ существуют 2 дупараметрических (по C_{11} и ρ) семейства экзотических разложений решений с постоянными коэффициентами, определенные формулой

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_0^r: \quad y &= \frac{\rho^2}{\beta \cos^2[\ln(C_{11}x)^\gamma] + \alpha \sin^2[\ln(C_{11}x)^\gamma]} + \sum_{\operatorname{Re} s \geq 1} c_s x^s = \\ &= x^\rho \left(c_\rho + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{c}_k x^{k\rho} \right) + \sum_{\operatorname{Re} s \geq 1} c_s x^s, \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

где $\rho \neq 0$ — произвольная чисто мнимая постоянная, $s \in \{\rho + l\rho + m(1 - \rho); l, m \geq 0; l + m > 0; l, m \in \mathbb{Z}\}$, $\tau = \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} \rho)$, $\alpha + \beta = (\rho^2 - 2c + 2a)/(2a)$, $\alpha\beta = \rho^2/(2a)$, $2\gamma = i\rho$, c_ρ и C_{11} — ненулевые произвольные комплексные постоянные, связанные между собой, \tilde{c}_k и c_s постоянны и однозначно определены. При этом семейства обратных разложений $y^{-1}(x)$ для семейств \mathcal{B}_0^+ и \mathcal{B}_0^- совпадают.

(б) При $0 \neq a \neq c \neq 0$ и $x \rightarrow 0$ существуют однопараметрические семейства разложений \mathcal{B}_i и \mathcal{B}_i^r , $i = 1, 2$, $\tau = \pm 1$, которые в зависимости от комплексных значений $\theta_1 = \sqrt{2c} - \sqrt{2a}$ и $\theta_2 = \sqrt{2c} + \sqrt{2a}$ определяются одной из формул (2.3.14), (2.3.18), (2.3.19), приведенных ниже.

Если $\operatorname{Re} \theta_i = 0$, то семейства \mathcal{B}_i^r определяются формулой

$$\mathcal{B}_i^r: \quad y = c_{0i} + \sum_s c_{si} x^s = \frac{c_{0i}}{1 - C_7 x^{\tau\theta_i}} + \sum_{\operatorname{Re} s \geq 1} c_{si} x^s, \quad (2.3.14), (2.3.40)$$

где $s \in \{l + m\tau\theta_i; l, m \in \mathbb{Z}; l, m \geq 0; l + m > 0\}$, комплексные коэффициенты:

$$c_{0i} = 1 + (-1)^i \sqrt{c/a}, \quad (2.3.6)$$

C_7 — произвольная постоянная, остальные c_{si} постоянны и однозначно определены.

Пусть $\operatorname{Re} \theta_i \neq 0$ и $k_i = \theta_i \cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{Re} \theta_i)$.

Если $\operatorname{Re} \theta_i \neq 0$ и $\theta_i \notin \mathbb{Z}$, то семейство \mathcal{B}_i определяется формулой

$$\mathcal{B}_i: \quad y = c_{0i} + \sum_s c_{si} x^s, \quad (2.3.18)$$

где s пробегает множество $\{l + mk_i, l, m \in \mathbb{Z}, l, m \geq 0, l + m > 0\}$, комплексные коэффициенты таковы: c_{0i} определен формулой (2.3.6), c_{k_i} — произвольный, остальные c_{si} постоянны и однозначно определены.

Если $\theta_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, то семейство \mathcal{B}_i определяется формулой

$$\mathcal{B}_i: \quad y = c_{0i} + \sum_{s=1}^{\infty} c_{si} (\ln x) x^s, \quad (2.3.19)$$

где коэффициенты таковы: c_{0i} определен формулой (2.3.6), c_{si} с $s < k_i$ — постоянны, $c_{k_i} = \alpha_{k_i} + \beta_{k_i} \ln x$, α_{k_i} — произвольная постоянная, коэффициент β_{k_i} — постоянный и однозначно определенный, остальные c_{si} с $s > k_i$ — многочлены от $\ln x$, которые однозначно определяются.

В случае $C_7 = 0$ разложения (2.3.14) являются целыми, т. е. $s \in \mathbb{Z}$, их семейство обозначается \mathcal{B}_i . Оно совпадает с подсемейством семейства (2.3.18) при $c_{k_i} = 0$, т. е. при $m = 0$.

Семейство \mathcal{B}_2 существует также при $a = c \neq 0$.

(в) При $a \cdot c \neq 0$ и $x \rightarrow 0$ существуют однопараметрические семейства сложных разложений. А именно:

семейство \mathcal{B}_3 , которое существует при $a \neq c$ и определяется формулами

$$\mathcal{B}_3: \quad y = \psi_0 + \sum_{\sigma=1}^{\infty} \psi_{\sigma} x^{\sigma}, \quad (2.3.30)$$

где

$$\psi_0 = \frac{2}{c-a} \frac{1}{\ln^2 x} + \frac{c_{-3}}{\ln^3 x} + \sum_{s=4}^{\infty} \frac{c_{-s}}{\ln^s x} = \frac{2(c-a)}{(c-a)^2(\ln x + C_3)^2 - 2a}, \quad (2.3.28)$$

комплексные коэффициенты таковы: c_{-3} и C_3 — произвольные постоянные, остальные c_{-s} постоянны и однозначно определены; ψ_{σ} — ряды по убывающим степеням логарифмов;

семейства \mathcal{B}_4 и \mathcal{B}_5 , которые существуют при $a = c \neq 0$ и определяются формулами

$$\mathcal{B}_{3+j}: \quad y = \psi_{0j} + \sum_{\sigma=1}^{\infty} \psi_{\sigma j} x^{\sigma}, \quad j = 1, 2, \quad (2.3.58)$$

где

$$\psi_{0j} = (-1)^j \frac{1}{\sqrt{2a}} \frac{1}{\ln x} + \frac{c_{-2j}}{\ln^2 x} + \sum_{s=3}^{\infty} \frac{c_{-sj}}{\ln^s x} = \frac{(-1)^j}{\sqrt{2a} \ln x + C_3}, \quad j = 1, 2, \quad (2.3.57)$$

комплексные коэффициенты таковы: c_{-2j} (т. е. C_3) — произвольная постоянная, остальные c_{-sj} постоянны и однозначно определены; $\psi_{\sigma j}$ — ряды по убывающим степеням логарифмов.

(г) При $a \neq 0$, $c = 0$ и $x \rightarrow 0$ существуют однопараметрические семейства разложений \mathcal{B}_6 , \mathcal{B}_6^{τ} , $\tau = \pm 1$, которые определяются формулой

$$y = 1 + c_{\rho} x^{\rho} + \sum_s c_s x^s, \quad (2.3.71)$$

где $\rho = \sqrt{2a}$ с $\operatorname{Re} \sqrt{2a} > 0$ (семейство степенных разложений \mathcal{B}_6) или $c \operatorname{Re} \sqrt{2a} = 0$ (семейства экзотических разложений \mathcal{B}_6^{τ}), s пробегает множество $\{\rho + l\rho + m; l, m \geq 0; l + m > 0; l, m \in \mathbb{Z}\}$, комплексные коэффициенты: c_{ρ} — ненулевая произвольная постоянная, все c_s постоянны и однозначно определены.

Семейства \mathcal{B}_6^{τ} с $\tau = \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} \rho)$ имеют также вид

$$y = \frac{1}{1 - c_{\rho} x^{\rho}} + \sum_{\operatorname{Re} s \geq 1} c_s x^s.$$

Ряды (2.3.18) и (2.3.71) сходятся для достаточно малых $|x|$. Семейства $\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_6$, \mathcal{B}_0^{τ} , \mathcal{B}_1^{τ} , \mathcal{B}_2^{τ} , \mathcal{B}_6^{τ} , где $\tau = \pm 1$, исчерпывают все разложения, соответствующие левому вертикальному ребру многоугольника (рис. 1). Для семейств \mathcal{B}_1 , \mathcal{B}_2 были известны только подсемейства с постоянными коэффициентами и целыми показателями степени [54]. Семейства \mathcal{B}_0^{τ} , \mathcal{B}_1^{τ} , \mathcal{B}_2^{τ} , \mathcal{B}_6^{τ} , $\mathcal{B}_3 - \mathcal{B}_6$ — новые. Семейства \mathcal{A}_0 , $\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_6$, \mathcal{B}_0^{τ} , \mathcal{B}_1^{τ} , \mathcal{B}_2^{τ} , \mathcal{B}_6^{τ} являются базовыми. С помощью основных симметрий уравнения (2) из них получаются другие семейства разложений. В § 4 при $x \rightarrow 0$ из базовых семейств

разложений \mathcal{B}_1 – \mathcal{B}_6 , \mathcal{B}_0^r , \mathcal{B}_1^r , \mathcal{B}_2^r , \mathcal{B}_6^r с помощью симметрии уравнения получаются семейства \mathcal{H}_1 – \mathcal{H}_6 , \mathcal{H}_0^r , \mathcal{H}_1^r , \mathcal{H}_2^r , \mathcal{H}_6^r , соответствующие нижнему наклонному ребру многоугольника (рис. 1). В § 5 из асимптотических разложений решений при $x \rightarrow 0$, образующих семейства \mathcal{A}_0 , \mathcal{B}_1 – \mathcal{B}_6 , \mathcal{B}_0^r , \mathcal{B}_1^r , \mathcal{B}_2^r , \mathcal{B}_6^r , \mathcal{H}_1 – \mathcal{H}_6 , \mathcal{H}_0^r , \mathcal{H}_1^r , \mathcal{H}_2^r , \mathcal{H}_6^r , с помощью другой симметрии уравнения получаются семейства асимптотических разложений \mathcal{A}_∞ , \mathcal{G}_1 – \mathcal{G}_6 , \mathcal{G}_0^r , \mathcal{G}_1^r , \mathcal{G}_2^r , \mathcal{G}_6^r , \mathcal{D}_1 – \mathcal{D}_6 , \mathcal{D}_0^r , \mathcal{D}_1^r , \mathcal{D}_2^r , \mathcal{D}_6^r при $x \rightarrow \infty$.

В главе 3 для шестого уравнения Пенлеве при $a = 0$, $b \neq 0$ и $a \neq 0$, $b = 0$ ищутся асимптотические разложения всех пяти типов: степенные, степенно-логарифмические, сложные, полуэкзотические и экзотические. В § 1 обсуждаются в каждом из случаев $a = 0$, $b \neq 0$ и $a \neq 0$, $b = 0$ свойства уравнения: многоугольник и симметрии. Так, при $a = 0$, $b \neq 0$ многоугольник уравнения показан на рис. 2.

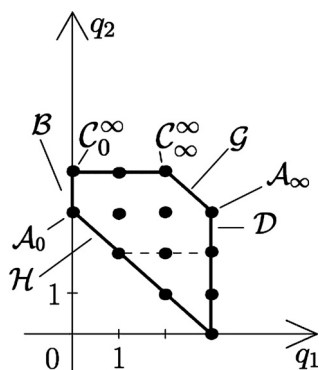


Рис. 2. Многоугольник уравнения (9) и обозначения семейств разложений, соответствующих его вершинам и ребрам при $a = 0$, $b \neq 0$

В § 2 при $a = 0$, $b \neq 0$ изучаются асимптотические разложения решений вблизи нуля (отличные от разложений, имеющих в случае $a \cdot b \neq 0$), соответствующие вершине $(0, 4)$. Основным результатом:

Теорема 3.2.1. При $x \rightarrow 0$ и $a = 0$, $c \neq 0$ существует однопараметрическое семейство степенных разложений решений C_0^∞ , которое определяется формулой

$$C_0^\infty : y = c_r x^r + \sum_s c_s x^s, \quad (3.2.8)$$

где $r = \sqrt{2c}$ с $\operatorname{Re} \sqrt{2c} < 0$, s пробегает множество $\{r - lr + m; l, m \geq 0; l + m > 0; l, m \in \mathbb{Z}\}$, комплексные коэффициенты: c_r — ненулевая произвольная постоянная, все c_s постоянны и однозначно определены.

Семейство C_0^∞ исчерпывает все разложения, соответствующие вершине $(0, 4)$ (рис. 2). В § 3 при $a = 0$, $b \neq 0$ показано отсутствие асимптотических разложений решений вблизи нуля, соответствующих горизонтальному ребру (рис. 2). В § 4 при $a = 0$, $b \neq 0$ изучаются асимптотические разложения решений вблизи нуля, отличные от разложений, имеющих в случае $a \cdot b \neq 0$, и соответствующие вертикальному ребру. Основным результатом:

Теорема 3.4.1. (а) При $x \rightarrow 0$ и $a = 0$ существуют два двупараметрических (по C_{11} и ρ) семейства экзотических разложений решений с постоянными комплексными коэффициентами

$$\mathcal{B}_7^r : y = \frac{\rho^2}{2c - \rho^2} \frac{1}{\sin^2 [\ln (C_{11}x)^\gamma]} + \sum_{\operatorname{Re} s \geq 1} c_s x^s, \quad (3.4.3)$$

где ρ — произвольная чисто мнимая постоянная, $\rho^2 \neq 2c$, $\tau = \operatorname{sgn} (\operatorname{Im} \rho)$, $s \in \{\rho + l\rho + m(1 - \rho), l, m \geq 0; l + m > 0; l, m \in \mathbb{Z}\}$, $2\gamma = i\rho$, C_{11} — ненулевая произвольная постоянная, c_s постоянны и однозначно определены. При этом семейства обратных разложений $y^{-1}(x)$ для семейств \mathcal{B}_7^+ и \mathcal{B}_7^- совпадают.

(б) При $x \rightarrow 0$ и $a = 0$, $c \neq 0$ существуют два однопараметрических семейства степенных разложений решений

$$\mathcal{B}_{8,9}: \quad y = c_\rho x^\rho + \sum_{\operatorname{Re} s \geq 1} c_s x^s, \quad (3.4.6)$$

где ρ — чисто мнимая постоянная, $\rho^2 = 2c$, $\operatorname{Im} \rho > 0$ для семейства \mathcal{B}_8 и $\operatorname{Im} \rho < 0$ для семейства \mathcal{B}_9 , $s \in \{\rho + l(1 - \rho) + m, l, m \geq 0; l + m > 0; l, m \in \mathbb{Z}\}$, комплексные коэффициенты таковы: c_ρ — ненулевая произвольная постоянная, c_s постоянны и однозначно определены.

(в) При $x \rightarrow 0$ и $a = c = 0$ существует однопараметрическое семейство степенных разложений решений с постоянными комплексными коэффициентами

$$\mathcal{B}_{10}: \quad y = c_0 + \sum_{s=1}^{\infty} c_s x^s, \quad (3.4.22)$$

где $c_0 \neq 0, 1$ — произвольная постоянная, c_s постоянны и однозначно определены.

При $a = 0 \neq c$ имеется однопараметрическое семейство сложных разложений \mathcal{B}_3 . Семейства \mathcal{B}_3 , \mathcal{B}_8 – \mathcal{B}_{10} , \mathcal{B}_7^r исчерпывают разложения, соответствующие левому вертикальному ребру (рис. 2). Ряды (3.2.8) и (3.4.22) сходятся для достаточно малых $|x|$. Семейство \mathcal{C}_0^∞ для целых r и семейство \mathcal{B}_{10} известны [54].

Семейства \mathcal{C}_0^∞ , \mathcal{B}_8 – \mathcal{B}_{10} , \mathcal{B}_7^r также являются базовыми. С помощью симметрий уравнения (2) из 21 базового семейства \mathcal{A}_0 , \mathcal{C}_0^∞ , \mathcal{B}_1 – \mathcal{B}_6 , \mathcal{B}_8 – \mathcal{B}_{10} , \mathcal{B}_0^r – \mathcal{B}_2^r , \mathcal{B}_6^r , \mathcal{B}_7^r получаются все остальные семейства разложений решений в окрестностях всех трех особых точек. Вблизи каждой особой точки имеем $20 \cdot 2 + 1 = 41$ семейство разложений и всего $3 \cdot 41 = 123$ семейства. Однако среди них три раза (вблизи точек $x = 0, 1, \infty$) встретятся семейства обратных разложений $y^{-1}(x)$ к разложениям \mathcal{B}_0^r и \mathcal{B}_7^r . Согласно теоремам 2.3.1 (а) и 3.4.1 (а) эти обратные разложения образуют по одному семейству для обоих значений τ . Поэтому число различных семейств уменьшается на 6, т. е. равно 117.

В табл. 1 показано существование базовых семейств \mathcal{C}_0^∞ , \mathcal{B}_1 – \mathcal{B}_6 , \mathcal{B}_8 – \mathcal{B}_{10} , \mathcal{B}_0^r – \mathcal{B}_2^r , \mathcal{B}_6^r – \mathcal{B}_7^r в зависимости от значений параметров уравнения. В § 5 при $a = 0$, $b \neq 0$ с помощью симметрии из базовых семейств разложений \mathcal{C}_0^∞ , \mathcal{B}_1 – \mathcal{B}_6 , \mathcal{B}_8 – \mathcal{B}_{10} , \mathcal{B}_0^r – \mathcal{B}_2^r , \mathcal{B}_6^r – \mathcal{B}_7^r получаются семейства асимптотических разложений решений $\mathcal{C}_\infty^\infty$, \mathcal{G}_1 – \mathcal{G}_6 , \mathcal{G}_8 – \mathcal{G}_{10} , \mathcal{G}_0^r – \mathcal{G}_2^r , \mathcal{G}_6^r – \mathcal{G}_7^r вблизи бесконечности (отличные от семейств разложений, имеющих в случае $a \cdot b \neq 0$), соответствующие вершине и наклонному ребру. В § 6 подводятся итоги и обсуждаются результаты, полученные в случае $a = 0$, $b \neq 0$. В § 7 из случая $a = 0$, $b \neq 0$ с помощью одной из симметрий уравнения (2) получаются разложения решений в случае $b = 0$, $a \neq 0$.

В главе 4 рассматривается случай, когда в уравнении Р6 параметры $a = b = 0$. Она не содержит новых результатов. В § 1 перечислены асимптотические разложения, сохранившиеся из случаев $a = 0$, $b \neq 0$ и $a \neq 0$, $b = 0$. В § 2 приведены примеры, даны сравнения наших результатов с результатами Мацокко [63] и указана ее ошибка.

В главе 5 с помощью симметрий уравнения Р6 из асимптотических разложений решений в окрестности нуля получаются асимптотические разложения решений в окрестности единицы.

Таблица 1

Зависимость существования базовых семейств \mathcal{B} и \mathcal{C} от значений параметров a и c

$0 \neq a \neq c \neq 0$	$a = c \neq 0$	$a \neq 0 = c$	$a = 0 \neq c$	$a = c = 0$
\mathcal{B}_0^r	\mathcal{B}_0^r	\mathcal{B}_0^r	\mathcal{B}_7^r	\mathcal{B}_7^r
$\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1^r$	\mathcal{B}_4	\mathcal{I}_2	$\mathcal{C}_0^\infty, \mathcal{I}_4$	\mathcal{I}_2
$\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2^r$	$\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2^r$	$\mathcal{B}_6, \mathcal{B}_6^r$	$\mathcal{B}_8, \mathcal{B}_9$	\mathcal{I}_4
\mathcal{B}_3	\mathcal{B}_5	\mathcal{B}_3	\mathcal{B}_3	\mathcal{B}_{10}

Здесь получены все «плоские» асимптотические разложения решений уравнения (9), так как либо каждое «плоское» укороченное уравнение решается в явном виде, либо доказывается, что оно не имеет нужных решений; это дает нам все асимптотики решений, которые получаются методами плоской степенной геометрии. Каждая асимптотика продолжается всеми возможными разложениями.

Дадим краткий обзор результатов предшественников и их сравнение с описанными выше результатами этой работы. В 1982 г. Шимомура [74] доказал существование и сходимости разложений семейства \mathcal{A}_0 в секторах комплексной плоскости, а Джимбо [61] вывел формулы связи семейств $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1$ и \mathcal{A}_∞ , предполагая, что параметры a, b, c, d находятся в общем положении. В 2000 г. Дубровин и Мацокко [46] в случае $b = c = d - 1/2 = 0, a = (2\mu - 1)^2/2, 2\mu \notin \mathbb{Z}$ нашли формулы связи для семейства \mathcal{A}_0 . В 2001 г. Мацокко [63] в случае $b = c = d - 1/2 = 0, a = (2\mu - 1)^2/2, 2\mu \in \mathbb{Z}$ нашла семейство \mathcal{A}_0 и асимптотики части семейств \mathcal{B}_0^r (как решения Пикара), а также — логарифмические асимптотики сложного семейства \mathcal{B}_3 (как решения Шази). Подробнее см. § 2 гл. 4. Для этих асимптотик она указала формулы связи. В 2001 г. Гуцетти [55] рассмотрел случай $b = c = d - 1/2 = 0, a \in \mathbb{C}$. Он ввел свое «эллиптическое представление» решений уравнения P6 и показал, что все предыдущие результаты Дубровина и Мацокко выводятся с помощью эллиптического представления. В 2002 г. Гуцетти [56] с помощью эллиптического представления для всех значений параметров a, b, c, d получил асимптотики семейств \mathcal{A}_0 и \mathcal{H}_0^r , а также формулы связи для них. В 2006 г. Гуцетти [57] показал, что все предыдущие результаты Шимомуры, Джимбо, Дубровина и Мацокко выводятся с помощью эллиптического представления. В [58, теорема 1] он нашел все решения, которые разлагаются в ряд Тейлора. В наших обозначениях они содержатся в семействах $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_6$ и \mathcal{B}_{10} при определенных соотношениях на параметры уравнения и при нулевых значениях некоторых произвольных постоянных.

В 2008 г. Гуцетти [59] находит логарифмические асимптотики семейств $\mathcal{H}_3, \mathcal{H}_4$ и \mathcal{H}_5 и формулы связи для них.

Аннотации некоторых результатов этой работы опубликованы в статьях [12, 14, 15, 25, 30] и в тезисах докладов [28, 29, 31, 32, 41, 52, 53]. Подробные изложения основных результатов содержатся в препринтах [16–20, 26, 33]. В настоящей статье разбиение на семейства, их количество и обозначения отличаются от указанных предшествующих публикаций, ибо теперь используется другое определение экзотического разложения согласно препринту [11] (здесь — § 5 гл. 1). В частности,

теперь все экзотические разложения относятся к ребрам, а раньше некоторые из них относились к вершинам.

Нумерация лемм, теорем, следствий, замечаний и формул в каждой главе своя: первое число в их номере — это номер главы, второе число — номер параграфа. Нумерация таблиц и рисунков сквозная по всей работе.

Глава 1. Вычисление асимптотических разложений решений обыкновенных дифференциальных уравнений

В этой главе излагаются те методы и результаты плоской степенной геометрии [2–27, 44], которые используются в этой работе. Методы степенной геометрии применимы к весьма широкому классу уравнений и систем. Уравнения Пенлеве относятся к сравнительно узкому классу уравнений со своей спецификой. В частности, эта специфика проявляется в том, что степенные асимптотики решений имеют не более одного критического числа и в разложениях отсутствуют кратные логарифмы. Поэтому здесь излагаются только случаи, соответствующие не более чем одному критическому числу и некратному логарифму.

§ 1. Степенные асимптотики решений

1.1. Основные определения и постановка задачи. Пусть x — независимая и y — зависимая переменные, $x, y \in \mathbb{C}$. Положим $X = (x, y)$.

Дифференциальным мономом $a(X)$ называется произведение обычного монома

$$cx^{r_1}y^{r_2}, \tag{1.1.1}$$

где $c = \text{const} \in \mathbb{C}$, $R = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2$, и конечного числа производных вида

$$\frac{d^l y}{dx^l}, \quad l \in \mathbb{N}. \tag{1.1.2}$$

Сумма дифференциальных мономов

$$f(X) = \sum a_i(X) \tag{1.1.3}$$

называется *дифференциальной суммой*.

Пусть задано обыкновенное дифференциальное уравнение

$$f(X) = 0, \tag{1.1.4}$$

где $f(X)$ — дифференциальная сумма, в которую y входит в целых степенях. Положим

$$\omega = \begin{cases} -1, & \text{если } x \rightarrow 0, \\ 1, & \text{если } x \rightarrow \infty. \end{cases} \tag{1.1.5}$$

Пусть $x \rightarrow 0$ или $x \rightarrow \infty$ и решение уравнения (1.1.4) имеет вид

$$y = c_r x^r + o(|x|^{r+\epsilon}), \tag{1.1.6}$$

где коэффициент $c_r = \text{const} \in \mathbb{C}$, $c_r \neq 0$, показатели степени $r, \varepsilon \in \mathbb{R}$ и $\omega\varepsilon < 0$. Тогда выражение

$$y = c_r x^r, \quad c_r \neq 0 \quad (1.1.7)$$

является *степенной асимптотикой* решения (1.1.6).

Задача 1. Для заданного уравнения (1.1.4) найти все степенные асимптотики (1.1.7) его решений вида (1.1.6).

Для решения задачи 1 степенная геометрия дает теорию и алгоритмы, основанные на выделении укороченных уравнений.

1.2. Выделение укороченных уравнений. Каждому дифференциальному моному $a(X)$ ставится в соответствие его (векторный) *показатель степени* $Q(a) = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$ по следующим правилам. Для монома вида (1.1.1) имеем $Q(cX^R) = R$, т. е. $Q(cx^{r_1}y^{r_2}) = (r_1, r_2)$; для производной (1.1.2) имеем $Q(d^l y/dx^l) = (-l, 1)$; при умножении дифференциальных мономов их показатели степени складываются как векторы: $Q(a_1 a_2) = Q(a_1) + Q(a_2)$. Множество $\mathbf{S}(f)$ показателей степеней $Q(a_i)$ всех дифференциальных мономов $a_i(X)$, входящих в дифференциальную сумму (1.1.3), называется *носителем суммы* $f(X)$. Очевидно, $\mathbf{S}(f) \in \mathbb{R}^2$. Через $f_Q(X)$ обозначим сумму тех мономов $a_i(X)$ из (1.1.3), у которых $Q(a_i) = Q$. Тогда дифференциальную сумму (1.1.3) можно записать в виде

$$f(X) = \sum f_Q(X) \quad (\text{сумма по } Q \in \mathbf{S}(f)).$$

Замыкание выпуклой оболочки $\Gamma(f)$ носителя $\mathbf{S}(f)$ называется *многоугольником суммы* $f(X)$. Граница $\partial\Gamma(f)$ многоугольника $\Gamma(f)$ состоит из вершин $\Gamma_j^{(0)}$ и ребер $\Gamma_j^{(1)}$. Их называют (обобщенными) *гранями* $\Gamma_j^{(d)}$, где верхний индекс указывает размерность грани, а нижний — ее номер. Каждой грани $\Gamma_j^{(d)}$ соответствует *укороченная сумма*

$$\widehat{f}_j^{(d)}(X) = \sum a_i(X) \quad (\text{сумма по } Q(a_i) \in \mathbf{S}(f) \cap \Gamma_j^{(d)}). \quad (1.1.8)$$

Пусть плоскость \mathbb{R}_*^2 сопряжена плоскости \mathbb{R}^2 так, что для $P = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}_*^2$ и $Q = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$ определено скалярное произведение $\langle P, Q \rangle \stackrel{\text{def}}{=} p_1 q_1 + p_2 q_2$. Каждой грани $\Gamma_j^{(d)}$ в плоскости \mathbb{R}_*^2 соответствует свой *нормальный конус*

$$\mathbf{U}_j^{(d)} = \left\{ \begin{array}{l} P : \langle P, Q \rangle = \langle P, Q' \rangle, \quad Q, Q' \in \mathbf{S}_j^{(d)}, \\ \langle P, Q \rangle > \langle P, Q'' \rangle, \quad Q'' \in \mathbf{S}(f) \setminus \mathbf{S}_j^{(d)} \end{array} \right\}.$$

Пусть вектор N_j — это внешняя нормаль к ребру $\Gamma_j^{(d)}$ (векторы обозначаются заглавными буквами). Для ребра $\Gamma_j^{(1)}$ нормальный конус — это луч, который направлен от ребра $\Gamma_j^{(1)}$ наружу многоугольника $\Gamma(f)$ и натянут на вектор N_j . Для вершины $\Gamma_j^{(0)}$ нормальный конус $\mathbf{U}_j^{(0)}$ — это открытый сектор (угол) на плоскости \mathbb{R}_*^2 с вершиной в нуле $P = 0$, ограниченный лучами, являющимися нормальными конусами ребер, примыкающих к вершине $\Gamma_j^{(0)}$.

Итак, каждой грани $\Gamma_j^{(d)}$ соответствуют: нормальный конус $U_j^{(d)}$ в \mathbb{R}_*^2 и укороченное уравнение

$$\widehat{f}_j^{(d)}(X) = 0. \tag{1.1.9}$$

Теорема 1.1.1 [3, гл. VI, теорема 1.1]. *Если уравнение (1.1.4) имеет решение (1.1.6) и $\omega(1, r) \in U_j^{(d)}$, то укорочение (1.1.7) решения (1.1.6) является решением укороченного уравнения (1.1.9).*

Поэтому для нахождения всех укороченных решений (1.1.7) уравнения (1.1.4) надо вычислить: носитель $S(f)$, многоугольник $\Gamma(f)$, все его грани $\Gamma_j^{(d)}$, нормальные конусы ребер $U_j^{(1)}$ и нормальные конусы вершин $U_j^{(0)}$. Затем для каждого укороченного уравнения (1.1.8), (1.1.9) надо найти все его решения (1.1.7) у которых один из векторов $\pm(1, r)$ лежит в нормальном конусе $U_j^{(d)}$. Если $d = 0$, то это означает, что один из векторов $\pm(1, r)$ лежит в $U_j^{(d)}$. Если $d = 1$, то это свойство всегда выполнено.

1.3. Решение укороченного уравнения. Здесь рассмотрим по отдельности два случая: вершины $\Gamma_j^{(0)}$ и ребра $\Gamma_j^{(1)}$. Вершине $\Gamma_j^{(0)} = \{Q\}$ соответствует укороченное уравнение (1.1.9) с точечным носителем Q и с $d = 0$. Положим $g(X) \stackrel{\text{def}}{=} X^{-Q} \widehat{f}_j^{(0)}(X)$, тогда решение (1.1.7) уравнения (1.1.9) удовлетворяет уравнению $g(X) = 0$. Подставляя $y = cx^r$ в $g(X)$, получаем, что $g(x, cx^r)$ не зависит от x и c и является многочленом от r , т. е. $g(x, cx^r) \equiv \chi(r)$, где $\chi(r)$ — характеристический многочлен дифференциальной суммы $\widehat{f}_j^{(0)}(X)$. Следовательно, для решения (1.1.7) уравнения (1.1.9) показатель r является корнем характеристического уравнения

$$\chi(r) \stackrel{\text{def}}{=} g(x, x^r) = 0, \tag{1.1.10}$$

а коэффициент c_r — произвольный. Из корней r_i уравнения (1.1.10) надо отобрать только те, для которых один из векторов $\omega(1, r)$, где $\omega = \pm 1$, лежит в нормальном конусе $U_j^{(0)}$ вершины $\Gamma_j^{(0)}$. При этом значение ω определяется однозначно. Соответствующие выражения (1.1.7) с произвольной константой c_r являются кандидатами на роль укороченных решений уравнения (1.1.4).

Укороченное уравнение (1.1.9) называется *алгебраическим*, если оно не содержит производных.

Замечание 1.1.1 [3]. Если укороченное уравнение (1.1.9) с $d = 0$ является алгебраическим, то оно не имеет решений вида (1.1.7). Поэтому укорочения, состоящие из одного алгебраического монома, можно не рассматривать.

Ребру $\Gamma_j^{(1)}$ соответствует укороченное уравнение (1.1.9) с $d = 1$, нормальный конус $U_j^{(1)}$ которого является лучом $\{\lambda N_j, \lambda > 0\}$. Включением $\omega(1, r) \in U_j^{(1)}$ однозначно определяются показатель степени r укороченного решения (1.1.7) и значение $\omega = \pm 1$ в (1.1.5). Для определения коэффициента c_r надо выражение (1.1.7) подставить в укороченное уравнение (1.1.9). После сокращения на некоторую степень x получаем алгебраическое *определяющее уравнение* для коэффициента c_r

$$\widetilde{f}(c_r) \stackrel{\text{def}}{=} x^{-s} \widehat{f}_j^{(1)}(x, c_r x^r) = 0. \tag{1.1.11}$$

Каждому его корню $c_r = c_{r_i} \neq 0$ соответствует свое выражение (1.1.7), которое является кандидатом на роль укороченного решения уравнения (1.1.4). При этом согласно (1.1.5) если в нормальном конусе $\mathbf{U}_j^{(1)}$ координата $p_1 < 0$, то $x \rightarrow 0$, а если $p_1 > 0$, то $x \rightarrow \infty$.

Итак, каждое укороченное уравнение (1.1.9) имеет несколько подходящих решений (1.1.7) с $\omega(1, r) \subset \mathbf{U}_j^{(d)}$. Объединим их в непрерывные по ω , r , c_r и параметрам уравнения (1.1.4) семейства.

Если нас интересуют не все решения (1.1.6) уравнения (1.1.4) а только те, у которых $\omega(1, r)$ лежит в некотором заданном конусе \mathcal{K} , то \mathcal{K} называется *конусом задачи* [3, гл. I, § 6]. Например, для укороченного уравнения (1.1.9) нормальный конус $\mathbf{U}_j^{(d)}$ является конусом задачи, если нет других ограничений.

1.4. Критические числа укороченного решения. Если найдено укороченное решение (1.1.7), то замена

$$y = c_r x^r + z \quad (1.1.12)$$

приводит уравнение (1.1.4) к виду

$$\tilde{f}(x, z) \stackrel{\text{def}}{=} f(x, c_r x^r + z) = 0, \quad (1.1.13)$$

где $\tilde{f}(x, z)$ — дифференциальная сумма, все точки $Q = (q_1, q_2)$ ее носителя $\mathbf{S}(\tilde{f})$ имеют целую неотрицательную координату q_2 . К уравнению (1.1.13) можно применить описанные выше вычисления (т.е. носителя, многоугольника, укорочений и т.д.) и получить для решения (1.1.6) следующий член разложения $c_{k_0} x^{k_0}$, у которого $k_0 > r$, если $x \rightarrow 0$, и $k_0 < r$, если $x \rightarrow \infty$. Следовательно, получилась задача 1 для уравнения (1.1.13), но теперь с конусом задачи

$$\mathcal{K} = \left\{ k = \frac{p_2}{p_1} : k\omega < r\omega, p_1\omega > 0 \right\}. \quad (1.1.14)$$

Однако во многих случаях дифференциальная сумма $\tilde{f}(x, z)$ имеет специальный вид, что позволяет существенно сократить вычисления разложений решений (1.1.6). Предположим, что уравнение (1.1.13) имеет вид

$$\tilde{f}(x, z) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}(x)z + h(x, z) = 0, \quad (1.1.15)$$

где $\mathcal{L}(x)$ — линейный дифференциальный оператор и носитель $\mathbf{S}(\mathcal{L}z)$ состоит из одной точки $(v, 1)$, являющейся вершиной $\tilde{\Gamma}_1^{(0)}$ многоугольника $\Gamma(\tilde{f})$, у всех точек $Q = (q_1, q_2)$ носителя $\mathbf{S}(h)$ координата $q_2 \geq 0$ и нет точки $Q = (v, 1)$, нормальный конус вершины $\tilde{\Gamma}_1^{(0)}$ содержит вектор $P = (p_1, p_2)$ с $p_1\omega > 0$.

По аналогии с известной в функциональном анализе производной Фреше [40] мы введем формальную *производную Фреше* (или *первую вариацию*) $\delta f(x, y)/\delta y$ дифференциальной суммы $f(x, y)$, которая обладает следующими свойствами (и определяется ими):

$$\begin{aligned} \frac{\delta(c x^{q_1} y^{q_2})}{\delta y} &= c q_2 x^{q_1} y^{q_2-1}, & \frac{\delta(d^l y/dx^l)}{\delta y} &= \frac{d^l}{dx^l}, \\ \frac{\delta(f+g)}{\delta y} &= \frac{\delta f}{\delta y} + \frac{\delta g}{\delta y}, & \frac{\delta(fg)}{\delta y} &= \left(\frac{\delta f}{\delta y} \right) g + f \left(\frac{\delta g}{\delta y} \right). \end{aligned}$$

Согласно второму свойству первая вариация — это линейный дифференциальный оператор, т. е. она имеет вид

$$\sum_{k=0}^l g_k(x, y) \frac{d^k}{dx^k}, \quad (1.1.16)$$

где $g_k(x, y)$ суть дифференциальные суммы.

Теорема 1.1.2 [4, 44]. Пусть (1.1.7) — решение укороченного уравнения (1.1.9) с $\omega(1, r) \in U_j^{(d)}$. Тогда в уравнении (1.1.15) оператор

$$\mathcal{L}(x) = \frac{\delta \widehat{f}_j^{(d)}(x, y)}{\delta y} \quad \text{на } y = c_r x^r, \quad (1.1.17)$$

т. е. равен первой вариации, вычисленной на решении (1.1.7). При этом $S(\mathcal{L}z) = (v, 1)$, где $v = \langle Q_1, (1, r) \rangle - r \in Q_1 \in \Gamma_j^{(d)}$.

Следовательно, после подстановки (1.1.13) уравнение (1.1.4) принимает вид (1.1.15), если

$$\mathcal{L}(x) \neq 0.$$

Пусть $\nu(k)$ — характеристический многочлен дифференциальной суммы $\mathcal{L}(x)z$, т. е.

$$\nu(k) = x^{-v-k} \mathcal{L}(x)x^k. \quad (1.1.18)$$

Если $\nu(k) \neq 0$, то корни k_1, \dots, k_s многочлена $\nu(k)$ называются *собственными значениями укороченного решения* (1.1.7). Те из вещественных собственных чисел k_i , которые лежат в конусе задачи, т. е. удовлетворяют неравенствам (1.1.14), называются *критическими числами*. Они играют важную роль при нахождении разложения решения (1.1.6), что будет показано в § 2.

Замечание 1.1.2. Степенное решение (1.1.7) алгебраического укороченного уравнения (1.1.9) с $d = 1$ не имеет собственных значений и критических чисел, ибо для него

$$\nu(k) \equiv \nu_0 = \text{const} = \frac{\partial \widehat{f}_j^{(1)}}{\partial y}(1, c_r).$$

Если c_r — простой корень уравнения (1.1.11), то $\nu_0 \neq 0$. Если c_r — кратный корень уравнения (1.1.11), то $\nu_0 = 0$.

Если $\mathcal{L}(x) \neq 0$, то $\nu(k) \neq 0$. Если же $\mathcal{L}(x) \equiv 0$, то для уравнения (1.1.13) с учетом конуса задачи (1.1.14) надо вычислять его решения как описано в пп. 1.2, 1.3.

1.5. Асимптотики с комплексными показателями степени. Рассмотрим решения вида

$$y = c_\rho x^\rho + o(|x|^{r+\varepsilon}), \quad c_\rho \neq 0 \quad (1.1.19)$$

с комплексным показателем $\rho = r + is$, где $\varepsilon\omega < 0$. Их асимптотики имеют вид

$$y = c_\rho x^\rho, \quad c_\rho \neq 0. \quad (1.1.20)$$

Для таких решений справедливо все сказанное в предыдущих пунктах, если $r = \text{Re } \rho$.

Уточним только, что решения вида (1.1.20) укороченного уравнения (1.1.9) возникают только для вершин $\Gamma_j^{(0)}$, т. е. для $d = 0$. В этом случае характеристическое

уравнение (1.1.10) может иметь комплексные корни, которые обозначим ρ_1, \dots, ρ_l . Подходящим корнем ρ_i является такой, для которого один из векторов $\pm(1, \operatorname{Re} \rho_i)$ лежит в нормальном конусе $U_j^{(0)}$. Если вместо (1.1.12) сделать замену

$$y = c_\rho x^\rho + z, \quad (1.1.21)$$

то дифференциальная сумма $\tilde{f}(x, z) \stackrel{\text{def}}{=} f(x, c_\rho x^\rho + z)$ будет содержать обычные мономы вида $cx^{r_1}z^{r_2}$ с комплексными r_1 . Теорема 1.1.2 сохраняется, только первую вариацию надо вычислять на решении (1.1.20). Характеристический многочлен $\nu(k)$ также определяется по (1.1.18). Его корни k_i также являются собственными значениями укороченного решения (1.1.20). Те из них, у которых вещественные части $\operatorname{Re} k_i$ лежат в конусе задачи, т. е. удовлетворяют неравенствам (1.1.14), называются критическими числами укороченного решения (1.1.20).

Для укороченного уравнения (1.1.9), соответствующего ребру $\Gamma_j^{(1)}$, ищутся только решения (1.1.7) с вещественным показателем r , который однозначно определяется нормалью к этому ребру. Решения же вида (1.1.20) с комплексным ρ , $\operatorname{Re} \rho = r$ и $\operatorname{Im} \rho \neq 0$ здесь не рассматриваем. Они будут рассмотрены ниже, в § 5.

В дальнейшем ограничимся случаем, когда имеется не более одного критического числа.

§ 2. Степенные и степенно-логарифмические разложения

2.1. Постановка задачи. Если для уравнения (1.1.15) с $\nu(k) \not\equiv 0$ искать решения в виде степенного ряда

$$z = \sum c_k x^k, \quad \omega k < \omega r, \quad (1.2.1)$$

где $c_k = \text{const} \in \mathbb{C}$, то согласно [4] такое разложение решений существует только при определенных условиях. При этом основное условие — это отсутствие критических значений. Если же не накладывать этих условий, то получаются разложения вида (1.2.1), где c_k суть многочлены от $\ln x$.

Рассмотрим уравнение (1.1.15), т. е.

$$\tilde{f}(x, z) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}(x)z + h(x, z) = 0, \quad (1.2.2)$$

где $\tilde{f}(x, z)$ — дифференциальная сумма, в которую z входит в целых неотрицательных степенях, $\mathcal{L}(x)$ — линейный дифференциальный оператор.

Задача 2. Для уравнения (1.2.2) найти все разложения его решений вида

$$z = \sum \beta_k (\ln x) x^k, \quad (1.2.3)$$

где β_k суть многочлены от $\ln x$ с комплексными коэффициентами и показатели k или $\operatorname{Re} k$ лежат в конусе задачи (1.1.14), если он есть.

2.2. Носитель разложения решения. Для определенности налагаемые в уравнении (1.2.2) наложим следующие условия.

Условие 1.2.1. Точка $(v, 1)$ является вершиной многоугольника $\Gamma(\tilde{f})$. В сумме $\tilde{f}(x, z)$ ей соответствует слагаемое $\mathcal{L}(x)z$ и только оно.

Если уравнение (1.2.2) получено из (1.1.4) и $\mathcal{L}(x) \neq 0$, то это условие выполняется автоматически. Если это условие выполнено, то дифференциальная сумма $\mathcal{L}(x)z$ имеет характеристический многочлен (1.1.18) и $\nu(k) \neq 0$.

Параллельно сдвинем носитель $\mathbf{S}(\tilde{f})$ на вектор $(-v, -1)$. Тогда вершина $(v, 1)$, соответствующая члену $\mathcal{L}(x)z$, перейдет в начало координат. Пусть задано такое число r , что для всякой точки $Q' \in S' \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{S}(\tilde{f}) - (v, 1)$ скалярное произведение $\langle \omega R, Q' \rangle \geq 0$, где $R = (1, r)$. Пусть вещественное число k_1 удовлетворяет неравенству $k_1\omega < r\omega$ из (1.1.14). Пусть $S'_+(k_1)$ — множество конечных сумм векторов $Q' \in S'$ и вектора $(k_1, -1)$. Обозначим

$$\mathbf{K}(k_1) = S'_+(k_1) \cap \{q_2 = -1\}. \tag{1.2.4}$$

Предложение 1.2.1 [8]. Множество $\mathbf{K}(k_1)$ не имеет точек накопления в \mathbb{R} , если носитель $\mathbf{S}(\tilde{f})$ не имеет точек накопления в \mathbb{R}^2 .

Предложение 1.2.2 [8]. Пусть $\Gamma_j^{(0)}$ — такая вершина многоугольника $\Gamma(f)$ уравнения (1.1.4), что соответствующее укороченное уравнение (1.1.9) имеет решение (1.1.7) с $\omega(1, r) \in \bar{U}_j^{(0)}$ и все точки сдвинутого носителя $\mathbf{S}(f) - \Gamma_j^{(0)}$ представляются в виде $\sum_{i=1}^n l_i M_i$, где целые $l_i \geq 0$, а $M_i \in \mathbb{R}^2$ — некоторые векторы. Тогда для множества \mathbf{K} уравнения (1.2.2) справедливо включение

$$\mathbf{K} \subset \left\{ k = r + \sum_{i=1}^n l_i t_i, \quad \text{целые } l_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n l_i > 0 \right\},$$

где $t_i = \langle (1, r), M_i \rangle$, $i = 1, \dots, n$. Здесь $\bar{U}_j^{(0)}$ означает замыкание конуса $U_j^{(0)}$.

Предложение 1.2.3 [8]. Если множество

$$\mathbf{K} = \left\{ k = r + \sum_{i=1}^n l_i t_i, \quad \text{целые } l_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n l_i > 0 \right\},$$

то множество (1.2.4) имеет вид

$$\mathbf{K}(k_1) = \left\{ k = r + \sum_{i=1}^n l_i t_i + m(k_1 - r), \quad \text{целые } l_i, m \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n l_i + m > 0 \right\}. \tag{1.2.5}$$

2.3. Вычисление разложений. Теорема 1.2.1 [8]. Если уравнение (1.2.2) удовлетворяет условию 1.2.1, то оно имеет формальное решение

$$z = z^*(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum \beta_k (\ln x) x^k, \quad k \in \mathbf{K}(k_1), \tag{1.2.6}$$

где $\beta_k(\ln x)$ суть многочлены от $\ln x$ и k_1 — критическое число укороченного решения (1.1.7).

Множество $\mathbf{K}(k_1)$ — это максимально возможный (теоретический) носитель разложения (1.2.6). Фактический носитель в нем содержится.

Действительно, двигаясь по точкам k множества (1.2.4) в направлении возрастания $-\omega(k - r)$, для каждого коэффициента β_k из (1.2.6) получаем линейное уравнение

$$\mathcal{L}(x)\beta_k x^k + \theta_k x^{k+v} = 0, \tag{1.2.7}$$

где θ_k — многочлен от коэффициентов β_j и их производных с $-\omega(j-r) < -\omega(k-r)$, т. е. $-\omega j < -\omega k$. Кроме того, коэффициент θ_k зависит от коэффициентов суммы h в (1.2.2). На самом деле, θ_k — это коэффициент при x^{k+v} в сумме

$$h\left(x, \sum_{-\omega r < -\omega j < -\omega k} \beta_j x^j\right). \quad (1.2.8)$$

Пусть утверждение теоремы справедливо для всех β_j с $-\omega j < -\omega k$. Тогда θ_k является многочленом от $\xi \stackrel{\text{def}}{=} \ln x$.

Лемма 1.2.1 [8]. Уравнение (1.2.7) эквивалентно линейному дифференциальному уравнению

$$\mathcal{N}_k(\xi)\beta_k(\xi) + \theta_k(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \sum \frac{1}{m!} \nu^{(m)}(k)\beta_k^{(m)}(\xi) + \theta_k(\xi) = 0, \quad (1.2.9)$$

$$\text{где } \nu^{(m)}(k) = \left. \frac{d^m \nu(q)}{dq^m} \right|_{q=k}, \quad \beta_k^{(m)} = \frac{d^m \beta_k(\xi)}{d\xi^m}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Пусть $\mu(k)$ — наименьшее значение m , для которого $\nu^{(m)}(k) \neq 0$, и $\lambda(k)$ — степень многочлена $\theta_k(\xi)$; при этом $\lambda(k) = -1$, если $\theta_k \equiv 0$.

Лемма 1.2.2 [8]. Пусть $\theta_k(\xi)$ — многочлен степени $\lambda(k)$, тогда уравнение (1.2.9) имеет решение $\beta_k(\xi)$, являющееся многочленом степени $\mu(k) + \lambda(k)$ и содержащее $\mu(k)$ произвольных коэффициентов.

Замечание 1.2.1. Зная оператор $\mathcal{L}(x)$ и носитель $\mathbf{K}(k_1)$ разложения (1.2.6), можно вычислять его коэффициенты прямо по исходному уравнению $f(x, y) = 0$, ибо коэффициент при x^k в сумме (1.2.8) совпадает с коэффициентом при x^{k+v} в сумме

$$f\left(x, c_r x^r + \sum_{-\omega r < -\omega j < -\omega k} \beta_j x^j\right).$$

Следовательно, вычислив начальный отрезок разложения

$$y = c_r x^r + \sum \beta_j x^j$$

и подставив его в $f(x, y)$, получаем функцию θ_k в уравнении (1.2.9). В сложных случаях это уравнение можно решать так, как описано в лемме 1.2.2.

Говорят, что для критического числа k_1 выполнено условие совместности, если для $k = k_1$ в уравнении (1.2.7) $\theta_k \equiv 0$.

Следствие 1.2.1. Пусть в уравнении (1.2.7) θ_k — многочлен от $\ln x$ степени $\lambda(k)$.

Если в уравнении (1.2.7) число k не является критическим и $\theta_k = \text{const}$, то уравнение (1.2.7) сводится к уравнению

$$\nu(k)\beta_k + \theta_k = 0, \quad (1.2.10)$$

которое имеет решение $\beta_k = -\theta_k/\nu(k)$.

Аналогично, если θ_k — многочлен от $\ln x$ степени $\lambda(k)$ и $\nu(k) \neq 0$, тогда существует решение уравнения (1.2.7), где β_k — многочлен от $\ln x$ степени $\lambda(k)$.

Если в уравнении (1.2.7) число k — единственное не кратное критическое число и $\theta_k = \text{const}$, то β_k ищем в виде $\beta_k = \alpha_k + \gamma_k \ln x$ и для него уравнение (1.2.7) принимает вид

$$\nu'(k)\gamma_k + \theta_k = 0. \tag{1.2.11}$$

Оно имеет решение $\gamma_k = -\theta_k/\nu'(k)$. При этом α_k — произвольное число. Если $\theta_k = 0$ (т. е. выполняется условие совместности), тогда $\gamma_k = 0$ и $\beta_k = \alpha_k$ — произвольная постоянная. Следовательно, в этом случае логарифмов не возникает.

Как правило, удается вычислить не все разложение (1.2.6), а только его начальный отрезок. При этом желательно, чтобы этот отрезок содержал критическое значение k_1 . Тогда он содержит все произвольные постоянные разложения.

2.4. Степени логарифмов в разложении. Очевидно, что степень $\text{ord } \beta_k(\xi)$ многочленов β_k растет вместе с ростом $-\omega(k - r)$. Оценим ее сверху. Положим $\mathfrak{a}(j) = \mu(j)/|j - r|$ и $q^* = \max q_2$ по $(q_1, q_2) \in S(\tilde{f})$.

Теорема 1.2.2 [8]. Если в уравнении (1.2.2) нет логарифмов, то в решении (1.2.6)

$$\text{ord } \beta_k \leq q^*|k - r| \sum_{0 < -\omega(j-r) < -\omega(k-r)} \mathfrak{a}(j), \tag{1.2.12}$$

где $j, k \in \mathbf{K}(k_1)$.

Замечание 1.2.2. В ситуации теоремы 1.2.2 разложение (1.2.6) может содержать логарифм $\ln x$ только в двух случаях: а) если в множестве \mathbf{K} лежит критическое число k_1 , для которого не выполнено условие совместности; б) если число k_1 — кратное критическое число (в нашем случае это не встречается). Это согласуется с результатами из [4].

2.5. Решетка носителя разложения. Дискретное множество \mathbf{Z} в \mathbb{R}^n называется *решеткой*, если оно замкнуто относительно векторных сложения и вычитания. Векторы B_1, \dots, B_n образуют *базис решетки* \mathbf{Z} , если всякая точка $Q \in \mathbf{Z}$ может быть представлена в виде

$$Q = m_1 B_1 + \dots + m_n B_n, \quad \text{где все } m_i \in \mathbb{Z}.$$

Теорема 1.2.3 [4]. Если множество $S' \stackrel{\text{def}}{=} S(f) - (v, 1)$ и точка $(k_1, -1)$ лежат в некоторой решетке \mathbf{Z} , то для множества $\mathbf{K}(k_1)$ выполнено включение

$$\mathbf{K}(k_1) \subset \mathbf{Z} \cap \{q_2 = -1\}.$$

2.6. Вычисление второго приближения. Пусть известны укороченное уравнение (1.1.9), его подходящее решение (1.1.7) и его критическое число k_1 . Покажем, как находится ближайшая к r точка s_0 множества \mathbf{K} . Пусть вектор $P = \omega(1, r)$, где $\omega = \pm 1$ (см. (1.1.5)), направлен наружу многоугольника $\Gamma(f)$. Пусть $\mu = \langle P, Q \rangle$ и $\mu' = \max \langle P, Q' \rangle$, где $Q \in S_j^{(d)}$, $Q' \in S(f) \setminus S_j^{(d)}$ и $S_j^{(d)} = S(f) \cap \Gamma_j^{(d)}$.

Теорема 1.2.4 [14]. Ближайшая к r точка s_0 такова, что

$$|s_0 - r| = \mu - \mu'.$$

Если критическое значение k_1 отсутствует или оно таково, что $|k_1 - r| > \mu - \mu'$, то можно вычислить коэффициент c_{s_0} следующим образом. Выделим в дифференциальной сумме $f(x, y)$ второе приближение

$$\widehat{f} = \sum f_Q(x, y) \quad (\text{сумма по } Q : \langle P, Q \rangle = \mu'),$$

сделаем подстановку $y = c_r x^r + c_{s_0} x^{s_0}$ в сумму

$$\widehat{f}_j^{(d)} + \widehat{f} \quad (1.2.13)$$

и приведем подобные члены. Приравнявая нулю коэффициент при $x^{\mu' \omega}$ в сумме (1.2.13), получаем линейное уравнение $\nu(s_0)c_{s_0} + b_{s_0} = 0$, где b_{s_0} — это коэффициент суммы $\widehat{f}(x, c_r x^r)$ при $x^{\mu' \omega}$.

Если имеется критическое значение k_1 такое, что $|k_1 - r| < \mu - \mu'$, то $s_0 = k_1$ и коэффициент c_{s_0} произвольный.

2.7. Комплексные показатели. Пусть число k_1 — комплексное, у которого вещественная часть $\text{Re } k_1$ лежит в конусе задачи (1.1.14), т. е. $\omega \text{Re } k_1 < \omega r$. В этом случае множество $S'_+(k_1)$ содержит точки $Q = (q_1, q_2)$, у которых $q_1 \in \mathbb{C}$, $q_2 \in \mathbb{Z}$, а \mathbf{K} — это множество на комплексной плоскости $q_1 \in \mathbb{C}$. Тогда теорема 1.2.1 остается справедливой, только в разложении (1.2.6) показатели k частично упорядочены по росту $-\omega(\text{Re } k - r)$. Все дальнейшие утверждения пп. 2.2–2.5 также остаются справедливыми.

Если же в уравнении (1.2.2) имеются x^{r_1} с комплексным показателем r_1 , то носитель $\mathbf{S}(\tilde{f})$ лежит в прямой сумме $\mathbb{C} \oplus \mathbb{R}$. Но при построении многоугольника $\Gamma(\tilde{f})$ учитываются только $\text{Re } q_1$, т. е. $\text{Re } \mathbf{S}(\tilde{f})$. Все дальнейшие конструкции и результаты сохраняются. Разложения решений (1.2.1) с комплексными показателями k рассматривались в [45].

§ 3. Нестепенные асимптотики решений

3.1. Основные определения и постановка задачи. Пусть $x \rightarrow 0$ или $x \rightarrow \infty$. Две функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ называются *слабо (асимптотически) эквивалентными*, если

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} \rightarrow 1.$$

При этом функция $\varphi(x)$ является *слабой асимптотикой* функции $\psi(x)$, и наоборот. Обозначим k -кратные экспоненту и логарифм через $\exp^{(k)} x$ и $\ln^{(k)} x$ соответственно, т. е.

$$\exp^{(k)} x \stackrel{\text{def}}{=} \exp [\exp (\dots \{ \exp (x) \} \dots)] \quad \text{и} \quad \ln^{(k)} x \stackrel{\text{def}}{=} \ln (\ln (\dots (\ln x) \dots)).$$

Задача 3. Для решений уравнения (1.1.4), где $f(x, y)$ — дифференциальная сумма, найти все (слабые) асимптотики вида

$$y = c x^r (\exp x)^{s_1} \dots (\exp^{(k)} x)^{s_k} (\ln x)^{t_1} \dots (\ln^{(l)} x)^{t_l}, \quad (1.3.1)$$

где $c = \text{const} \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$; $r, s_i, t_i = \text{const} \in \mathbb{R}$ или \mathbb{C} .

В § 1 изложен метод вычисления всех степенных асимптотик, т. е. асимптотик вида (1.1.7). Поэтому здесь сосредоточимся на вычислении всех *нестепенных асимптотик* решений (1.3.1), т. е. не имеющих вида (1.1.7).

Порядком функции $\varphi(x)$ называется число

$$r = \lim \frac{\ln |\varphi(x)|}{\ln |x|} \in [-\infty, +\infty],$$

если предел существует. Очевидно, что слабо эквивалентные функции имеют одинаковый порядок.

Две функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ *сильно (асимптотически) эквивалентны*, если

$$\varphi(x) = \psi(x) [1 + o(|x|^{\omega_\varepsilon} |\psi(x)|^{\omega_{2\varepsilon}})]$$

для некоторого $\varepsilon < 0$, где

$$\omega_2 = \begin{cases} -1, & \text{если } \psi(x) \rightarrow 0, \\ 0, & \text{если } \psi(x) \rightarrow \text{const} \neq 0, \\ 1, & \text{если } \psi(x) \rightarrow \infty. \end{cases}$$

При этом функция $\varphi(x)$ является *сильной асимптотикой* функции $\psi(x)$, и наоборот.

Пусть $y = \varphi(x)$ — решение уравнения (1.1.4), и функция $\varphi(x)$ имеет порядок r . Тогда *нормальным конусом* \mathbf{u} этого решения является луч

$$\mathbf{u} = \begin{cases} \lambda(0, -1), & \text{если } r = -\infty; \\ \lambda\omega(1, r), & \text{если } -\infty < r < +\infty; \\ \lambda(0, 1), & \text{если } r = +\infty, \end{cases}$$

где $\lambda > 0$. Понятие *конус задачи* применимо и к решениям с так определенным нормальным конусом \mathbf{u} .

Теорема 1.3.1 [3, гл. VI, теорема 1.1]. Если решение $y = \varphi(x)$ уравнения (1.1.4) имеет нормальный конус \mathbf{u} , то укороченное уравнение (1.1.9), для которого $\mathbf{u} \subset \mathbf{U}_j^{(d)}$, имеет *сильно асимптотически эквивалентное* решение $y = \psi(x)$.

Таким образом, для вычисления всех (слабых) асимптотик решений уравнения (1.1.4) требуется выделить укороченные уравнения и их нормальные конусы, что приводит к конечному числу следующих задач.

Задача 4. Для укороченного уравнения (1.1.9) найти все (слабые) асимптотики его решений $y = \psi(x)$ вида (1.3.1) с $\mathbf{u} \in \mathbf{U}_j^{(d)}$.

Согласно п. 1.1 уравнению (1.1.4) соответствует многоугольник $\Gamma(\mathbf{f})$, а укороченному уравнению (1.1.9) — его ребро или вершина $\Gamma_j^{(d)}$. Ниже рассмотрим по отдельности 3 способа редукции задачи 4: два для ребра (в зависимости от его наклона) и один для вершины.

Замечание 1.3.1. Алгебраическое укороченное уравнение (1.1.9) не имеет подходящих нестепенных решений, т. е. не дает нестепенных асимптотик решений уравнения (1.1.4).

3.2. Случай вертикального ребра $\Gamma_j^{(1)}$. Если ребро $\Gamma_j^{(1)}$ вертикально, то его нормальный конус

$$\mathbf{U}_j^{(1)} = \lambda\omega(1, 0), \quad \lambda > 0, \quad (1.3.2)$$

и у всех точек $Q = (q_1, q_2) \in \Gamma_j^{(1)}$ координата q_1 одинакова. Положим

$$g(x, y) = x^{-q_1} \widehat{f}_j^{(d)}(x, y), \quad (1.3.3)$$

тогда носитель $\mathbf{S}(g)$ лежит на координатной оси $q_1 = 0$. Согласно (1.3.2) все степенные решения (1.1.7) с $\omega(1, r) \in \mathbf{U}_j^{(1)}$ являются постоянными $y = y^0 = \text{const}$, где y^0 — корень определяющего уравнения

$$\widetilde{g}(y) \stackrel{\text{def}}{=} g(0, y) = 0. \quad (1.3.4)$$

Корень y^0 уравнения (1.3.4) называется *кратным*, если в нем производная $d\widetilde{g}(y)/dy$ равна нулю.

Для отыскания нестепенных решений уравнения (1.1.9) сделаем *логарифмическое преобразование*

$$\xi \stackrel{\text{def}}{=} \ln x. \quad (1.3.5)$$

Согласно теореме 2.4 из [3, гл. VI] при этом дифференциальная сумма $g(x, y)$ перейдет в дифференциальную сумму $h(\xi, y) \stackrel{\text{def}}{=} g(x, y)$ и уравнение (1.1.9) примет вид

$$h(\xi, y) = 0. \quad (1.3.6)$$

Из (1.3.5) видно, что $\xi \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow 0$ и при $x \rightarrow \infty$, ибо ξ и x комплексные, т. е. для уравнения (1.3.6) получаем задачу 3 с конусом задачи

$$p_1 \geq 0. \quad (1.3.7)$$

Теорема 1.3.2 [8, § 5]. *Конечные предельные значения $y^0 \neq 0$ непостоянных решений уравнения (1.3.6) являются кратными решениями уравнения (1.3.4).*

Пусть ребро $\Gamma_j^{(1)}$ соединяет вершины $\Gamma_{j-1}^{(0)} = (q'_1, q'_2)$ и $\Gamma_j^{(0)} = (q''_1, q''_2)$, где целые $q'_2 < q''_2$. Будем говорить, что уравнение (1.3.4) имеет *бесконечный корень*, если степень многочлена в (1.3.4) меньше q''_2 ; и имеет *нулевой корень*, если у многочлена в (1.3.4) наименьшая степень по y больше q'_2 .

Теорема 1.3.3 [8, § 5]. *Если уравнение (1.3.4) не имеет бесконечного (нулевого) корня, то уравнение (1.3.6) не имеет решений, стремящихся к бесконечности (нулю).*

Следовательно, если уравнение (1.3.4) не имеет кратных корней, а также бесконечного и нулевого корней, то уравнение (1.1.9) не имеет подходящих нестепенных решений, т. е. преобразование (1.3.5) и дальнейшие исследования делать не нужно. В противном случае надо сделать преобразование (1.3.5) и рассмотреть уравнение (1.3.6).

Заметим, что укорочение уравнения (1.3.6) относительно вектора $(1, 0)$ является уравнением (1.3.4), т. е. $\widetilde{g}(y) \equiv \widehat{h}(\xi, y)$. Для нахождения решений уравнения (1.3.6) с бесконечными и нулевыми предельными значениями y надо для уравнения (1.3.6) выделить укороченные уравнения, соответствующие конусу задачи (1.3.7). Для нахождения решений уравнения (1.3.6) с конечными предельными значениями надо

найти все кратные корни уравнения (1.3.4). Пусть y^0 — такой кратный корень. Тогда параллельным сдвигом $y = y^0 + z$ надо поместить его в начало координат. Уравнение (1.3.6) примет вид

$$\tilde{h}(\xi, z) \stackrel{\text{def}}{=} h(\xi, y^0 + z) = 0. \tag{1.3.8}$$

Теперь для уравнения (1.3.8) надо выделять его укороченные уравнения с конусом задачи $p_1 \geq 0, p_2 \leq 0$. Это опять задача 3.

Итак, для вертикального ребра здесь был описан один шаг, позволяющий найти все степенные решения уравнения (1.1.9) и для нахождения нестепенных асимптотик его решений сводящий задачу 4 к конечному числу задач 3.

Наклонное ребро переводится в вертикальное с помощью степенного преобразования [8, § 5].

3.3. Случай горизонтального ребра $\Gamma_j^{(1)}$. В этом случае у всех точек $Q = (q_1, q_2)$ ребра $\Gamma_j^{(1)}$ координата q_2 одинакова. Положим

$$g(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} y^{-q_2} \widehat{f}_j^{(1)}(x, y) \tag{1.3.9}$$

и сделаем логарифмическое преобразование

$$\eta = \frac{d \ln y}{dx}. \tag{1.3.10}$$

Согласно теореме 2.4 из [3, гл. VI] при этом преобразовании дифференциальная сумма $g(x, y)$ перейдет в дифференциальную сумму $h(x, \eta) \stackrel{\text{def}}{=} g(x, y)$ и уравнение (1.1.9) примет вид

$$h(x, \eta) = 0. \tag{1.3.11}$$

Теперь для уравнения (1.3.11) получаем задачу 3 с конусом задачи

$$p_1 + p_2 \geq 0.$$

Сумму порядков всех производных, входящих в дифференциальный моном $a(x, y)$, назовем *суммарным порядком дифференцирования монома $a(x, y)$* и обозначим $\Delta(a)$. Для дифференциальной суммы (1.1.3) *суммарный порядок дифференцирования*

$$\Delta(f) = \max_i \Delta(a_i).$$

Пусть Ω_j — степень характеристического многочлена $\chi_j(r)$ вершины $\Gamma_j^{(0)}$. Пусть ребро $\Gamma_j^{(1)}$ соединяет вершины $\Gamma_{j-1}^{(0)} = (q'_1, q'_2)$ и $\Gamma_j^{(0)} = (q''_1, q'_2)$ с $q'_1 < q''_1$.

Теорема 1.3.4 [8, § 5]. *Если $\Omega_{j-1} = \Delta(\widehat{f}_{j-1}^{(0)}) = \Delta(\widehat{f}_j^{(1)})$ (или $\Omega_j = \Delta(\widehat{f}_j^{(0)}) = \Delta(\widehat{f}_j^{(1)})$), то уравнение (1.3.11) не имеет подходящих решений при $x \rightarrow 0$ (или $x \rightarrow \infty$).*

Следовательно, если $\Omega_{j-1} = \Delta(\widehat{f}_{j-1}^{(0)}) = \Delta(\widehat{f}_j^{(1)}) = \Delta(\widehat{f}_j^{(0)}) = \Omega_j$, то преобразование (1.3.10) и дальнейшее исследование делать не надо.

3.4. Случай вершины $\Gamma_j^{(0)}$. Пусть $\Gamma_j^{(0)} = \{Q\}$. Положим

$$g(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} X^{-Q} \tilde{f}_j^{(0)}(x, y), \quad (1.3.12)$$

тогда $S(g) = \{0\}$. Степенные решения $y = cx^r$ уравнения $g(x, y) = 0$ имеют произвольную постоянную c и показатель r , удовлетворяющий характеристическому уравнению

$$\chi(r) \stackrel{\text{def}}{=} g(x, x^r) = 0. \quad (1.3.13)$$

Для нахождения нестепенных решений сделаем логарифмическое преобразование

$$\xi = \ln x, \quad \eta = \frac{d \ln y}{d \ln x}. \quad (1.3.14)$$

Согласно теореме 2.4 из [3, гл. VI] при этом дифференциальная сумма $g(x, y)$ перейдет в дифференциальную сумму $h(\xi, \eta) \stackrel{\text{def}}{=} g(x, y)$ и уравнение (1.1.9) примет вид

$$h(\xi, \eta) = 0. \quad (1.3.15)$$

Из (1.3.14) видно, что $\xi \rightarrow \infty$, т. е. $p_1 \geq 0$. Таким образом, для уравнения (1.3.15) получаем задачу 3 с конусом задачи $p_1 \geq 0$, $p_1 + p_2 \geq 0$. Теперь заметим, что согласно (1.3.14) степенному решению (1.1.7) уравнения (1.1.9) соответствует постоянное решение

$$\eta = r = \text{const} \quad (1.3.16)$$

уравнения (1.3.15).

Теорема 1.3.5 [8, § 5]. Конечные предельные значения $\eta^0 \neq 0$ непостоянных решений уравнения (1.3.15) являются кратными корнями уравнения (1.3.13).

Пусть $\Delta(g(x, y)) = k$. Обозначим через $g^*(x, y)$ сумму всех тех дифференциальных мономов суммы $g(x, y)$, у которых суммарный порядок дифференцирования равен k , т. е. максимальный в $g(x, y)$. Через $\text{coef}(g^*)$ обозначим сумму всех числовых коэффициентов в дифференциальных мономах суммы $g^*(x, y)$.

Теорема 1.3.6 [8, § 5]. Если дифференциальная сумма $g(x, y)$ из (1.3.12) содержит ненулевую постоянную (или для нее $\text{coef}(g^*) \neq 0$), то уравнение (1.3.15) не имеет решений, стремящихся к нулю (или к бесконечности).

Будем говорить, что многочлен $\chi_j(r)$ для вершины $\Gamma_j^{(0)}$ не имеет бесконечного корня, если из принадлежности одного из векторов $\pm(0, 1)$ к $\mathbf{U}_j^{(0)}$ следует $\Omega_j = \Delta(\tilde{f}_j^{(0)})$.

Следствие 1.3.1. Если характеристический многочлен $\chi_j(r)$ для вершины $\Gamma_j^{(0)}$ не имеет таких конечных кратных корней r , для которых хотя бы один из векторов $\pm(1, r)$ лежит в нормальном конусе $\mathbf{U}_j^{(0)}$, и не имеет бесконечного корня, тогда вершине $\Gamma_j^{(0)}$ не соответствуют нестепенные асимптотики.

Следовательно, если для $\tilde{f}_j^{(0)}(x, y)$ характеристическое уравнение не имеет кратных корней, сумма $g(x, y)$ имеет ненулевой свободный член и $\text{coef}(g^*) \neq 0$, то уравнение (1.1.9) не имеет подходящих нестепенных решений.

Заметим, что укорочение уравнения (1.3.15) относительно вектора $(1, 0)$ является уравнением (1.3.13), т. е. $\chi(\eta) \equiv \tilde{h}(\xi, \eta)$. Для нахождения решений уравнения (1.3.15) с бесконечными и нулевыми предельными значениями надо для уравнения (1.3.15) выделять укороченные уравнения, у которых нормальный конус пересекается с конусом задачи $p_1 \geq 0, p_1 + p_2 \geq 0$, и для них решать задачу 4. Для нахождения решений уравнения (1.3.15) с конечными ненулевыми предельными значениями надо найти все кратные корни уравнения (1.3.13). Пусть η^0 — такой корень. Параллельным переносом $\eta = \eta^0 + \zeta$ надо поместить его в начало координат. Уравнение (1.3.15) примет вид

$$\tilde{h}(\xi, \zeta) \stackrel{\text{def}}{=} h(\xi, \eta^0 + \zeta) = 0. \quad (1.3.17)$$

Теперь надо выделять укорочения уравнения (1.3.17) с конусом задачи $p_1 \geq 0, p_2 \leq 0$. Это опять задача 3.

§ 4. Сложные разложения

4.1. Постановка задачи. Ранее было показано, как у укороченного уравнения (1.1.9) находить нестепенные решения

$$y = x^r \varphi_r(\ln x), \quad r \in \mathbb{R}, \quad (1.4.1)$$

которые могут служить нестепенными асимптотиками решений полного уравнения (1.1.4). При этом φ_r разлагается в ряд по степеням $\ln x$:

$$\varphi_r = \gamma_\rho (\ln x)^\rho + \sum \gamma_\sigma (\ln x)^\sigma, \quad \sigma < \rho, \quad (1.4.2)$$

где $\gamma_\rho = \text{const}$ и коэффициенты γ_σ либо постоянны, либо являются многочленами от кратных логарифмов (которые здесь не встречаются).

Задача 5. Для нестепенной асимптотики (1.4.1), (1.4.2), являющейся решением укороченного уравнения (1.1.9) и имеющей $\omega(1, r) \in \mathbf{U}_j^{(d)}$, найти разложение соответствующего решения полного уравнения (1.1.4)

$$y = \varphi_r x^r + \sum \varphi_s x^s, \quad \omega s < \omega r, \quad (1.4.3)$$

где φ_s — ряды по убывающим степеням логарифмов.

Здесь излагается решение этой задачи для случая, когда укороченное уравнение (1.1.9) соответствует вершине или негоризонтальному ребру и удовлетворяет некоторому ограничению (не дает критических чисел для решения (1.4.1), (1.4.2)). Для этого случая будет показано, как получить разложение (1.4.3), у которого коэффициенты φ_s разлагаются в ряды по убывающим степеням простого логарифма вида

$$\varphi_s = \sum \varphi_{st} (\ln x)^t, \quad t \leq T(s), \quad (1.4.4)$$

где коэффициенты φ_{st} постоянны.

4.2. Вычисление критических чисел. Рассмотрим первую вариацию (1.1.16). Это некоторый линейный дифференциальный оператор $\mathcal{M}(x, y)$, коэффициенты кото-

рого суть дифференциальные суммы. Сделаем в нем степенное преобразование

$$y = x^r z, \quad (1.4.5)$$

где r — то же самое, что и в (1.4.1). Получим оператор

$$\mathcal{N}(x, z) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{M}(x, y). \quad (1.4.6)$$

Сделаем в нем логарифмическую замену

$$\xi = \ln x. \quad (1.4.7)$$

Тогда

$$\mathcal{N}(x, z) \stackrel{\text{def}}{=} x^v \tilde{\mathcal{N}}(\xi, z), \quad (1.4.8)$$

где v — это степень по x оператора \mathcal{N} и $\tilde{\mathcal{N}} = \sum_{l=0}^m \pi_l(\xi, z)(d^l/d\xi^l)$ — дифференциальный оператор по ξ , коэффициенты которого суть дифференциальные суммы от ξ, z . В каждый коэффициент π_l согласно (1.4.2) подставим $z = \varphi_r(\xi)$ и выделим члены с наибольшей степенью ξ . Пусть n — наибольшая из всех этих степеней, т. е.

$$\pi_l(\xi, \varphi_r(\xi)) = \alpha_l \xi^n + \dots, \quad \alpha_l = \text{const}, \quad l = 0, 1, \dots, m, \quad \sum_{l=0}^m |\alpha_l| \neq 0. \quad (1.4.9)$$

Положим

$$\tilde{\mathcal{N}}_n = \xi^n \sum_{l=0}^m \alpha_l \frac{d^l}{d\xi^l}. \quad (1.4.10)$$

Тогда $\tilde{\mathcal{N}} = \tilde{\mathcal{N}}_n + \dots$ *Многочлен*

$$\nu(k) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{l=0}^m \alpha_l k^l \quad (1.4.11)$$

назовем *характеристическим* для укороченного решения (1.4.1), (1.4.2). Его корни k_1, \dots, k_m — это собственные числа решения (1.4.1), (1.4.2). Те из них, которые лежат в конусе задачи, т. е. $\omega k_i < \omega r$, являются *критическими числами укороченного решения* (1.4.1), (1.4.2).

4.3. Вычисление носителя разложения. Напомним, что если степенная асимптотика (1.1.7) с $r \in \mathbb{R}$ не имеет критических чисел, то в разложении (1.1.6) показатели степени s пробегает множество $\mathbf{K} \subset \mathbb{R}$. Для нестепенной асимптотики (1.4.1) под \mathbf{K} будем понимать то же самое множество, что и для степенной асимптотики.

Теорема 1.4.1 [9]. *Если укороченное решение (1.4.1), (1.4.2) не имеет критических чисел, то ему соответствует единственное разложение (1.4.3), (1.4.4). При этом показатели s пробегает множество \mathbf{K} , а кратные логарифмы в (1.4.3), (1.4.4) отсутствуют, если их нет в (1.4.1), (1.4.2).*

Теорема 1.4.2 [9]. *Если в ситуации теоремы 1.4.1 у разложений (1.4.2) нет кратных логарифмов, то $T(s) \leq s(\rho q - n)$ в разложениях (1.4.3), (1.4.4), где ρ из (1.4.2), $q = \max q_2$ для точек (q_1, q_2) носителя $\mathbf{S}(f)$, n из (1.4.9).*

Итак, если асимптотика степенная, то в соответствующем разложении (1.1.6) решения исходного уравнения (1.1.4) коэффициенты β_s — не более чем многочлены от $\ln x$. Если же асимптотика нестепенная и имеет вид (1.4.1), (1.4.2), то в соответствующем разложении (1.1.6) коэффициенты β_s — это ряды по убывающим степеням $\ln x$, причем их показатели степени не ограничены снизу.

Замечание 1.4.1. Как правило, нахождение всего разложения (1.4.2) требует бесконечного числа шагов, так же как и каждого разложения (1.4.4). Однако всегда за конечное число шагов можно вычислить начальные куски разложения (1.4.2) и нескольких первых разложений (1.4.4).

§ 5. Экзотические разложения

5.1. Ряды с чисто мнимыми показателями степени. Будем считать, что комплексная переменная x изменяется на универсальной накрывающей, т. е. $x = \exp(\rho + i\varphi)$, $\rho + i\varphi = \text{Ln } x$, где $i^2 = -1$, $\rho, \varphi \in \mathbb{R}$, $\rho = \ln |x|$. Пусть $\alpha = \beta + i\gamma$ — комплексное число, где $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ и $\gamma \neq 0$. Тогда степенная функция

$$z^\alpha = \exp[(\rho + i\varphi)(\beta + i\gamma)] = \exp[\rho\beta - \varphi\gamma + i(\rho\gamma + \varphi\beta)].$$

При этом

$$|x^\alpha| = \exp(\rho\beta - \varphi\gamma). \tag{1.5.1}$$

Вещественная линейная функция $\varphi = a\rho + b$, где $a, b = \text{const} \in \mathbb{R}$, определяет некоторую прямую на универсальной накрывающей. На ней

$$|x^\alpha| = \exp[\rho(\beta - \gamma a) - b\gamma].$$

При $\rho \rightarrow -\infty$ предел

$$\lim[\rho(\beta - \gamma a) - b\gamma] = \begin{cases} -\infty, & \text{если } \beta - \gamma a > 0, \\ -b\gamma, & \text{если } \beta - \gamma a = 0, \\ +\infty, & \text{если } \beta - \gamma a < 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\lim |x^\alpha| = \begin{cases} 0, & \text{если } \beta - \gamma a > 0, \\ \text{const} \in \mathbb{R}, & \text{если } \beta - \gamma a = 0, \\ \infty, & \text{если } \beta - \gamma a < 0. \end{cases}$$

При этом $\lim |x| = 0$, но $\lim |x^\alpha| = \infty$, если $\beta < \gamma a$, т. е. $\text{sgn } a = \text{sgn } \beta\gamma$ и $|a| > |\beta|/|\gamma|$. Это означает, что при любых $\gamma \neq 0$ и β на универсальной накрывающей есть такой путь $\varphi = a\rho + b$, что $|x| \rightarrow 0$ и $|x^\alpha| \rightarrow \infty$. В частности, при $\beta = 0$ для этого достаточно равенства $\text{sgn } a = \text{sgn } \gamma$.

Таким образом, степенная функция x^α с комплексным показателем α устроена довольно сложно, если $\varphi = \arg x$ меняется неограниченно в обе стороны. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что φ ограничено с одной стороны.

Рассмотрим теперь ряд

$$\eta(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{i\gamma k}, \tag{1.5.2}$$

где $c_k = \text{const} \in \mathbb{C}$ и $\gamma = \text{const} \in \mathbb{R}$. Если $\gamma > 0$, то согласно (1.5.1)

$$|x^{i\gamma k}| = \exp(-\varphi\gamma k) = [\exp(-\varphi\gamma)]^k.$$

Поэтому при $\varphi\gamma > 0$ ряд (1.5.2) можно абсолютно суммировать как степенной ряд. По формуле Коши он будет абсолютно сходиться при

$$\exp(-\varphi\gamma) < \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}} \stackrel{\text{def}}{=} \delta. \quad (1.5.3)$$

Если $\delta > 0$ и $\gamma > 0$, то неравенство (1.5.3) выполнено при $-\varphi\gamma < \ln \delta$, т. е. при

$$\varphi > -\gamma^{-1} \ln \delta. \quad (1.5.4)$$

Заметим, что области сходимости рядов (1.5.2) и $x^A \eta(x)$ совпадают при любом $A = \text{const} \in \mathbb{C}$, если исключить точки $x = 0$ и $x = \infty$. Поэтому в дальнейших рассуждениях исключим эти точки.

Рассмотрим обобщение ряда (1.5.2)

$$\zeta(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{s_k}, \quad (1.5.5)$$

где $c_k, s_k = \text{const} \in \mathbb{C}$, $\text{Re } s_k = 0$, $|\text{Im } s_{k+1}| > |\text{Im } s_k| \geq 0$, s_k не имеют точек накопления и все $\text{Im } s_k$ одного знака. Для его области абсолютной сходимости справедлива формула

$$\varphi \text{sgn}(\text{Im } s_2) > \text{sgn}(\text{Im } s_2) \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln |c_k|}{|s_k|}. \quad (1.5.6)$$

Для одностороннего ряда (1.5.5), где все $\text{Im } s_k$ одного знака, область сходимости есть либо $\varphi > \varphi_0$, если $\text{Im } s_k \geq 0$, либо $\varphi < \varphi_0$, если $\text{Im } s_k \leq 0$. Ряд (1.5.5) отнесем к классу \mathcal{P}^+ , если $\text{Im } s_k \geq 0$, и к классу \mathcal{P}^- , если $\text{Im } s_k \leq 0$. Аналогично ряд $x^A \zeta(x)$ отнесем к классу \mathcal{P}^+ или \mathcal{P}^- в соответствии с классом ряда $\zeta(x)$ в (1.5.5).

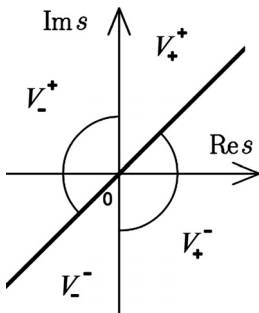


Рис. 3. Вертикальные углы V_σ^r

5.2. Экзотические ряды. Пусть на комплексной плоскости s с координатами $\text{Re } s, \text{Im } s$ через начало координат $s = 0$ проведены две прямые: ось $\text{Im } s$ и отличная от нее наклонная прямая (рис. 3). Они делят плоскость на четыре вертикальных угла V_σ^r , $\sigma, \tau = \pm 1$ (рис. 3). При этом каждый угол будем считать замкнутым, т. е. содержащим свою границу. Нижний индекс σ угла V_σ^r соответствует знаку $\text{Re } s$ на его границе, проходящей по наклонной прямой, а верхний — знаку $\text{Im } s$ на его вертикальной границе. Степенной ряд

$$\xi(x) = \sum c_s x^s \quad (\text{сумма по } s \in \mathbf{K}), \quad (1.5.7)$$

где $c_s = \text{const} \in \mathbb{C}$, будем относить к классу \mathcal{P}_σ^r , если его носитель $\mathbf{K} \subset V_\sigma^r$. Более того, степенной ряд вида $x^A \xi(x)$ будем относить к тому же классу. При этом будем рассматривать только ряды вида (1.5.7), у которых носитель \mathbf{K} не имеет предельных точек на комплексной плоскости s . Ряды (1.5.7) классов \mathcal{P}_σ^r будем называть *экзотическими*. Согласно п. 5.1

на универсальной накрывающей комплексной плоскости $x = \exp(\rho + i\varphi)$ область абсолютной сходимости ряда (1.5.7) класса \mathcal{P}_σ^r может иметь вид

$$\sigma\rho < \sigma\rho_0, \quad \tau\varphi < \tau\varphi_0, \tag{1.5.8}$$

где ρ_0 и φ_0 — некоторые вещественные постоянные. Ряд (1.5.7) класса \mathcal{P}_σ^r является асимптотическим при $|x|^\sigma \rightarrow 0$ и $\varphi \rightarrow \tau\infty$, ибо тогда $|x^\alpha| \geq |x^\beta|$, если $\sigma \operatorname{Re} \alpha \leq \sigma \operatorname{Re} \beta$, $\tau \operatorname{Im} \alpha \leq \tau \operatorname{Im} \beta$, что дает упорядоченность мономов x^α по показателям α .

5.3. Существование экзотических разложений решений. Пусть задано обыкновенное дифференциальное уравнение

$$f(x, y) = 0, \tag{1.5.9}$$

где f — дифференциальная сумма. Для его решений $y = y(x)$ при $|x| \rightarrow 0$ и $|x| \rightarrow \infty$ будем искать *экзотические разложения*

$$y = c_r x^r + \sum c_s x^s \quad (\text{сумма по } s \in \mathbf{K}, s \neq r), \tag{1.5.10}$$

где носитель \mathbf{K} лежит в сдвинутом на r вертикальном угле $r + V_\sigma^r$ с вершиной в точке r . Для обычных разложений (1.5.10), когда множество $\mathbf{K} - r$ лежит в одном «горизонтальном угле», расположенном между двумя наклонными полупрямыми (рис. 4), процедура их поиска описана в § 2 гл. 1. Такие разложения относятся к обоим классам \mathcal{P}_σ^\pm одновременно.

Если экзотическое разложение решения (1.5.10) относится к классу \mathcal{P}_σ^r , то $\sigma = -\omega$.

Запишем экзотическое разложение решения уравнения (1.5.9) в виде

$$y = \sum_\rho c_\rho x^\rho + \sum_s c_s x^s, \tag{1.5.11}$$

где все $\operatorname{Re} \rho = r$, $\omega r > \omega \operatorname{Re} s$ и в первой сумме больше одного слагаемого.

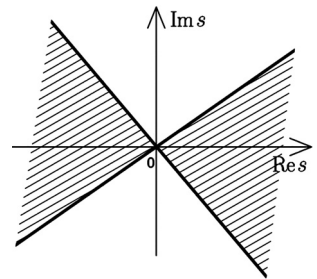


Рис. 4. Горизонтальные углы

Лемма 1.5.1. Если разложение (1.5.11) — формальное решение полного уравнения (1.5.9) и $\omega(1, r) \in \mathbf{U}_j^{(d)}$, то укороченное решение

$$y = \sum_\rho c_\rho x^\rho \tag{1.5.12}$$

является решением укороченного уравнения

$$\tilde{f}_j^{(d)}(X) = 0. \tag{1.5.13}$$

Согласно п. 1.2 уравнению (1.5.9) соответствует многоугольник $\Gamma(f)$ с границей $\partial\Gamma$, состоящей из обобщенных граней $\Gamma_j^{(d)}$, каждой из которых соответствует свой (вещественный) нормальный конус $\mathbf{U}_j^{(d)}$, а боковой грани — также определенное значение $\omega = \omega_j^{(d)}$.

Назовем *комплексным нормальным конусом* $\check{U}_j^{(d)}$ грани $\Gamma_j^{(d)}$ множество точек $\rho \in \mathbb{C}$, где $\omega_j^{(d)}(1, \operatorname{Re} \rho) \in U_j^{(d)}$. Комплексные нормальные конусы $\check{U}_j^{(d)}$ можно изображать на двух комплексных плоскостях L_ω соответственно знаку $\omega = \omega_j^{(d)} = \pm 1$. Для ребра $\Gamma_j^{(1)}$ комплексный нормальный конус $\check{U}_j^{(1)}$ — это прямая $\operatorname{Re} \rho = r_j$; для вершины — это полоса $r_j < \operatorname{Re} \rho < r_{j+1}$ (заштрихован на рис. 5).

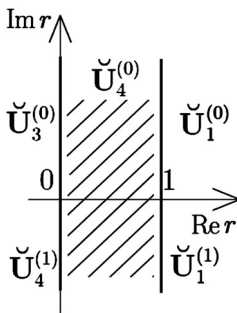


Рис. 5. Комплексные нормальные конусы

При отыскании степенно-логарифмических разложений вида (1.5.10) предполагалось, что $\omega \operatorname{Re} r > \omega \operatorname{Re} s$, т. е. после подстановки $y = c_r x^r + z$ для z брался конус задачи $\mathcal{K} = \{s : \omega \operatorname{Re} s < \omega \operatorname{Re} r\}$. Поэтому в формуле (1.2.5) присутствовали только такие t_i и $k_1 - r$, у которых $\omega \operatorname{Re} t_i < 0$ и $\omega \operatorname{Re} (k_1 - r) < 0$. Теперь позволим в формуле (1.2.5) присутствию чисто мнимых t_i и $k_1 - r$. Тогда множество $\mathbf{K}(k_1)$ может содержать бесконечно много точек k (или s) с фиксированной частью $\operatorname{Re} k$ (или $\operatorname{Re} s$) и разложение с таким

носителем будет экзотическим.

Пусть $\Gamma_j^{(1)}$ — ребро многоугольника $\Gamma(f)$, примыкающее к вершине $\Gamma_k^{(0)}$, и $N_j = (1, r_j)$ — его вещественная нормаль. Тогда вектор $M_j = (-r_j, 1)$ является направляющим вдоль ребра $\Gamma_j^{(1)}$ и $t_j = r - r_j$. Эта величина является чисто мнимой, если $\operatorname{Re} r = r_j$ и $\operatorname{Im} r \neq 0$. Но это означает, что комплексное число r лежит в комплексном нормальном конусе $\check{U}_j^{(1)}$ ребра $\Gamma_j^{(1)}$. При этом комплексное число r является корнем характеристического уравнения $\chi_k(r) = 0$ вершины $\Gamma_k^{(0)}$. Следовательно, экзотические разложения соответствуют ребру $\Gamma_j^{(1)}$, если одна из его вершин $\Gamma_k^{(0)}$ имеет корень r характеристического уравнения, принадлежащий комплексному нормальному конусу $\check{U}_j^{(1)}$ ребра $\Gamma_j^{(1)}$. Чисто мнимая разность $k_1 - r$ возникает в тех случаях, когда степенная асимптотика $y = c_r x^r$ имеет такое собственное число k_1 , что $\operatorname{Re} k_1 = \operatorname{Re} r$ и $k_1 \neq r$. Следовательно, здесь для продолжения разложения имеем два конуса задачи

$$\mathcal{K}^\tau = \{s : \text{либо } \omega \operatorname{Re} s < \omega \operatorname{Re} r, \text{ либо } \operatorname{Re} s = \operatorname{Re} r \text{ и } \operatorname{sgn} \operatorname{Re} (s - r) = \tau\}.$$

На каждом боковом ребре $\Gamma_j^{(1)}$ имеются две вершины $\Gamma_k^{(0)}$ и $\Gamma_{k+1}^{(0)}$, одна из них — *верхняя*, а другая — *нижняя* на этом ребре.

Итак, каждой грани $\Gamma_j^{(d)}$ многоугольника $\Gamma(f)$ соответствует комплексный нормальный конус $\check{U}_j^{(d)}$. При этих определениях теорема 1.1.2 обобщается следующим образом:

Теорема 1.5.1. *Экзотические разложения решений (1.5.10) уравнения (1.5.9) соответствуют только боковым ребрам многоугольника $\Gamma(f)$ в следующих двух случаях (здесь $(1, r_j)$ — нормаль ребра $\Gamma_j^{(1)}$):*

1. Если для вершины $Q_k^{(0)}$ бокового ребра $\Gamma_j^{(1)}$ характеристическое уравнение $\chi_k(\rho) = 0$ имеет корень $\rho = r_j + i\gamma$, $\gamma \neq 0$.
2. Если определяющее уравнение $\tilde{f}_j(c) = 0$, соответствующее ребру $\Gamma_j^{(1)}$, имеет корень c_0 с собственным значением вида $\lambda = r_j + i\gamma$, $\gamma \neq 0$.

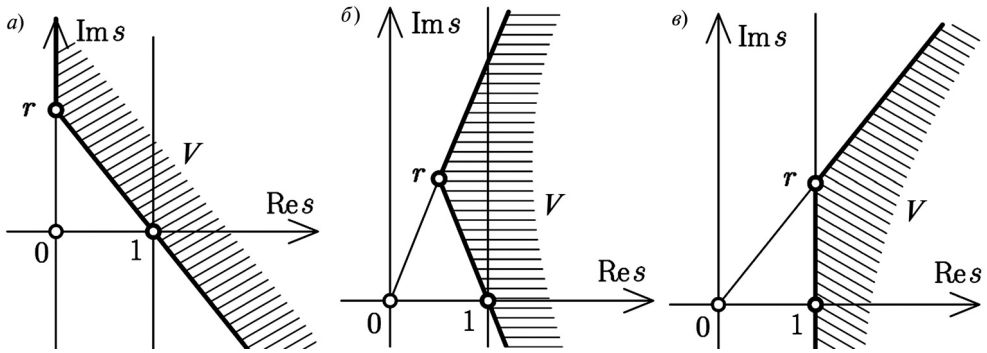


Рис. 6. Угол V разложения (2.2.6) при $\text{Re } r = 0$ (а); $\text{Re } r \in (0, 1)$ (б); $\text{Re } r = 1$ (в)

При этом $\tau = \text{sgn } \gamma$ в случае 2 и в случае 1 для нижней вершины; $\tau = -\text{sgn } \gamma$ в случае 1 для верхней вершины.

Экзотические разложения соответствуют вершине $\Gamma_k^{(0)} = Q_k^{(0)}$ только в одном случае:

3. Если укороченное решение $y = c_r x^r$ имеет критическое число k_1 с $\text{Re } k_1 = \text{Re } r$ и $k_1 \neq r$.

В уравнении Р6 случай 3 не встречается и все экзотические разложения соответствуют ребрам.

В случаях теоремы 1.5.1 значение τ определено и конус задачи \mathcal{K} единственен, поэтому критические числа однозначно определены. В остальных случаях имеются два конуса задачи \mathcal{K}^τ и для каждого из них — свой набор критических чисел. При этом критические числа k_j с $\text{Re } k_j > \omega \text{Re } r$ — общие для обоих \mathcal{K}^+ и \mathcal{K}^- , а с $\text{Re } k_j = \text{Re } r$ — разные для разных τ .

При этих определениях остаются верными все построения и утверждения § 2, где k_1 — комплексное критическое число.

Теперь уточненная теорема 1.2.1 для решений уравнения (1.5.9) позволяет получать экзотические разложения (1.5.10), где c_s суть многочлены от логарифма $\ln x$. Показатели s в разложении (1.5.10) можно упорядочить следующим образом. Согласно предложениям 1.2.2 и 1.2.3 множество $\mathbf{K}(k_1) - r$ лежит в некотором центральном угле V с вершиной в нуле, у которого либо обе стороны лежат на наклонных прямых, либо одна из них лежит на оси $\text{Im } s$, т.е. угол V имеет вид V_σ^τ . Пусть векторы P_1 и P_2 — внешние нормали к сторонам угла V . Положим $P = P_1 + P_2 = (p_1, p_2)$. Теперь для каждой точки $s = s' + is'' \in \mathbb{C}$ положим $\|s\| = p_1 s' + p_2 s''$. Будем говорить, что точка $s \in \mathbb{C}$ предшествует точке $t \in \mathbb{C}$, если $\|s\| > \|t\|$. Разложение (1.5.10), т.е. коэффициенты c_s для $s \in \mathbf{K}$, вычисляется последовательно по этой упорядоченности показателей s так, как описано в леммах 1.2.1 и 1.2.2.

Заметим, что носитель и коэффициенты экзотического разложения вычисляются по тем же формулам, что и для степенно-логарифмического разложения.

Для комплексных нормальных конусов, изображенных на рис. 5, расположение углов V_σ^τ показано на рис. 6 в зависимости от $\text{Re } r$: а) $\text{Re } r = 0$, б) $0 < \text{Re } r < 1$, в) $\text{Re } r = 1$.

Замечание 1.5.1. В случаях, описанных в теореме 1.5.1, у решения (1.5.10) имеется бесконечный ряд вида

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^{r+ki\gamma}, \quad (1.5.14)$$

который является решением укороченного уравнения

$$\widehat{f}_j^{(1)}(x, y) = 0,$$

соответствующего ребру $\Gamma_j^{(1)}$. Но может случиться, что этот ряд состоит из одного слагаемого

$$y = c_1 x^{r+i\gamma}, \quad (1.5.15)$$

тогда (1.5.15) является корнем для каждого из слагаемых $f_Q(x, y)$ дифференциальной суммы

$$\widehat{f}_j^{(1)}(x, y) = \sum f_Q \quad (\text{сумма по } Q \in \mathbf{S}(\widehat{f}_j^{(1)})).$$

Комплексный носитель дифференциальной суммы $\mathcal{L}(x)z$ состоит из нескольких точек, соответствующих точкам Q носителя $\mathbf{S}(\widehat{f}_j^{(1)})$. Крайние из них соответствуют вершинам ребра $\Gamma_j^{(1)}$. Каждой из них соответствует свой носитель: \mathbf{K}_V — верхней вершине и \mathbf{K}_H — нижней вершине. Однако разложение (1.5.10) в этом случае имеет носитель $\mathbf{K} = \mathbf{K}_V \cap \mathbf{K}_H$ и является степенно-логарифмическим, а не экзотическим.

5.4. Полуэкзотические разложения. Разложение (1.5.11), содержащее в первой сумме конечное число слагаемых, но больше одного, назовем *полуэкзотическим*. Пусть $\min(\operatorname{Im} \rho)$ в (1.5.11) достигается при $\rho = \rho_*$, $\max(\operatorname{Im} \rho)$ — при $\rho = \rho^*$. Пусть \mathbf{K}_* — носитель экзотического разложения, содержащего точку ρ_* , а \mathbf{K}^* — носитель экзотического разложения с точкой ρ^* .

Теорема 1.5.2. *Носитель полуэкзотического разложения (1.5.11) равен $\mathbf{K}_* \cap \mathbf{K}^*$.*

Рассмотрим многочлен Лорана с вещественными показателями степени

$$y(x) = \sum_{k=m}^n c_k x^k, \quad (1.5.16)$$

где $c_k \in \mathbb{C}$ и $m \neq n$. Обратная к нему функция y^{-1} имеет два разных степенных разложения: вблизи нуля $x = 0$

$$y_0^{-1} = c_m^{-1} x^{-m} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^k \right) \quad (1.5.17)$$

и вблизи бесконечности $x = \infty$

$$y_{\infty}^{-1} = c_n^{-1} x^{-n} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{b}_k x^{-k} \right), \quad (1.5.18)$$

где b_k и $\widetilde{b}_k \in \mathbb{C}$.

Аналогично справедлива

Теорема 1.5.3. *Полуэкзотическое разложение (1.5.11) имеет два обратных экзотических разложения*

$$(y^{-1})_* = c_{\rho_*}^{-1} x^{-\rho_*} \left(\sum_{\sigma} b_{\sigma} x^{\sigma} + \sum_t b_t x^t \right), \quad (1.5.19)$$

и

$$(y^{-1})^* = c_{\rho^*}^{-1} x^{-\rho^*} \left(\sum_{\sigma} \tilde{b}_{\sigma} x^{\sigma} + \sum_t \tilde{b}_t x^t \right), \quad (1.5.20)$$

где $\operatorname{Re} \sigma = 0$.

Согласно теореме 1.5.2 полуэкзотическое разложение (1.5.11) принадлежит обоим классам \mathcal{P}^+ и \mathcal{P}^- , а каждое из экзотических разложений (1.5.19) и (1.5.20) принадлежит лишь одному из классов \mathcal{P}^+ или \mathcal{P}^- , причем знаки их классов противоположны.

Разложение (1.5.11), в котором $\operatorname{Im} \rho$ не ограничено ни сверху, ни снизу, назовем *сверхэкзотическим*. Впрочем, у уравнений Пенлеве такие разложения решений отсутствуют.

§ 6. Другие типы асимптотик и разложений

Плоская степенная геометрия [8, § 5] позволяет находить нестепенные (экспоненциальные) асимптотики решений

$$y \sim \exp \left(c_r x^r + \sum_s c_s x^s \right),$$

соответствующие горизонтальному ребру. Но у уравнения Р6 они не встречаются.

Кроме того, степенная геометрия [8, § 7] позволяет для степенных и степенно-логарифмических разложений находить экспоненциально малые добавки такого же вида. Но у уравнения Р6 они также не встречаются.

§ 7. Неформальные решения

К настоящему времени имеются следующие общие результаты о существовании фактического решения, имеющего найденное формальное решение своим асимптотическим разложением.

Теорема 1.7.1 [38]. *Если система*

$$\frac{dX}{dt} = \frac{F(X)}{g(X)}, \quad (1.7.1)$$

где $F(X)$ и $g(X)$ вещественны и аналитичны в окрестности нуля (F — вектор), $F(0) = 0$, $g(0) = 0$, имеет вещественное формальное решение $\overset{\circ}{X}(t)$, разложение которого содержит только вещественные степени независимой переменной t , ее кратных

логарифмов и экспонент, а также вещественные коэффициенты, то она имеет настоящее решение $X(t)$. При этом формальное разложение $\overset{\circ}{X}(t)$ является асимптотическим для решения $X(t)$, т. е.

$$\left| X(t) - \sum_{k=0}^m \Phi_k(t) \right| = o(\Phi_m(t)), \quad m = 1, 2, \dots,$$

где $\overset{\circ}{X}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_k(t)$. Здесь X , F и Φ — n -мерные векторы.

Уравнение (2) сводится к системе (1.7.1), если положить

$$\dot{x} = 1, \quad \dot{y} = z, \quad \dot{z} = h(x, y, z),$$

где h — правая часть уравнения (2) и $z = y'$, и рассматривать только вещественные значения параметров a, b, c, d . В этом случае для вещественных формальных решений по теореме 1.7.1 существуют настоящие решения. По-видимому, теорему 1.7.1 можно обобщить и на комплексные формальные решения, если их рассматривать на прямой в комплексной плоскости t , проходящей через ноль $t = 0$.

Если у шестого уравнения Пенлеве (2) все параметры a, b, c, d вещественны, то теорема 1.7.1 применима к следующим семействам базовых формальных решений типов 1–3 (с вещественными произвольными постоянными), перечисленными во Введении: семейство \mathcal{A}_0 с вещественным $r \in (0, 1)$; семейства \mathcal{B}_i с $\operatorname{Re} \theta_i \neq 0$ и $c_{k_i} = 0$, если $\operatorname{Im} \theta_i \neq 0$, $i = 1, 2$; семейство \mathcal{B}_3 ; семейства $\mathcal{B}_4, \mathcal{B}_5$ и \mathcal{B}_6 при $a > 0$; семейства $\mathcal{C}_0^\infty, \mathcal{B}_8, \mathcal{B}_9$ при $c > 0$; семейство \mathcal{B}_{10} .

Если для уравнения (1.2.2) разложение (1.2.6) сходится при достаточно малых $|x|^{-\omega}$, то этому разложению соответствует решение уравнения (1.2.2). Максимальный порядок производной в дифференциальной сумме $f(x, z)$ назовем ее *порядком дифференцирования* и обозначим $\pi(f)$.

Теорема 1.7.2 [8, теорема 3.4]. *Степенное разложение (1.2.1) решения уравнения (1.2.2), где \tilde{f} — дифференциальная сумма, сходится для достаточно малых $|x|^{-\omega}$ и $|\arg x - \mu_0|$, где $\mu_0 = \operatorname{const} \in [0, 2\pi]$, если*

$$\pi(\mathcal{L}(x)z) = \pi(\tilde{f}). \quad (1.7.2)$$

Здесь докажем эту теорему для случая, когда степенное разложение (1.2.1) содержит только целые показатели степени. Случай рациональных показателей с конечным общим знаменателем m сводится к этому случаю заменой $\tilde{x} = x^{1/m}$. Ограничение на $\arg x$ нужно лишь для разложений (1.2.1) с иррациональными или комплексными показателями степени, и в нашем случае его можно опустить.

Доказательство проведем в окрестности нуля $x = 0$, т. е. $\omega = -1$. Итак, пусть уравнение (1.2.2) имеет формальное решение в виде степенного ряда

$$y = \sum_{k=k_0}^{\infty} c_k x^k \quad (1.7.3)$$

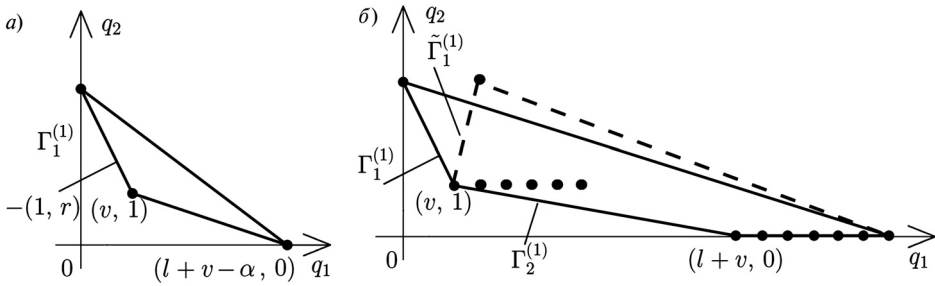


Рис. 7. Левая часть многоугольника уравнения (1.2.2) (а); носитель и многоугольник уравнения (1.7.5) до (сплошной линией) и после преобразования (1.7.9) (пунктирной линией) (б)

с постоянными коэффициентами $c_k \in \mathbb{C}$. Сделаем в уравнении (1.2.2) замену переменной

$$y = \sum_{k=k_0}^{k_m} c_k x^k + u, \tag{1.7.4}$$

где $k_m \geq k_0$, после которой оно примет вид

$$f_1(x, u) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}(x)u + g(x, u, u', \dots, u^{(n)}) = 0, \tag{1.7.5}$$

где $\mathcal{L}(x)$ — линейный дифференциальный оператор. Функция f_1 содержит x в целых степенях, а $u, u', \dots, u^{(n)}$ — в целых неотрицательных. Уравнение (1.7.5) всегда можно домножить на минимальную степень x . Поэтому будем полагать, что f_1 — это многочлен переменных $x, u, u', \dots, u^{(n)}$. Уравнение (1.7.5) обладает следующими свойствами:

1. $\mathbf{S}(\mathcal{L}(x)u) = (v, 1)$;
2. $(v, 1)$ — вершина многоугольника $\Gamma(f_1)$;
3. $\mathbf{S}(f_1) \subset \{q_2 \geq 0\}$;
4. $\mathbf{S}(g) \cap \{q_2 = 1\} \subset \{q_1 > v\}$;
5. $\mathbf{S}(g) \cap \{q_2 = 0\} \subset \{q_1 \geq v + k_m + 1\}$.

Уравнение (1.7.5) имеет формальное решение

$$u(x) = \sum_{k=k_m+1}^{\infty} c_k x^k. \tag{1.7.7}$$

Линейный дифференциальный оператор $\mathcal{L}(x)$ имеет собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, которые можно упорядочить по возрастанию вещественной части $\text{Re } \lambda_1 \leq \text{Re } \lambda_2 \leq \dots \leq \text{Re } \lambda_n$.

К вершине $(v, 1)$ многоугольника $\Gamma(f_1)$ примыкает верхнее ребро $\Gamma_1^{(1)}$ с внешней нормалью $-(1, r)$ (рис. 7 а). Обозначим через $[r]$ целую часть r , если $r > 0$, и 0, если $r \leq 0$.

Пусть в замене переменных (1.7.4)

$$k_m : k_m > \text{Re } \lambda_n \text{ и } k_m > [r] + 1 + 2n, \tag{1.7.8}$$

тогда разложение (1.7.7) единственное, все c_k постоянны и однозначно определены. При этом ребро $\Gamma_1^{(1)}$ и соответствующее ему укороченное уравнение не зависят от k_m (рис. 7 б).

Если носитель $\mathbf{S}(f_1)$ уравнения (1.7.5) имеет точки слева от прямой $q_1 = v$, то сделаем в уравнении (1.7.5) степенное преобразование

$$u = x^\alpha w \quad \text{с} \quad \alpha = [r] + 1 + n. \quad (1.7.9)$$

В результате этого преобразования получаем уравнение, носитель которого лежит в множестве $\{q_1 \geq v, q_2 \geq 0\}$ и обладает свойствами (1.7.6), где в свойстве 5 справа стоит $\{q_1 \geq v + n + 1\}$. Преобразованный многоугольник $\tilde{\Gamma}(f_1)$ показан на рис. 7 б пунктиром. Будем считать, что уравнение (1.7.5) уже имеет такой вид, что носитель $\mathbf{S}(f_1)$ лежит в множестве $\{q_1 \geq v, q_2 \geq 0\}$ и выполнено свойство 5 в (1.7.6) с n вместо k_m .

Далее используем метод мажорант и некий новый прием. Рассмотрим ряд

$$\varphi(x) = \sum_{k=k_m+1}^{\infty} C_k x^k, \quad (1.7.10)$$

где $C_k \in \mathbb{R}, C_k \geq 0$. Ряд (1.7.10) мажорирует ряд (1.7.7), если

$$C_k \geq |c_k|, \quad k = k_m + 1, \dots. \quad (1.7.11)$$

Построим уравнение

$$\sigma \varphi^{(n)} = xG(x, \varphi^{(n)}), \quad \sigma = \text{const} \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0, \quad (1.7.12)$$

для которого разложение (1.7.10) является формальным решением и мажорирует решение (1.7.7) уравнения (1.7.5). Для этого запишем уравнение (1.7.5) в виде

$$\mathcal{L}(x)u = -g(x, u, u', \dots, u^{(n)}). \quad (1.7.13)$$

Пусть в характеристическом многочлене $\nu(k)$ дифференциальной суммы $\mathcal{L}(x)u$ коэффициент ν_n при старшей степени k^n отличен от единицы. По условию (1.7.2) имеем $\nu_n \neq 0$. Разделив уравнение на ν_n , получаем такое уравнение, в котором $\nu_n = 1$. Будем считать, что это справедливо для самого уравнения (1.7.5). Тогда для $k > n$ имеем

$$|\nu(k)| \geq \sigma k(k-1) \cdots (k-n+1), \quad (1.7.14)$$

где σ — некоторое положительное число. Поскольку $\mathcal{L}(x)x^k = x^{k+v}\nu(k)$, то при $x > 0$ и $k > n$ имеем

$$|\mathcal{L}(x)x^k| \geq \sigma x^{v+n} \frac{d^n}{dx^n} x^k.$$

По функции $-g$ построим функцию $G^*(x, u^{(n)})$ следующим образом. Все коэффициенты β_i в многочлене $-g(x, u, u', \dots, u^{(n)})$ заменим на их модули $|\beta_i|$. Далее, функцию u и все ее производные $u^{(k)}$ заменим на выражения $x^{n-k}u^{(n)}$. Заметим, что если $u = x^r$, то $u^{(k)} = r(r-1) \cdots (r-k+1) x^{r-k}$, а $x^{n-k}u^{(n)} = r(r-1) \cdots (r-n+1) x^{r-k}$, т. е. во втором случае коэффициент не меньше, чем в первом. Таким образом, получаем, что носитель $\mathbf{S}(-g)$ совпадает с носителем $\mathbf{S}(G^*)$. Согласно свойству $q_1 \geq v + 1$ носителя $\mathbf{S}(g)$ отношение $G^*(x, u^{(n)})/x^{v+n+1} \stackrel{\text{def}}{=} G(x, u^{(n)})$ является многочленом от x

и $u^{(n)}$. Действительно, согласно указанному свойству многочлен g содержит моном $u^{(k)}x^l$ только с $l - k \geq v + 1$. После нашей замены он переходит в моном $u^{(n)}x^{n-k}x^l$ с $n - k + l \geq v + 1 + n$. Для мономов второй степени по u дело обстоит еще проще, многочлен g содержит моном $u^{(j)}u^{(k)}x^l$ только с $l - k - j \geq v + 1$, который после нашей замены переходит в моном $(u^{(n)})^2 x^{n-k}x^{n-j}x^l$ с $2n - k - j + l \geq v + 1 + 2n$. Для более высоких степеней u неравенства становятся еще более сильными. Для мономов, не содержащих u , показатели степени можно сделать сколь угодно большими, увеличив длину начальной части разложения решения (1.7.3). Для членов, нелинейных по u , можно сделать сколь угодно большие степени по x с помощью степенного преобразования. Лишь линейные члены по u не улучшаются этими способами, но они уже обладают нужным свойством: $G^*(x, u^{(n)})/x^{v+n+1}$ — это многочлен от x и $u^{(n)}$. Итак, по уравнению (1.7.5) построено уравнение (1.7.12).

Теперь докажем, что решение (1.7.10) уравнения (1.7.12) мажорирует решение (1.7.7) уравнения (1.7.5). Доказательство проведем индукцией по k . Пусть неравенства (1.7.11) выполнены для $k < j$; докажем, что они выполнены для $k = j$.

Сначала заметим, что согласно п. 2.3 гл. 1 при подстановке ряда (1.7.7) в уравнение (1.7.13) для каждого коэффициента c_k получаем уравнение вида

$$\mathcal{L}(x)c_k x^k = -b_k x^{k+v}, \quad k \geq k_m + 1, \tag{1.7.15}$$

где коэффициенты b_k зависят от предыдущих коэффициентов разложения c_k с $k < j$ и от коэффициентов уравнения (1.7.13). Согласно следствию 1.2.1 систему уравнений (1.7.15) можно записать в виде

$$\nu(k)c_k = -b_k, \quad k \geq k_m + 1. \tag{1.7.16}$$

Для уравнения (1.7.12) аналогично получаем равенства

$$\sigma k(k-1) \cdots (k-n+1)C_k = B_k, \quad k \geq k_m + 1, \tag{1.7.17}$$

где коэффициенты B_k находятся так же из уравнения (1.7.12), как коэффициенты b_k — из уравнения (1.7.5). При этом B_j является многочленом с положительными коэффициентами от предыдущих C_k и B_k с $k < j$. По индуктивному предположению и построению имеем $B_j \geq |b_j|$. Кроме того,

$$|x^{-(v+j)}\mathcal{L}(x)x^j| = |\nu(j)| \geq \sigma j(j-1) \cdots (j-n+1).$$

Поэтому

$$C_j = \frac{B_j}{\sigma j(j-1) \cdots (j-n+1)} \geq |c_j| = \frac{|b_j|}{|\nu(j)|}.$$

Для начала индукции утверждение очевидно. Следовательно, решение (1.7.10) уравнения (1.7.12) мажорирует решение (1.7.7) уравнения (1.7.5).

Теперь напомним теорему Коши о неявной функции в ее аналитическом варианте [34]. Пусть функция $f(x, z)$ аналитична в нуле $x = z = 0$ (т. е. разлагается в сходящийся степенной ряд по x и z), $f(0, 0) = 0$, и $\partial f / \partial z \neq 0$ при $x = z = 0$. Тогда уравнение $f(x, z) = 0$ имеет единственное решение

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} d_k x^k,$$

которое аналитично вблизи нуля $x = 0$, т. е. ряд сходится для достаточно малых $|x|$.

Применим эту теорему Коши к уравнению (1.7.12), полагая в нем $x = x$, $z = \varphi^{(n)}$ и $f(x, z) = \sigma\varphi^{(n)} - xG(x, \varphi^{(n)}) = \sigma z - xG(x, z)$. При этом функция $f(x, z)$ — многочлен, т. е. она аналитична в точке $x = z = 0$. Кроме того, $f(0, 0) = 0$ и $\partial f/\partial z = \sigma \neq 0$ в точке $x = z = 0$. Следовательно, выполнены все условия теоремы Коши. Согласно этой теореме уравнение (1.7.12) имеет единственное решение

$$z = \varphi^{(n)} = \sum_{k=k_m-n+1}^{\infty} d_k x^k, \quad (1.7.18)$$

которое является аналитическим, т. е. разложение сходится для достаточно малых $|x|$.

Решение (1.7.10) получается n -кратным интегрированием решения (1.7.18), следовательно, оно также аналитично для малых $|x|$. Наконец, оно мажорирует решение (1.7.7) уравнения (1.7.5). Поэтому решение (1.7.7) также аналитично. ■

Очевидно, что $\pi(f_1) = \pi(f)$, но, вообще говоря, $\pi(\mathcal{L}u) \leq \pi(\widehat{f})$, хотя строгое неравенство здесь имеется только в вырожденных случаях. Другие условия сходимости формального решения (1.7.3) уравнения (1.2.2) см. в [4, 44].

Теорема 1.7.2 применима к следующим семействам базовых формальных решений типа 1 шестого уравнения Пенлеве, перечисленным во Введении: семейство \mathcal{A}_0 ; семейства \mathcal{B}_i с $\theta_i \notin \mathbb{Z}$, $i = 1, 2$; семейства \mathcal{B}_6 , \mathcal{C}_0^∞ , \mathcal{B}_{10} .

К настоящему времени нет общей теории сходимости экзотических разложений (типа 4 или 5). Известны только случаи, когда такое разложение сворачивается в конкретную функцию. Для уравнения Р6 такие случаи представлены во Введении при описании базовых семейств формальных решений уравнения Р6.

Глава 2. Разложения решений уравнения Р6 в случае $a \cdot b \neq 0$ вблизи нуля и бесконечности

§ 1. Общие свойства уравнения

1.1. **Постановка задачи.** Шестое уравнение Пенлеве [39] имеет вид

$$y'' = \frac{(y')^2}{2} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-x} \right) - y' \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-x} \right) + \frac{y(y-1)(y-x)}{x^2(x-1)^2} \left[a + b \frac{x}{y^2} + c \frac{x-1}{(y-1)^2} + d \frac{x(x-1)}{(y-x)^2} \right], \quad (2.1.1)$$

где a, b, c, d — комплексные параметры, x и y — комплексные переменные, $y' = dy/dx$. Это уравнение имеет три особые точки $x = 0$, $x = \infty$ и $x = 1$.

При всех значениях параметров уравнения в окрестностях особых точек ищем асимптотические разложения его решений, которые при $x \rightarrow 0$ или $x \rightarrow \infty$ имеют вид

$$y = c_r x^r + \sum_s c_s x^s, \quad (2.1.2)$$

где показатели степени r и s — комплексные числа. Согласно (1.1.5) $\omega = -1$, если $x \rightarrow 0$, и $\omega = 1$, если $x \rightarrow \infty$. В разложениях (2.1.2) $\omega \operatorname{Re} s < \omega \operatorname{Re} r$ и $\omega \operatorname{Re} s$ убывают. При этом различаются три типа разложений (2.1.2) в зависимости от вида комплексных коэффициентов c_r и c_s :

1. c_r и c_s — постоянные (*степенные разложения*).
2. c_r — постоянный, c_s — многочлены от $\ln x$ (*степенно-логарифмические разложения*).
3. c_r и c_s — степенные ряды по убывающим степеням $\ln x$ (*сложные разложения*).

Кроме того, ищем асимптотические разложения решений уравнения (2.1.1), которые при $x \rightarrow 0$ или при $x \rightarrow \infty$ имеют вид

$$y = \sum_r c_r x^r + \sum_s c_s x^s, \tag{2.1.3}$$

где все $\operatorname{Re} r$ одинаковы и $\omega \operatorname{Re} s < \omega \operatorname{Re} r$, первая сумма содержит более одного слагаемого, коэффициенты c_r и c_s — многочлены от $\ln x$. При этом различаются три типа разложений (2.1.3) в зависимости от структуры первой суммы:

4. Первая сумма в (2.1.3) содержит конечное число слагаемых и для крайних значений $\operatorname{Im} r$ коэффициенты c_r — постоянны (*полужэкзотические разложения*).
5. Первая сумма в (2.1.3) содержит бесконечное число слагаемых, но $\operatorname{Im} r$ ограничен с одной стороны. Для крайнего значения $\operatorname{Im} r$ коэффициент c_r — постоянный (*экзотические разложения*).
6. Первая сумма в (2.1.3) содержит бесконечное число слагаемых и $\operatorname{Im} r$ неограничен ни снизу, ни сверху (*сверхэкзотические разложения*).

Мы также предполагаем, что $\arg x$ ограничен с двух сторон.

Замечание 2.1.1. Поскольку носитель уравнения (2.1.1) вещественный и степенные асимптотики $c_r x^r$ решений уравнения имеют не более одного критического числа, то в экзотических разложениях (2.1.3) решений уравнения (2.1.1) все коэффициенты постоянны.

Представим уравнение (2.1.1) в виде дифференциальной суммы. Для этого умножим его на $2x^2(x-1)^2y(y-1)(y-x)$ и перенесем в левую сторону правую часть уравнения. Получаем уравнение

$$\begin{aligned} f(x, y) \stackrel{def}{=} & 2y''x^2(x-1)^2y(y-1)(y-x) - (y')^2[x^2(x-1)^2(y-1)(y-x) + \\ & + x^2(x-1)^2y(y-x) + x^2(x-1)^2y(y-1)] + \\ & + 2y'[x(x-1)^2y(y-1)(y-x) + x^2(x-1)y(y-1)(y-x) + \\ & + x^2(x-1)^2y(y-1)] - [2ay^2(y-1)^2(y-x)^2 + 2bx(y-1)^2(y-x)^2 + \\ & + 2c(x-1)y^2(y-x)^2 + 2dx(x-1)y^2(y-1)^2] = 0. \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

1.2. Носитель и многоугольник. Носитель левой части уравнения (2.1.4), т. е. множество показателей степени ее мономов, есть

$$S(f) = \{Q = (q_1, q_2) : q_1 = 0, 1, 2, 3, \quad q_2 = 3 - q_1 + k, \quad k = 0, 1, 2, 3\}.$$

Носитель $S(f)$ и его выпуклая оболочка $\Gamma(f)$ изображены на рис. 8 а.

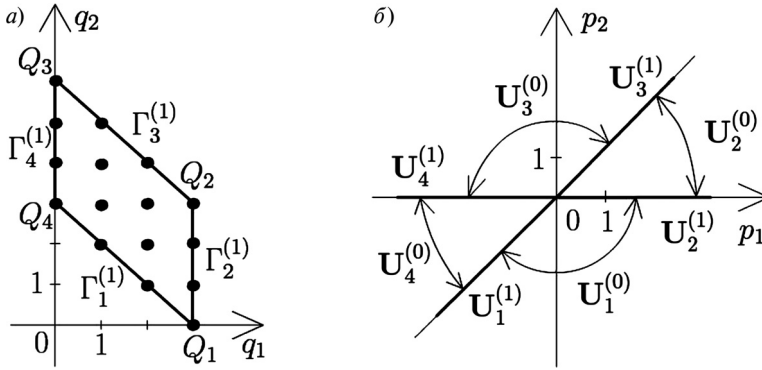


Рис. 8. Носитель уравнения (2.1.4), его многоугольник, ребра и вершины (а); нормальные конусы ребер и вершин (б)

Так как параметры $a, b \neq 0$, то многоугольник $\Gamma(f)$ имеет вид параллелограмма с вершинами $\Gamma_j^{(0)} = Q_j$, где $Q_1 = (3, 0), Q_2 = (3, 3), Q_3 = (0, 6), Q_4 = (0, 3)$ и ребрами $\Gamma_1^{(1)}, \Gamma_2^{(1)}, \Gamma_3^{(1)}, \Gamma_4^{(1)}$, показанными на рис. 8 а. Носитель $S(f)$ уравнения (2.1.4) лежит в целочисленной решетке \mathbb{Z}^2 .

1.3. Нормальные конусы. Вещественные нормальные конусы $U_j^{(0)}$ и $U_j^{(1)}$ вершин $\Gamma_j^{(0)}$ и ребер $\Gamma_j^{(1)}$ суть (см. рис. 8 б):

$$\begin{aligned} U_1^{(0)} &= \{p_2 < 0, p_2 < p_1\}, & U_1^{(1)} &= \{p_1 = p_2 < 0\}, \\ U_2^{(0)} &= \{p_1 > p_2 > 0\}, & U_2^{(1)} &= \{p_1 > 0, p_2 = 0\}, \\ U_3^{(0)} &= \{p_2 > p_1, p_2 > 0\}, & U_3^{(1)} &= \{p_1 = p_2 > 0\}, \\ U_4^{(0)} &= \{p_1 < p_2 < 0\}, & U_4^{(1)} &= \{p_1 < 0, p_2 = 0\}. \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

Согласно п. 5.3 гл. 1 для $\omega = -1$ разбиение комплексной плоскости $L_-: r \in \mathbb{C}$ на комплексные нормальные конусы $\check{U}_j^{(d)}$ показано на рис. 5.

1.4. Симметрии. Шестое уравнение Пенлеве имеет три основные симметрии, возникающие при заменах переменных:

- 1) $x = 1/x^*, y = 1/y^*$; 2) $x = \check{x}, y = \check{x}/\check{y}$; 3) $x = 1 - x^\circ, y = 1 - y^\circ$.

Теорема 2.1.1. Уравнение (2.1.4) переходит в себя при подстановке

$$(x, y, a, b, c, d) = (1/x^*, 1/y^*, -b^*, -a^*, c^*, d^*). \tag{2.1.6}$$

При этом параллелограмм $\Gamma(f)$ отражается относительно своего центра $Q = (3/2, 3)$ (см. рис. 9 а).

Доказательство. При замене $y = 1/y^*$ имеем $y' = -y^*/y^{*2}, y^{*''} = (2y^{*'} - y^*y^{*''})/y^{*3}$. При замене $x = 1/x^*$ имеем $dx^*/dx = -x^{*2}$ и $y^{*'} = -x^{*2}\check{y}'^*$, $y^{*''} = \check{y}^*x^{*4} + 2\check{y}'^*y^{*3}$, где точка означает производную по x^* . Следовательно,

$$y' = x^{*2}\check{y}'^*y^{*-2}, \quad y'' = \frac{2x^{*4}\check{y}^{*2} - x^{*4}\check{y}''^*y^* - 2x^{*3}\check{y}'^*y^*}{y^{*3}}. \tag{2.1.7}$$

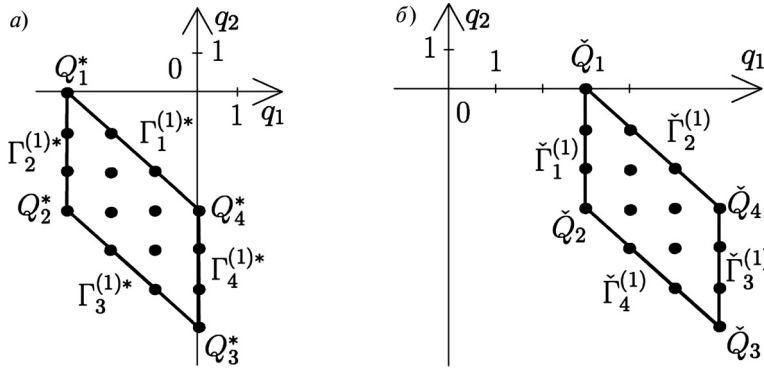


Рис. 9. Многоугольник уравнения (2.1.4) после подстановки (2.1.6) (а) и (2.1.8) (б)

Подставляя в уравнение (2.1.4) выражения (2.1.7), а также $x = 1/x^*$ и $y = 1/y^*$, после сокращений, приведения подобных членов и умножения на $x^{*3}y^{*6}$ получаем уравнение вида (2.1.4), где вместо переменных x, y стоят x^*, y^* , а вместо параметров a, b, c, d стоят $-b^*, -a^*, c^*, d^*$ соответственно. ■

Теорема 2.1.2. Уравнение (2.1.4) переходит в себя при подстановке

$$(x, y, a, b, c, d) = (\check{x}, \check{x}/\check{y}, -\check{b}, -\check{a}, -\check{d} + 1/2, -\check{c} + 1/2). \tag{2.1.8}$$

При этом параллелограмм $\Gamma(f)$ отражается относительно горизонтальной оси $q_2 = 3$ и деформируется параллельно этой оси (см. рис. 9 б).

Теорема 2.1.3. Уравнение (2.1.4) переходит в себя при подстановке

$$(x, y, a, b, c, d) = (1 - x^\circ, 1 - y^\circ, a^\circ, -b^\circ, d^\circ). \tag{2.1.9}$$

Доказательства теорем 2.1.2 и 2.1.3 проводятся аналогично доказательству теоремы 2.1.1.

Первые две симметрии переводят разложения решений в окрестности нуля в разложения решений в окрестности бесконечности (и обратно). Тем самым, они позволяют сократить вычисления и проверить полученные результаты. С их помощью одно ребро переводится в любое из остальных трех, вершины $\Gamma_3^{(0)} = Q_3$ и $\Gamma_4^{(0)} = Q_4$ — в вершины $\Gamma_1^{(0)} = Q_1$ и $\Gamma_2^{(0)} = Q_2$ соответственно (и обратно). Поэтому, вычислив разложения решений, соответствующие одному ребру и двум вершинам, с помощью симметрий можно получить решения, соответствующие остальным трем ребрам и двум вершинам. Третья симметрия переводит разложения решений в окрестности нуля в разложения решений в окрестности единицы.

1.5. Исключительные решения.

Теорема 2.1.4. Уравнение (2.1.1) имеет четыре исключительных решения:

- $\mathcal{I}_1 : y(x) = 0$ при $b = 0$;
- $\mathcal{I}_2 : y(x) = 1$ при $c = 0$;
- $\mathcal{I}_3 : y(x) = x$ при $d = 1/2$;
- $\mathcal{I}_4 : y(x) = \infty$ при $a = 0$.

Доказательство. Мы считаем, что при $y = \text{const}$ квадрат y^2 является двукратным нулем. Поэтому отношения y^2/y при $y = 0$ и $y^2/(y-1)$ при $y = 1$ являются однократными нулями. Наконец, при $y = x$ в уравнении (2.1.1) с $d = 1/2$ дроби со знаменателем $y - x$ взаимно уничтожаются. Решение $y(x) = 0$ при $b = 0$ симметрией (2.1.6) переводится в случай $y(x) = \infty$ при $a = 0$. ■

§ 2. Разложения вблизи нуля, соответствующие вершинам

2.1. Выбор вершин. Так как $x \rightarrow 0$, то $\omega = -1$ и конус задачи $\mathcal{K} = \{p_1 < 0\}$. Согласно (2.1.5) с конусом задачи пересекаются вещественные нормальные конусы $\mathbf{U}_1^{(0)}, \mathbf{U}_3^{(0)}, \mathbf{U}_4^{(0)}$ вершин $\Gamma_1^{(0)} = Q_1, \Gamma_3^{(0)} = Q_3, \Gamma_4^{(0)} = Q_4$ соответственно. Рассмотрим их последовательно:

Вершине $\Gamma_1^{(0)}$ соответствует укороченное уравнение $\widehat{f}_1^{(0)}(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} -2bx^3 = 0$, которое не имеет решений.

Вершине $\Gamma_3^{(0)}$ соответствует укороченное уравнение $\widehat{f}_3^{(0)}(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} -2ay^6 = 0$, которое имеет только тривиальные решения.

2.2. Разложения решений, соответствующие вершине $\Gamma_4^{(0)}$. Вершина $\Gamma_4^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} Q_4$ — левая нижняя, ей соответствуют значение $\omega = -1$ и укороченное уравнение

$$\widehat{f}_4^{(0)}(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} 2x^2y(y')^2 - 2xy^2y' - 2x^2y^2y'' = 0. \quad (2.2.1)$$

Его характеристическое уравнение $\chi(r) \stackrel{\text{def}}{=} 2(r^2 - r - r^2 + r) \equiv 0$ имеет произвольное решение $r \in \mathbb{C}$. Поэтому решением уравнения (2.2.1) является выражение

$$y = c_r x^r \quad (2.2.2)$$

с произвольными комплексными постоянными c_r и r .

Вещественный нормальный конус: $\mathbf{U}_4^{(0)} = \{p_1 < p_2 < 0\}$. Согласно п. 5.3 гл. 1 комплексный нормальный конус — $\check{\mathbf{U}}_4^{(0)} = -(1, r)$, где

$$r : r \in \mathbb{C}, \quad 0 < \text{Re } r < 1. \quad (2.2.3)$$

Вычислим критические числа. Первая вариация

$$\frac{\delta \widehat{f}_4^{(0)}(x, y)}{\delta y} = 2x^2(y')^2 + 4x^2yy' \frac{d}{dx} - 4xyy' - 2xy^2 \frac{d}{dx} - 4x^2yy'' - 2x^2y^2 \frac{d^2}{dx^2}.$$

На укороченном решении $y = c_r x^r$ она дает линейный дифференциальный оператор

$$\mathcal{L}(x) \stackrel{\text{def}}{=} 2c_r^2 x^{2r} \left(r^2 + 2rx \frac{d}{dx} - 2r - x \frac{d}{dx} - 2r(r-1) - x^2 \frac{d^2}{dx^2} \right).$$

Характеристическое уравнение

$$\nu(k) \stackrel{\text{def}}{=} 2c_r^2(k^2 - 2rk + r^2) = 0 \quad (2.2.4)$$

имеет двукратный корень $k_{1,2} = r$.

Конус задачи:

$$\mathcal{K} = \{\text{Re } k > \text{Re } r\}.$$

Так как числа $k_{1,2}$ не лежат в конусе задачи \mathcal{K} , то они не являются критическими. Согласно п. 2.2 гл. 1 носитель разложения решений (2.1.2) имеет вид

$$\mathbf{K} = \{s = r + lr + m(1 - r); l, m \geq 0; l + m > 0; l, m \in \mathbb{Z}\}. \quad (2.2.5)$$

Решению (2.2.2) укороченного уравнения (2.2.1) соответствуют разложения решений полного уравнения (2.1.4)

$$\mathcal{A}_0: y = c_r x^r + \sum c_s x^s \quad (\text{сумма по } s \in \mathbf{K}), \quad (2.2.6)$$

где r из (2.2.3), \mathbf{K} из (2.2.5), комплексные коэффициенты: c_r — ненулевая комплексная постоянная, все c_s постоянны и однозначно определены.

Изучим разложения (2.2.6). Носитель (2.2.5) имеет две образующие r и $1 - r$ и располагается на комплексной плоскости в угле с вершиной в точке r , стороны которого параллельны векторам $(\operatorname{Re} r, \operatorname{Im} r)$ и $(\operatorname{Re}(1 - r), \operatorname{Im}(1 - r))$. При $\operatorname{Im} r > 0$ угол V изображен на рис. 6 б. Разложения (2.2.6) являются степенными.

Итак, доказана

Теорема 2.2.1. *При $x \rightarrow 0$ существует двупараметрическое (по c_r и r) семейство разложений решений с постоянными коэффициентами, определенное формулой*

$$\mathcal{A}_0: y = c_r x^r + \sum_s c_s x^s, \quad (2.2.6)$$

где комплексные показатели степени таковы: r — произвольный с $\operatorname{Re} r \in (0, 1)$, $s \in \mathbf{K} = \{r + lr + m(1 - r); l, m \geq 0; l + m > 0; l, m \in \mathbb{Z}\}$; комплексные коэффициенты таковы: $c_r \neq 0$ — произвольная постоянная, остальные c_s постоянны и однозначно определены.

Семейство \mathcal{A}_0 было известно ранее. В [62, 64, 73–76] доказана его сходимость для малых $|x|$ разными способами. Она также следует из теоремы 1.7.2.

При $\operatorname{Im} r = 0$ носитель (2.2.5) разложения (2.2.6) вещественный.

Рассмотрим случай, когда $\operatorname{Re} r \neq 0$, $\operatorname{Re} r \neq 1$ и $\operatorname{Im} r \neq 0$. Изобразим на плоскости $\operatorname{Re} q_1$, $\operatorname{Im} q_1$ множество $\mathbf{K} \cup \{r\}$. Пусть, например, $\operatorname{Im} r = 1$. При разных значениях $\operatorname{Re} r = 1/4$, $\operatorname{Re} r = 1/2$, $\operatorname{Re} r = 3/4$ это множество показано на рис. 10 а, 10 б, 10 в соответственно. Из рис. 10 б видно, что при $\operatorname{Re} r = 1/2$ значению $\operatorname{Re} s = 1$ соответствуют два значения $\operatorname{Im} s = 0$ и $\operatorname{Im} s = 2$, что отлично от случая $\operatorname{Im} r = 0$ (см. [12, 26]).

Вычислим второе приближение разложения (2.2.6) в случае комплексного носителя (2.2.5).

В случае $1 > \operatorname{Re} r > 1/2$ второе приближение решения есть (см. рис. 10 в)

$$y = c_r x^r + c_1 x. \quad (2.2.7)$$

Второе приближение уравнения (2.1.4) есть $\widehat{f}_4^{(0)}(x, y) = -x^3(y')^2 + 2x^3yy'' - 2(b-d)xy^2$. Коэффициент $c_1 = -b_1/\nu(1)$, где

$$b_1 \stackrel{\text{def}}{=} x^{-2r-1} \widehat{f}_4^{(0)}(x, c_r x^r) = c_r^2(-2(b-d) - 2r + r^2),$$

$\nu(1) = 2c_r^2(r-1)^2$. Получаем

$$c_1 = \frac{2(b-d) - (r-1)^2 + 1}{2(r-1)^2}. \quad (2.2.8)$$

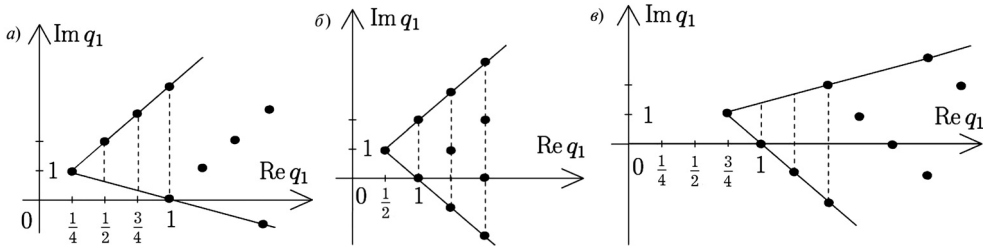


Рис. 10. Носитель разложения (2.2.6) при $r = 1/4 + i$ (а); $r = 1/2 + i$ (б); $r = 3/4 + i$ (в)

В случае $0 < \text{Re } r < 1/2$ второе приближение решения есть (см. рис. 10 а)

$$y = c_r x^r + c_{2r} x^{2r}. \tag{2.2.9}$$

Второе приближение уравнения (2.1.4) есть $\widehat{f}_4^{(0)}(x, y) = -3x^2 y^2 (y')^2 + 2xy^3 y' + 2x^2 y^3 y'' - 2ay^4 + 2cy^4$. Коэффициент $c_{2r} = -b_{2r}/\nu(2r)$, где $b_{2r} \stackrel{\text{def}}{=} x^{-4r} \widehat{f}_4^{(0)}(x, c_r x^r) = -c_r^4(2(a - c) + r^2)$, $\nu(2r) = 2c_r^2 r^2$. Получаем

$$c_{2r} = c_r^2 \frac{2(a - c) + r^2}{2r^2}. \tag{2.2.10}$$

В случае $\text{Re } r = 1/2, \text{Im } r \neq 0$ второе приближение решения есть (см. рис. 10 б) $y = c_r x^r + c_1 x + c_{2r} x^{2r}$, где коэффициенты c_1 и c_{2r} определены ранее формулами (2.2.8) и (2.2.10) соответственно.

В случае $r = 1/2$ второе приближение решения есть (см. рис. 10 в) $y = c_{1/2} \sqrt{x} + c_1 x$, где $c_{1/2}$ — произвольная постоянная, коэффициент

$$c_1 = \frac{3 + 8(b - d) + c_{1/2}^2 + 8c_{1/2}^2(a - c)}{2} \tag{2.2.11}$$

есть сумма (2.2.8) и (2.2.10).

Вычислим нестепенные решения уравнения (2.2.1). Преобразуем его:

$$g(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} y^{-3} \widehat{f}_4^{(0)}(x, y) = 2x^2 \frac{(y')^2}{y^2} - 2x \frac{y'}{y} - 2x^2 \frac{y''}{y} = 0, \tag{2.2.12}$$

так что $S(g) = \{0\}$. Положим $g^* \stackrel{\text{def}}{=} 2x^2 \frac{(y')^2}{y^2} - 2x^2 \frac{y''}{y}$, тогда $\text{coef}(g^*) = 2 - 2 = 0$.

По теоремам 1.3.5 и 1.3.6 возможно существуют нестепенные решения уравнения (2.2.1), стремящиеся к бесконечности. Сделаем логарифмические преобразования $\xi = \ln x, \eta = d \ln y/d\xi$ в уравнении (2.2.12). Производную по ξ будем обозначать точкой. Тогда при замене $\xi = \ln x$ имеем

$$y' = \frac{\dot{y}}{x}, \quad y'' = \frac{\ddot{y} - \dot{y}}{x^2}. \tag{2.2.13}$$

При этом уравнение (2.2.12) примет вид

$$2 \frac{\dot{y}^2 - \ddot{y}y}{y^2} = 0. \tag{2.2.14}$$

Сделаем в выражении (2.2.14) преобразование $\eta = d \ln y/d\xi$, тогда

$$\dot{y} = \eta y, \quad \ddot{y} = (\dot{\eta} + \eta^2)y. \tag{2.2.15}$$

При этом получаем уравнение $-2\dot{\eta} = 0$. Оно имеет решение $\eta = \text{const}$, которому соответствует степенное решение $y = \tilde{c}x^\eta$, $\tilde{c} = \text{const}$, т. е. (2.2.2), и других решений у укороченного уравнения (2.2.1) нет. Следовательно, данной вершине не соответствует никакое сложное разложение решений уравнения (2.1.4).

§ 3. Разложения вблизи нуля, соответствующие ребру $\Gamma_4^{(1)}$

3.1. Предварительный анализ. Ребро $\Gamma_4^{(1)}$ — левое вертикальное, ему соответствуют значения $\omega = -1$, $r = 0$ и укороченное уравнение

$$\begin{aligned} \tilde{f}_4^{(1)}(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} & 2x^2 y (y')^2 - 3x^2 y^2 (y')^2 - 2xy^2 y' + 2xy^3 y' - 2x^2 y^2 y'' + \\ & + 2x^2 y^3 y'' - 2ay^4 + 2cy^4 + 4ay^5 - 2ay^6 = 0. \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

Вещественный нормальный конус: $U_4^{(1)} = \{-\lambda(1, 0), \lambda > 0\}$.

Характеристическое уравнение $\chi(\rho) \equiv 0$, соответствующее нижней вершине $Q_4 = (0, 3)$ ребра $\Gamma_4^{(1)}$, имеет корень $\rho = r + i\gamma$ с $r = 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma \neq 0$. Вектор $\omega(1, \text{Re } \rho) \in U_4^{(1)}$. Согласно случаю 1 теоремы 1.5.1 здесь существуют два семейства экзотических разложений \mathcal{B}_0^r с $\tau = \text{sgn } \gamma$, соответствующих собственному значению $\rho = i\gamma$.

Согласно п. 5.3 гл. 1 укороченное уравнение (2.3.1) имеет решение в виде ряда

$$y = c_\rho x^\rho + \sum_{k=2}^{\infty} \tilde{c}_{k-1} x^{k\rho}, \quad (2.3.2)$$

где первый член этого ряда $y = c_\rho x^\rho$ — это решение укороченного уравнения (2.2.1), соответствующего вершине Q_4 и изученного в п. 2.2 гл. 2. Характеристическое уравнение (2.2.4) имеет корень $k_{1,2} = \rho$. Согласно п. 5.3 гл. 1 конус задачи $\mathcal{K} = \{\text{Re } k = \text{Re } \rho, \tau \text{ Im } k > \tau \text{ Im } \rho\}$. Числа $k_{1,2} = \rho$ не лежат в конусе задачи, поэтому критических чисел нет.

Согласно п. 2.2 гл. 1 носитель разложений решений (2.1.3) есть

$$\mathbf{K} = \{r = k\rho, k \geq 2; s = \rho + l\rho + m(1 - \rho); l \geq 0; m \geq 1; k, l, m \in \mathbb{Z}\}. \quad (2.3.3)$$

Здесь получаем два семейства экзотических разложений

$$\mathcal{B}_0^r: \quad y = c_\rho x^\rho + \sum_s c_s x^s = x^\rho \left(c_\rho + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{c}_k x^{k\rho} \right) + \sum_{\text{Re } s \geq 1} c_s x^s, \quad (2.3.4)$$

где $\rho \neq 0$ — произвольная чисто мнимая постоянная, r и s пробегает множество (2.3.3), комплексные коэффициенты таковы: $c_\rho \neq 0$ — произвольная постоянная, \tilde{c}_k и c_s постоянны и однозначно определены.

Семейства \mathcal{B}_0^r существуют при $a \neq 0$. Более точный вид ряда (2.3.2) см. в (2.3.50) и в (2.3.85).

Степенные решения укороченного уравнения (2.3.1) ищем в виде $y = c_0 \neq 0$, $c_0 = \text{const}$, поскольку $r = 0$. Вычислим c_0 . Определяющее уравнение есть

$$\tilde{f}(c_0) \stackrel{\text{def}}{=} c_0^{-3} \tilde{f}_4^{(1)}(x, c_0) \stackrel{\text{def}}{=} -2ac_0(c_0^2 - 2c_0 + 1 - c/a) = 0. \quad (2.3.5)$$

Высота ребра равна трем. Уравнение (2.3.5) третьей степени. Оно всегда имеет корень $c_0 = 0$. Согласно п. 3.2 гл. 1 надо выделить случаи, когда уравнение $c_0^2 - 2c_0 + 1 - c/a = 0$ имеет нулевой, бесконечный и кратные корни. Оно не имеет бесконечного корня, но имеет нулевой корень $c_0 = 0$ при $a = c$ и двукратный корень $c_0 = 1$ при $c = 0$. Поэтому рассмотрим три случая: $a \neq c \neq 0$, $a = c \neq 0$ и $a \neq 0, c = 0$.

Замечание 2.3.1. В качестве основного значения квадратного корня из комплексного числа будем брать его главное значение, тогда для комплексного числа z его квадратный корень можно записать в виде $\pm\sqrt{z}$.

3.2. Разложения решений при $a \neq c \neq 0$. Сначала вычислим в этом случае степенные, степенно-логарифмические и экзотические разложения решений уравнения (2.1.4), соответствующие ребру $\Gamma_4^{(1)}$.

Уравнение (2.3.5) имеет два ненулевых корня

$$c_{0i} = 1 + (-1)^i \sqrt{\frac{c}{a}}, \quad i = 1, 2. \quad (2.3.6)$$

Первая вариация:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \widehat{f}_4^{(1)}(x, y)}{\delta y} &= 2x^2(y')^2 + 4x^2yy' \frac{d}{dx} - 6x^2y(y')^2 - 6x^2y^2y' \frac{d}{dx} - 4xyy' - \\ &\quad - 2xy^2 \frac{d}{dx} + 6xy^2y' + 2xy^3 \frac{d}{dx} - 4x^2yy'' - 2x^2y^2 \frac{d^2}{dx^2} + \\ &\quad + 6x^2y^2y'' + 2x^2y^3 \frac{d^2}{dx^2} - 8ay^3 + 8cy^3 + 20ay^4 - 12ay^5. \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

Линейный дифференциальный оператор:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) &= -2xc_{0i}^2 \frac{d}{dx} + 2xc_{0i}^3 \frac{d}{dx} - 2x^2c_{0i}^2 \frac{d^2}{dx^2} + 2x^2c_{0i}^3 \frac{d^2}{dx^2} - 8ac_{0i}^3 + \\ &\quad + 8cc_{0i}^3 + 20ac_{0i}^4 - 12ac_{0i}^5. \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

Характеристическое уравнение есть

$$\nu(k) \stackrel{\text{def}}{=} 2c_{0i}^2(k^2(c_{0i} - 1) - 4c_{0i}(c - a) + 10ac_{0i}^2 - 6ac_{0i}^3) = 0. \quad (2.3.9)$$

С учетом c_{0i} из (2.3.6) оно имеет два корня для каждого значения $i = 1, 2$:

$$k_i = \tau(\sqrt{2c} + (-1)^i \sqrt{2a}), \quad i = 1, 2, \quad \tau = \pm 1. \quad (2.3.10)$$

Согласно п. 5.3 гл. 1 для каждого значения $i = 1, 2$ здесь имеются два конуса задачи

$$\mathcal{K}_i^\tau = \{s : \operatorname{Re} s \geq 0, \text{ если } \operatorname{Re} s = 0, \text{ то } \tau \operatorname{Im} s > 0\}. \quad (2.3.11)$$

Положим $\theta_i = \sqrt{2c} + (-1)^i \sqrt{2a}$. Для фиксированного значения $i = 1, 2$ будем различать три случая.

Случай 1. $\operatorname{Re} \theta_i = 0$. В этом случае в каждом из конусов задачи \mathcal{K}_i^τ имеется по одному критическому числу. Пусть для определенности $\operatorname{Im} \theta_i > 0$, тогда $\theta_i \in \mathcal{K}_i^+$ и $-\theta_i \in \mathcal{K}_i^-$. Носитель разложений решений есть

$$\mathbf{K} = \{s = l, l \in \mathbb{N}\}. \quad (2.3.12)$$

С учетом критических чисел $k_i \stackrel{\text{def}}{=} \tau\theta_i$ имеем два множества

$$\mathbf{K}(\tau\theta_i) = \{s = l + m\tau\theta_i, l, m \in \mathbb{Z}, l, m \geq 0, l + m > 0\}. \quad (2.3.13)$$

Поскольку критические числа $\tau\theta_i$ не лежат в \mathbf{K} , то согласно пп. 2.2 и 2.3 гл. 1 им соответствуют два семейства разложений

$$\mathcal{B}_i^T : y = c_{0i} + \sum_s c_{si} x^s, \quad i = 1, 2, \quad (2.3.14)$$

где $s \in \mathbf{K}(\tau\theta_i)$, комплексные коэффициенты: c_{0i} из (2.3.6), c_{si} с $s = \tau\theta_i$ — произвольная постоянная, остальные c_{si} постоянны и однозначно определены. Носитель $\mathbf{K}(\tau\theta_i)$ каждого из разложений (2.3.14) располагается в четверти комплексной плоскости: $V_+^T = \{\text{Re } s \geq 0, \tau \text{Im } s \geq 0\}$.

Разложения (2.3.14) являются экзотическими, если c_{si} с $s = \tau\theta_i$ — ненулевая произвольная постоянная.

В случае $c_{si} = 0$ с $s = \tau\theta_i$ разложения (2.3.14) являются разложениями по целым степеням x . Семейства таких разложений обозначим \mathcal{B}_i , $i = 1, 2$.

Разложение (2.3.14) в случае $c_{si} = 0$ с $s = \tau\theta_i$ (по целым степеням x) было известно [54, § 46]. Согласно теореме 1.7.2 оно сходится для достаточно малых $|x|$.

В случае $c_{si} = 0$ с $s = \tau\theta_i$ второе приближение разложений решений (2.3.14) есть $y = c_{0i} + c_{1i}x$. Вычислим коэффициент c_{1i} , который согласно п. 2.6 гл. 1 определяется из уравнения $c_{1i} = -b_{1i}/\nu(1)$. Второе приближение уравнения (2.1.4), соответствующее данному ребру, есть

$$\begin{aligned} \widehat{f}_4^{(1)}(x, y) = & -2(b-d)xy^2 + 2x^3y''y + 4(a+b-c-d)xy^3 + 6x^2y'y^2 + \\ & + 2x^3y''y^2 - x^3(y')^2 - 2x^3(y')^2y - 2(4a+b+c-d)xy^4 - \\ & - 6x^2y'y^3 - 4x^3y''y^3 + 6x^3(y')^2y^2 + 4axy^5. \end{aligned}$$

Коэффициент

$$b_{1i} \stackrel{\text{def}}{=} x^{-1} \widehat{f}_4^{(1)}(x, c_{0i}) = 2c_{0i}^2(-b+d+2(a+b-c-d)c_{0i} + (-4a-b-c+d)c_{0i}^2 + 2ac_{0i}^3). \quad (2.3.15)$$

Согласно (2.3.9) $\nu(1) = 2c_{0i}^2(c_{0i} - 1 - 4c_{0i}(c-a) + 10ac_{0i}^2 - 6ac_{0i}^3)$. Наконец, с учетом (2.3.5) и (2.3.6) получаем

$$c_{1i} = (-1)^i \sqrt{\frac{c}{a}} \frac{(\sqrt{a} + (-1)^i \sqrt{c})^2 + b - d}{1 - 2(\sqrt{a} + (-1)^i \sqrt{c})^2}. \quad (2.3.16)$$

Положим $k_i = \theta_i$, если $\text{Re } \theta_i > 0$, и $k_i = -\theta_i$, если $\text{Re } \theta_i < 0$.

Случай 2. $\text{Re } \theta_i \neq 0$, $\theta_i \notin \mathbb{Z}$. В этом случае оба конуса задачи \mathcal{K}_i^T содержат одно и то же критическое число k_i . Носитель разложений решений уравнения (2.1.4) с учетом k_i есть

$$\mathbf{K}(k_i) = \{s = l + mk_i, l, m \in \mathbb{Z}, l, m \geq 0, l + m > 0\}. \quad (2.3.17)$$

Так как число k_i не лежит в множестве \mathbf{K} , определенном формулой (2.3.12), то согласно п. 2.2 гл. 1 получаем семейство степенных разложений решений уравнения (2.1.4), которые определяются формулой

$$\mathcal{B}_i : y = c_{0i} + \sum c_{si} x^s \quad (\text{сумма по } s \in \mathbf{K}(k_i)), \quad i = 1, 2, \quad (2.3.18)$$

где $\mathbf{K}(k_i)$ из (2.3.17), комплексные коэффициенты таковы: c_{0i} определен формулой (2.3.6), $c_{k_i i}$ — произвольный, остальные c_{si} постоянны и однозначно определены.

Разложение (2.3.18) было известно [54, § 46] только в случае $c_{k_i i} = 0$. Согласно теореме 1.7.2 оно сходится для достаточно малых $|x|$.

Второе приближение разложений решений (2.3.18) зависит от расположения числа $\operatorname{Re} k_i$. Если $\operatorname{Re} k_i > 1$, тогда второе приближение есть $y = c_{0i} + c_{1i}x$, что аналогично случаю $\operatorname{Re} \theta_i = 0$. Коэффициент c_{1i} определен формулой (2.3.16). Если $0 < \operatorname{Re} k_i < 1$, то второе приближение решений есть $y = c_{0i} + c_{k_i i}x^{k_i}$, где коэффициент $c_{k_i i}$ — произвольный. Если $\operatorname{Re} k_i = 1$, то второе приближение решений имеет вид $y = c_{0i} + c_{1i}x + c_{k_i i}x^{k_i}$, где коэффициенты таковы: $c_{k_i i}$ — произвольный, c_{1i} определен формулой (2.3.16).

Случай 3. $\theta_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. В этом случае оба конуса задачи \mathcal{K}_i^T содержат одно и то же критическое число k_i . Поскольку число k_i лежит в множестве \mathbf{K} , определенном формулой (2.3.12), то согласно п. 2.2 гл. 1 семейство разложений решений есть

$$\mathcal{B}_i : \quad y = c_{0i} + \sum_{s=1}^{\infty} c_{si}(\ln x)x^s, \quad i = 1, 2, \quad (2.3.19)$$

где коэффициенты таковы: c_{0i} определен формулой (2.3.6), $c_{k_i i} = \alpha_{k_i i} + \beta_{k_i i} \ln x$, $\alpha_{k_i i}$ — произвольная постоянная, коэффициент $\beta_{k_i i}$ — постоянный и однозначно определенный, остальные c_{si} — многочлены от $\ln x$, которые однозначно определяются.

Второе приближение разложений решений (2.3.14) зависит от расположения числа k_i . Если $k_i = 1$, тогда второе приближение решений имеет вид $y = c_{0i} + c_{1i}x$. Согласно следствию 1.2.1 коэффициент $c_{1i} = \alpha_{1i} + \beta_{1i} \ln x$, где α_{1i} — произвольная постоянная, β_{1i} вычисляется по формуле $\beta_{1i} = -b_{1i}/\nu'(1)$. Коэффициент b_{1i} вычислен ранее и определен формулой (2.3.15), $\nu'(1) = 4c_{0i}^2(c_{0i} - 1)$. Учитывая (2.3.6), получаем

$$c_{1i} = \alpha_{1i} + (-1)^i \sqrt{\frac{c}{a}} \frac{(\sqrt{a} + (-1)^i \sqrt{c})^2 + b - d}{2} \ln x. \quad (2.3.20)$$

Если $(\sqrt{a} + (-1)^i \sqrt{c})^2 + b - d = 0$, то выполняется условие совместности и в разложении (2.3.19) коэффициенты таковы: c_{1i} — произвольная постоянная, c_{si} постоянны и однозначно определены.

Разложение (2.3.19) было известно [54, § 46] только в случае, когда выполнено условие совместности и все коэффициенты c_{si} постоянны. Согласно теореме 1.7.2 оно сходится для достаточно малых $|x|$. Разложения (2.3.14) — экзотические, (2.3.17) — степенное, (2.3.19) — степенно-логарифмическое.

Теперь согласно п. 3.2 гл. 1 вычислим нестепенные решения уравнения (2.3.1), соответствующие нулевому решению определяющего уравнения (2.3.5).

Сделаем в нем логарифмическое преобразование $\xi = \ln x$, при этом y', y'' преобразуются по формулам (2.2.13). Получаем уравнение

$$\varphi(\xi, y) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{f}_4^{(1)}(\xi, y) = 2\ddot{y}y^2(y-1) + \dot{y}^2y(2-3y) + 2(c-a)y^4 + 4ay^5 - 2ay^6 = 0. \quad (2.3.21)$$

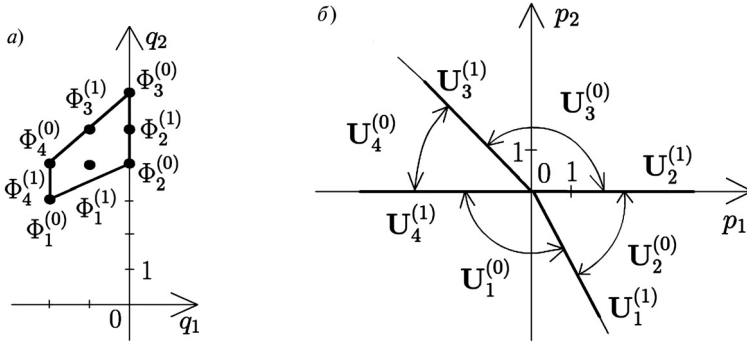


Рис. 11. Для уравнения (2.3.21): носитель, многоугольник и его грани (а); их нормальные конусы (б)

Носитель $S(\varphi)$, его выпуклая оболочка, грани $\Phi_j^{(d)}$, $d = 0, 1, j = 1, 2, 3, 4$, изображены на рис. 11 а, соответствующие граням вещественные нормальные конусы $U_j^{(d)}$, $d = 0, 1, j = 1, 2, 3, 4$, — на рис. 11 б.

Поскольку $\xi = \ln x \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow 0$, то конус задачи $\mathcal{K} = \{p_1 \geq 0\}$ и $\omega = 1$. Кроме того, $y \neq \text{const}$. С конусом задачи пересекаются вещественные нормальные конусы $U_1^{(0)}, U_2^{(0)}, U_3^{(0)}, U_1^{(1)}, U_2^{(1)}$. Рассмотрим соответствующие им грани последовательно.

Вершине $\Phi_1^{(0)}$ соответствует укороченное уравнение

$$\widehat{\varphi}_1^{(0)}(\xi, y) \stackrel{\text{def}}{=} -2\ddot{y}y^2 + 2\dot{y}^2y = 0. \tag{2.3.22}$$

Вещественный нормальный конус: $U_1^{(0)} = \{p_2 < 0, p_2 < -2p_1\}$. Ищем решения уравнения (2.3.22) в виде $y = c_r \xi^r$, $c_r \neq 0$, c_r — произвольная постоянная. Характеристическое уравнение $\chi(r) \stackrel{\text{def}}{=} r = 0$ имеет единственное решение $r = 0$. Вектор $P = \omega(1, r) = (1, 0) \notin U_1^{(0)} \cap \mathcal{K}$, т. е. подходящих решений нет.

Вершинам $\Phi_2^{(0)}$ и $\Phi_3^{(0)}$ соответствуют укороченные уравнения $\widehat{\varphi}_2^{(0)}(\xi, y) \stackrel{\text{def}}{=} 2(c - a)y^4 = 0$ и $\widehat{\varphi}_3^{(0)}(\xi, y) \stackrel{\text{def}}{=} -2ay^6 = 0$. Так как они алгебраические, то согласно замечанию 1.1.1 не дают подходящих решений.

Ребру $\Phi_1^{(1)}$ соответствует укороченное уравнение

$$\widehat{\varphi}_1^{(1)}(\xi, y) \stackrel{\text{def}}{=} -2\ddot{y}y^2 + 2\dot{y}^2y + 2(c - a)y^4 = 0. \tag{2.3.23}$$

Вещественный нормальный конус: $U_1^{(1)} = \{\lambda(1, -2), \lambda > 0\}$. Ищем решения уравнения (2.3.23) в виде $y = c_{-2}\xi^{-2}$, $c_{-2} \neq 0$. Определяющее уравнение $\widehat{\varphi}(c_{-2}) \stackrel{\text{def}}{=} 2c_{-2}^3(c_{-2}(c - a) - 2) = 0$ имеет ненулевое решение

$$c_{-2} = \frac{2}{c - a}. \tag{2.3.24}$$

Вычислим критические числа. Первая вариация:

$$\frac{\delta \widehat{\varphi}_1^{(1)}(\xi, y)}{\delta y} \stackrel{\text{def}}{=} 2\dot{y}^2 + 4y\dot{y}\frac{d}{d\xi} - 4y\ddot{y} - 2y^2\frac{d^2}{d\xi^2} + 8(c - a)y^3.$$

Линейный дифференциальный оператор:

$$\mathcal{L}(\xi) = -2c_{-2}^2 \frac{1}{\xi^6} \left(\xi^2 \frac{d^2}{d\xi^2} + 8 + 4\xi \frac{d}{d\xi} - 4(c-a)c_{-2} \right). \quad (2.3.25)$$

Характеристический многочлен $\nu(k) = -2c_{-2}^2(k^2 + 3k)$ имеет два корня $k_1 = 0$, $k_2 = -3$. Конус задачи:

$$\mathcal{K} = \{\operatorname{Re} k < -2 \text{ или } \operatorname{Re} k = -2, \operatorname{Im} k \neq 0\}.$$

Только число $k_2 = -3$ лежит в конусе задачи \mathcal{K} , т. е. k_2 — единственное критическое число. Носитель разложения решений $\mathbf{K} = \{s = -2 - 2l; l > 0\}$. Носитель разложения решения с учетом k_2 есть

$$\mathbf{K}(k_2) = \{s = -2 - l; l > 0\}. \quad (2.3.26)$$

Разложение решений есть

$$y = \frac{2}{c-a} \frac{1}{\xi^2} + \sum_{s=3}^{\infty} \frac{c_{-s}}{\xi^s}. \quad (2.3.27)$$

Поскольку $k_2 \notin \mathbf{K}$, условие совместности автоматически выполнено, т. е. комплексный коэффициент c_{-3} — произвольная постоянная. Сделаем обратную замену $\xi = \ln x$ в (2.3.27) и получим асимптотику решения уравнения (2.1.4):

$$y \stackrel{\text{def}}{=} \psi_0 = \frac{2}{c-a} \frac{1}{\ln^2 x} + \frac{c_{-3}}{\ln^3 x} + \sum_{s=4}^{\infty} \frac{c_{-s}}{\ln^s x}, \quad (2.3.28)$$

где комплексные коэффициенты таковы: c_{-3} — произвольная постоянная, остальные c_{-s} постоянны и однозначно определены.

Согласно п. 4.2 гл. 1 вычислим критические числа укороченных решений (2.3.28). Первая вариация определена формулой (2.3.7). Обозначим ее $\mathcal{M}(x, y)$. Сделаем в $\mathcal{M}(x, y)$ логарифмическую замену $\xi = \ln x$ и производную по ξ будем обозначать точкой. Согласно (2.2.13) оператор

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} & 2\dot{y}^2 + 4y\dot{y} \frac{d}{d\xi} - 6y\dot{y}^2 - 6y^2 \dot{y} \frac{d}{d\xi} - 4y\dot{y} - 2y^2 \frac{d}{d\xi} + 6y^2 \dot{y} + \\ & + 2y^3 \frac{d}{d\xi} - 4y(\ddot{y} - \dot{y}) - 2y^2 \left(\frac{d^2}{d\xi^2} - \frac{d}{d\xi} \right) + 6y^2(\ddot{y} - \dot{y}) + \\ & + 2y^3 \left(\frac{d^2}{d\xi^2} - \frac{d}{d\xi} \right) - 8ay^3 + 8cy^3 + 20ay^4 - 12ay^5 \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{N}(\xi, y). \end{aligned} \quad (2.3.29)$$

Для решений (2.3.27) имеем $y = 2\xi^{-2}/(c-a) + \dots$. Поэтому в операторе \mathcal{N} у членов с ξ^n наибольшее значение показателя степени n есть $n = -4$, и члены с ξ^{-4} образуют оператор $\mathcal{N}_{-4} = -2y^2 d^2/d\xi^2$, где $y = 2\xi^{-2}/(c-a)$. Ему соответствует характеристический многочлен $\nu(k) = -8k^2/(c-a)^2$, который имеет двукратный корень $k = 0$. Конус задачи: $\mathcal{K} = \{\operatorname{Re} k > 0\}$. Так как число $k = 0$ не лежит в конусе задачи, то критических чисел нет. Носитель разложения решений имеет вид $\mathbf{K} = \{s = l, l \in \mathbb{N}\}$. По теореме 1.4.1 для решений исходного уравнения (2.1.4)

существует единственное разложение, образующее семейство

$$B_3 : y = \psi_0 + \sum_{\sigma=1}^{\infty} \psi_{\sigma} x^{\sigma}, \quad (2.3.30)$$

где ψ_0 из (2.3.28), ψ_{σ} — ряды по убывающим степеням логарифмов.

По теореме 1.4.2 степени логарифмов в ψ_{σ} не превосходят -8σ .

Разложения (2.3.30) и (2.3.28) — новые.

Ребру $\Phi_2^{(1)}$ соответствует укороченное уравнение

$$\widehat{\varphi}_2^{(1)}(\xi, y) \stackrel{\text{def}}{=} -2ay^6 + 4ay^5 + 2(c-a)y^4 = 0,$$

которое имеет только постоянные решения $y = 1 + (-1)^i \sqrt{c/a}$, $i = 1, 2$. Они нам не подходят, ибо являются решениями полного уравнения (2.3.21) и совпадают с решениями (2.3.6), которые уже изучены.

Теперь решим уравнение (2.3.1) в явном виде. Для этого в (2.3.21) положим $\dot{y} = p$ и будем рассматривать p как функцию от y . Тогда $\ddot{y} = (dp/dy)p$ и уравнение (2.3.21) принимает вид

$$2 \frac{dp}{dy} p y (y-1) + p^2 (2-3y) + 2(c-a)y^3 + 4ay^4 - 2ay^5 = 0. \quad (2.3.31)$$

Полагая $p^2 = q$, получаем линейное неоднородное уравнение

$$\frac{dq}{dy} y (y-1) + q (2-3y) + 2(c-a)y^3 + 4ay^4 - 2ay^5 = 0. \quad (2.3.32)$$

Соответствующее ему однородное уравнение

$$\frac{dq}{dy} y (y-1) + q (2-3y) = 0$$

имеет решение $q = C_1 y^2 (y-1)$, где C_1 — произвольная постоянная. Методом вариации этой постоянной получаем для нее из (2.3.32) уравнение

$$(y-1)^2 C_1' + 2(c-a) + 4ay - 2ay^2 = 0,$$

т. е. $C_1' = -\frac{2c}{(y-1)^2} + 2a$. Оно имеет решение $C_1 = \frac{2c}{y-1} + 2ay + C_2$, где C_2 — произвольная постоянная. Следовательно,

$$q \stackrel{\text{def}}{=} C_1 y^2 (y-1) = \left(\frac{2c}{y-1} + 2ay + C_2 \right) y^2 (y-1)$$

и

$$\frac{dy}{d\xi} \stackrel{\text{def}}{=} p \stackrel{\text{def}}{=} \pm \sqrt{q} = \pm \sqrt{\left(\frac{2c}{(y-1)} + 2ay + C_2 \right) y^2 (y-1)}. \quad (2.3.33)$$

Интегрирование уравнения (2.3.33) происходит по-разному в зависимости от значения C_2 и параметров a и c . Рассмотрим три случая значений постоянной C_2 .

Случай $C_2 = 2c$. В этом случае уравнение (2.3.33) принимает вид

$$\frac{dy}{d\xi} = \pm \sqrt{2ay} \sqrt{y^2 + \left(\frac{c}{a} - 1 \right) y}. \quad (2.3.34)$$

Положим $t^2 = 1 + (c/a - 1)/y$, тогда

$$y = \frac{c/a - 1}{t^2 - 1} \quad (2.3.35)$$

и уравнение (2.3.34) принимает вид $dt/d\xi = \pm\sqrt{2a}/2(c/a - 1)$. Его решения суть $t = \pm\sqrt{2a}/2(c/a - 1)(\xi + C_3)$, где C_3 — произвольная постоянная. Из (2.3.35) получаем

$$y = \frac{1}{\frac{c-a}{2}(\xi + C_3)^2 - \frac{a}{c-a}}. \quad (2.3.36)$$

При $\xi \rightarrow \infty$ из (2.3.36) получаем разложение в ряд Лорана по степеням ξ :

$$y = \frac{2}{c-a} \frac{1}{\xi^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{C_4}{\xi} + \frac{C_5}{\xi^2} \right)^k, \quad (2.3.37)$$

где $C_4 \stackrel{\text{def}}{=} -2C_3$ — произвольная постоянная, $C_5 \stackrel{\text{def}}{=} -C_3 + \frac{2a}{(c-a)^2}$.

Учитывая, что $\xi = \ln x$, получаем явный вид (2.3.36) разложения (2.3.28).

Случай $C_2 = -2(\sqrt{a} \pm \sqrt{c})^2 + 2c$. В этом случае уравнение (2.3.33) принимает вид

$$\frac{dy}{d\xi} = \pm\sqrt{2a} y \left(y - \left(1 \mp \frac{c}{a} \right) \right). \quad (2.3.38)$$

Его интеграл есть

$$\frac{y - (1 + (-1)^i \sqrt{c/a})}{y} = \exp \left(\pm \sqrt{2}(\sqrt{a} + (-1)^i \sqrt{c})\xi + C_6 \right), \quad (2.3.39)$$

где $i = 1, 2$, C_6 — произвольная постоянная.

Учитывая, что $\xi = \ln x$, из (2.3.39) получаем

$$y = \frac{1 + (-1)^i \sqrt{c/a}}{1 - C_7 x^{\pm\theta_i}}, \quad (2.3.40)$$

где $i = 1, 2$, $\theta_i = \sqrt{2}(\sqrt{a} + (-1)^i \sqrt{c})$, C_7 — произвольная постоянная.

Пусть для определенности $\text{Re } \theta_i \geq 0$, $\theta_i \neq 0$, тогда при $x \rightarrow 0$ функция (2.3.40) раскладывается в ряд по степеням $C_7 x^{\theta_i}$:

$$y = \left(1 + (-1)^i \sqrt{\frac{c}{a}} \right) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (C_7 x^{\theta_i})^k, \quad (2.3.41)$$

где $i = 1, 2$, C_7 — произвольная постоянная. В зависимости от значения θ_i ряд (2.3.41) является явным видом разложений (2.3.14), (2.3.18), (2.3.19), а функция (2.3.40) — их суммой.

Случай $C_2 \neq 2c$, $C_2 \neq -2(\sqrt{a} \pm \sqrt{c})^2 + 2c$. Запишем уравнение (2.3.33) в виде

$$\frac{dy}{d\xi} = \pm\sqrt{2a} \sqrt{y^2 \left(y^2 + \frac{C_2 - 2a}{2a} y + \frac{2c - C_2}{2a} \right)}. \quad (2.3.42)$$

Уравнение $y^2 + \frac{C_2 - 2a}{2a}y + \frac{2c - C_2}{2a} = 0$ имеет два различных ненулевых корня α и β . При этом

$$\alpha + \beta = -\frac{C_2 - 2a}{2a}, \quad \alpha \cdot \beta = \frac{2c - C_2}{2a}. \quad (2.3.43)$$

Подстановка Эйлера

$$t^2 = \frac{y - \beta}{y - \alpha}; \quad y = \frac{\alpha t^2 - \beta}{t^2 - 1} \quad (2.3.44)$$

приводит уравнение (2.3.33) к виду

$$\frac{\pm 2 dt}{\sqrt{2a}(\alpha t^2 - \beta)} = d\xi.$$

Его интеграл есть

$$\pm \frac{1}{\sqrt{2a\alpha\beta}} \ln \frac{t - \sqrt{\beta/\alpha}}{t + \sqrt{\beta/\alpha}} = \xi + C_8, \quad (2.3.45)$$

где C_8 — произвольная постоянная. Учитывая (2.3.43) и (2.3.45), получаем

$$\frac{t - \sqrt{\beta/\alpha}}{t + \sqrt{\beta/\alpha}} = C_9 \exp(\pm \sqrt{2c - C_2}\xi),$$

где C_9 — произвольная постоянная; т. е.

$$t = -\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \left(1 - \frac{2}{1 - C_9 \exp(\pm \sqrt{2c - C_2}\xi)} \right). \quad (2.3.46)$$

Положим

$$\varphi = C_9 \exp(\pm \sqrt{2c - C_2}\xi). \quad (2.3.47)$$

Тогда из (2.3.44) и (2.3.46) получаем

$$y = \frac{4\alpha\beta}{\beta(\sqrt{1/\varphi} + \sqrt{\varphi})^2 - \alpha(\sqrt{1/\varphi} - \sqrt{\varphi})^2}. \quad (2.3.48)$$

Положим $2i\psi = \ln \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \pm \sqrt{2c - C_2}(\xi + C_{10})$, где C_{10} — произвольная постоянная. Учитывая, что $\xi = \ln x$, имеем

$$\psi = \pm i \frac{\sqrt{2c - C_2}}{2} (\ln x + C_{10}).$$

Тогда (2.3.48) принимает вид

$$y = \frac{\alpha\beta}{\beta \cos^2 \psi + \alpha \sin^2 \psi}. \quad (2.3.49)$$

Согласно (2.3.47) y разлагается в ряд по степеням $\varphi = (C_{11}x)^{\pm\sqrt{2c-C_2}}$, где C_{11} — произвольная постоянная.

Если $2c - C_2$ — вещественное отрицательное число, то число $i\sqrt{2c - C_2} \stackrel{\text{def}}{=} 2\gamma$ — вещественно. В этом случае $\psi = \gamma \ln(C_{11}x)$ и согласно (2.3.43) и (2.3.49)

$$y = \frac{2c - C_2}{2a} \frac{1}{\beta \cos^2 [\ln(C_{11}x)^\gamma] + \alpha \sin^2 [\ln(C_{11}x)^\gamma]}. \quad (2.3.50)$$

Из (2.3.49) видно, что y разлагается в ряд по целым степеням $x^{2\tau i}$, что дает ряд по чисто мнимым степеням x . Из (2.3.48) видно, что y^{-1} является суммой вида $c_1 x^{2i\gamma} + c_0 + c_1 x^{-2i\gamma}$, где c_0 и c_1 — комплексные постоянные, и не зависит от знака γ , а ведь в семействах \mathcal{B}_0^+ значение $\tau = \operatorname{sgn} \gamma \pm 1$ (см. (2.3.4)). Согласно п. 5.4. гл. 1 у семейств \mathcal{B}_0^+ и \mathcal{B}_0^- семейство обратных разложений y^{-1} общее.

Ряд (2.3.2) с $\rho = \pm \sqrt{2c - C_2}$, $2c - C_2 \in \mathbb{R}$, $2c - C_2 < 0$, есть функция (2.3.50), которая является решением укороченного уравнения (2.3.1), соответствующим ребру $\Gamma_4^{(1)}$.

Более того, для вершины $\Gamma_4^{(0)}$ подсумма суммы (2.2.6), соответствующая $m = 0$ в (2.2.5), является решением (2.3.49) укороченного уравнения (2.3.1), соответствующего ребру $\Gamma_4^{(1)}$.

3.3. Разложения решений при $a = c \neq 0$. Вычислим сначала степенные, степенно-логарифмические и экзотические разложения решений уравнения (2.1.1), соответствующие ребру $\Gamma_4^{(1)}$. В этом случае определяющее уравнение (2.3.5) имеет два нулевых и одно ненулевое решение $c_{02} = 2$ из (2.3.6). Ему соответствует два собственных значения $k_2 = \pm 2\sqrt{2a}$ из (2.3.10). В качестве θ_2 берем то из значений k_2 , для которого $\operatorname{Re} k_2 \geq 0$.

Значению c_{02} соответствуют семейства разложений \mathcal{B}_2 или \mathcal{B}_2^r , для которых сохраняются формулы степенных, степенно-логарифмических или экзотических разложений из случая $a \neq c \neq 0$. Также в зависимости от значения θ_2 возможны три случая. А именно: случай 1 ($\operatorname{Re} \theta_2 = 0$, разложение решений определено формулой (2.3.14)), случай 2 ($\operatorname{Re} \theta_2 \neq 0, \theta_2 \notin \mathbb{Z}$, разложение решений определено формулой (2.3.18)), случай 3 ($\theta_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, разложение решений определено формулой (2.3.19)).

Вычислим теперь нестепенные решения уравнения (2.3.1), соответствующие двукратному нулевому решению определяющего уравнения (2.3.5). В этом случае уравнение (2.3.21) принимает вид

$$\phi(\xi, y) \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{f}_4^{(1)}(\xi, y) \stackrel{\text{def}}{=} 2\ddot{y}y^2(y-1) + \dot{y}^2y(2-3y) - 2ay^6 + 4ay^5 = 0. \quad (2.3.51)$$

Носитель $\mathbf{S}(\phi)$, его выпуклая оболочка, грани $\Phi_j^{(d)}$, $d = 0, 1$, $j = 1, 2, 3, 4$, изображены на рис. 12 а, соответствующие граням вещественные нормальные конусы $\mathbf{U}_j^{(d)}$, $d = 0, 1$, $j = 1, 2, 3, 4$, — на рис. 12 б.

Конус задачи: $\mathcal{K} = \{p_1 \geq 0\}$, т. е. $\omega = 1$. Кроме того, $y \neq \operatorname{const}$. С конусом задачи пересекаются вещественные нормальные конусы $\mathbf{U}_1^{(0)}$, $\mathbf{U}_2^{(0)}$, $\mathbf{U}_3^{(0)}$, $\mathbf{U}_1^{(1)}$, $\mathbf{U}_2^{(1)}$. Рассмотрим соответствующие им грани последовательно.

Вершине $\Phi_1^{(0)}$ соответствует укороченное уравнение (2.3.22). Вещественный нормальный конус: $\mathbf{U}_1^{(0)} = \{p_1 < 0, p_2 < -p_1\}$. Вектор $P = (1, 0)$, полученный ранее в случае $a \neq c$, не лежит в нормальном конусе $\mathbf{U}_1^{(0)}$, следовательно, подходящих решений нет.

Вершинам $\Phi_2^{(0)}$ и $\Phi_3^{(0)}$ соответствуют укороченные уравнения $\widehat{\phi}_2^{(0)}(\xi, y) \stackrel{\text{def}}{=} 4ay^5 = 0$ и $\widehat{\phi}_3^{(0)}(\xi, y) \stackrel{\text{def}}{=} -2ay^6 = 0$. Они алгебраические и согласно замечанию 1.1.1 не дают подходящих решений.

Ребру $\Phi_1^{(1)}$ соответствует укороченное уравнение

$$\widehat{\phi}_1^{(1)}(\xi, y) \stackrel{\text{def}}{=} -2\ddot{y}y^2 + 2\dot{y}^2y + 4ay^5 = 0. \quad (2.3.52)$$

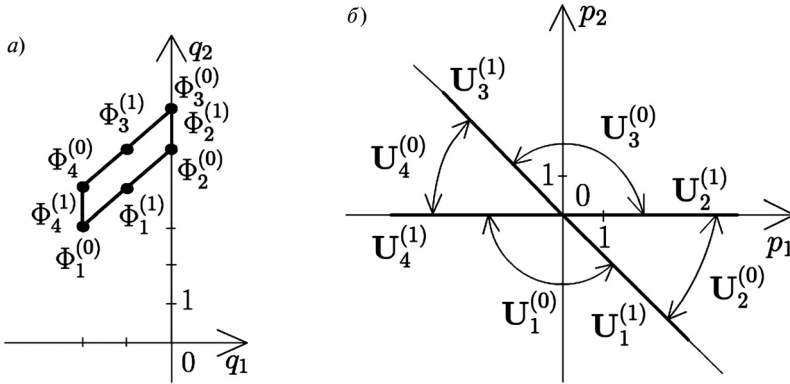


Рис. 12. Для уравнения (2.3.51): носитель, многоугольник и его грани (а); их нормальные конусы (б)

Вещественный нормальный конус: $U_1^{(0)} = \{\lambda(1, -1), \lambda > 0\}$. Ищем решения уравнения (2.3.52) в виде $y = c_{-1}\xi^{-1}$, $c_{-1} \neq 0$. Определяющее уравнение $\tilde{\phi}(c_{-1}) \stackrel{\text{def}}{=} -2c_{-1}^3(2ac_{-1}^2 - 1) = 0$ имеет два ненулевых решения

$$c_{-1} = \frac{(-1)^j}{\sqrt{2a}}, \quad j = 1, 2. \tag{2.3.53}$$

Вычислим критические числа. Первая вариация:

$$\frac{\delta \tilde{\phi}_1^{(1)}(\xi, y)}{\delta y} \stackrel{\text{def}}{=} 2y^2 + 4y\dot{y} \frac{d}{d\xi} - 4y\ddot{y} - 2y^2 \frac{d^2}{d\xi^2} + 20y^4.$$

Линейный дифференциальный оператор:

$$\mathcal{L}(\xi) = -2c_{-1}^2 \xi^{-4} \left(\xi^2 \frac{d^2}{d\xi^2} + 2\xi \frac{d}{d\xi} + 3 - 10ac_{-1}^2 \right). \tag{2.3.54}$$

Характеристический многочлен $\nu(k) = -2c_{-1}^2(k^2 + k - 2)$ имеет два корня $k_1 = 1$, $k_2 = -2$. Конус задачи:

$$\mathcal{K} = \{\text{Re } k < -1 \text{ или } \text{Re } k = -1, \text{Im } k \neq 0\}.$$

Число $k_2 = -2$ лежит в конусе задачи \mathcal{K} , т.е. k_2 — единственное критическое число. Исходный носитель разложения решений $\mathbf{K} = \{s = -1 - 2l; l > 0\}$. Носитель разложения решения с учетом k_2 есть

$$\mathbf{K}(k_2) = \{s = -1 - l; l > 0\}. \tag{2.3.55}$$

Разложения решений суть

$$y = (-1)^j \frac{\xi^{-1}}{\sqrt{2a}} + \sum_{s=2}^{\infty} c_{-s} \xi^{-s}, \quad j = 1, 2. \tag{2.3.56}$$

Поскольку $k_2 \notin \mathbf{K}$, условие совместности автоматически выполнено, т.е. комплексный коэффициент c_{-2} — произвольная постоянная.

Сделаем обратную замену $\xi = \ln x$ в (2.3.56) и получим два семейства асимптотических решений уравнения (2.1.4)

$$\mathcal{F}_j: \quad y \stackrel{\text{def}}{=} \psi_{0j} = (-1)^j \frac{1}{\sqrt{2a}} \frac{1}{\ln x} + \frac{c_{-2j}}{\ln^2 x} + \sum_{s=3}^{\infty} \frac{c_{-sj}}{\ln^s x}, \quad j = 1, 2, \quad (2.3.57)$$

где комплексные коэффициенты таковы: c_{-2j} — произвольная постоянная, остальные c_{-sj} постоянны и однозначно определены.

Согласно п. 4.2 гл. 1 вычислим критические числа укороченных решений (2.3.57). Оператор $\mathcal{N}(\xi, y)$ определен формулой (2.3.29). Для решений (2.3.56) имеем: $y = (-1)^j \xi^{-1} / \sqrt{2a} + \dots$. Поэтому в операторе \mathcal{N} у членов с ξ^n наибольшее значение показателя степени n есть $n = -2$, и члены с ξ^{-2} образуют оператор $\mathcal{N}_{-2} = -2y^2 d^2/d\xi^2$, где $y = (-1)^j \xi^{-1} / \sqrt{2a}$. Ему соответствует характеристический многочлен $\nu(k) = -k^2/2a$, который имеет двукратный корень $k = 0$. Конус задачи: $\mathcal{K} = \{\text{Re } k > 0\}$. Так как число $k = 0$ не лежит в конусе задачи, то критических чисел нет. Носитель разложения решений имеет вид $\mathbf{K} = \{s = l, l \in \mathbb{N}\}$. По теореме 1.4.1 для решений исходного уравнения (2.1.4) существуют единственные разложения, образующие семейства

$$\mathcal{B}_{3+j}: \quad y = \psi_{0j} + \sum_{\sigma=1}^{\infty} \psi_{\sigma j} x^\sigma, \quad j = 1, 2, \quad (2.3.58)$$

где ψ_{0j} из (2.3.57), $\psi_{\sigma j}$ — ряды по убывающим степеням логарифмов.

По теореме 1.4.2 степени логарифмов в $\psi_{\sigma j}$ не превосходят -4σ .

Разложения (2.3.58) и (2.3.57) — новые.

Ребру $\Phi_2^{(1)}$ соответствует укороченное уравнение $\widehat{\phi}_2^{(1)}(\xi, y) \stackrel{\text{def}}{=} -2ay^6 + 4ay^5 = 0$, которое имеет постоянное решение $y = 2$. Оно нам не подходит, так как является решением полного уравнения (2.3.51) и совпадает с решением c_{02} , изученным в начале этого пункта.

Решим при $a = c \neq 0$ уравнение (2.3.1) в явном виде. Для этого рассмотрим уравнение (2.3.33).

Интегрирование уравнения (2.3.33) происходит по-разному в зависимости от значения C_2 и параметра a . Рассмотрим три случая значений постоянной C_2 .

Случай $C_2 = 2a$. В этом случае уравнение (2.3.33) принимает вид

$$\frac{dy}{d\xi} = \pm \sqrt{2a} y^2. \quad (2.3.59)$$

Уравнение (2.3.34) имеет решение

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{2a} \xi + C_3}, \quad (2.3.60)$$

где C_3 — произвольная постоянная.

Напоминаем, что $x \rightarrow 0$, т. е. $\xi \stackrel{\text{def}}{=} \ln x \rightarrow \infty$ (x и ξ — комплексные). Тогда (2.3.60) раскладывается в ряд Лорана по степеням ξ :

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{2a}} \frac{1}{\xi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(C_3 \xi)^k}, \quad (2.3.61)$$

где $C_4 \stackrel{\text{def}}{=} \pm C_3 / \sqrt{2a}$ — произвольная постоянная.

Учитывая, что $\xi = \ln x$, получаем явный вид разложения (2.3.57):

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{2a}} \frac{1}{\ln x} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(C_4 \ln x)^k} \stackrel{\text{def}}{=} \pm \frac{1}{\sqrt{2a} \ln x + C_3}. \quad (2.3.62)$$

Случай $C_2 = -6a$. В этом случае уравнение (2.3.33) имеет решение

$$y = \frac{2}{1 - C_5 x^{\theta_2}}, \quad (2.3.63)$$

где $i = 1, 2$, $\theta_2 = 2\sqrt{2a}$, C_5 — произвольная постоянная.

При $\text{Re } \theta_2 \geq 0$, $\theta_2 \neq 0$ и $x \rightarrow 0$ функция (2.3.63) раскладывается в ряд по степеням $C_5 x^{\theta_2}$:

$$y = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (C_5 x^{\theta_2})^k, \quad (2.3.64)$$

где $i = 1, 2$, C_5 — произвольная постоянная. В зависимости от значения θ_2 ряд (2.3.64) является явным видом разложений (2.3.14), (2.3.18) или (2.3.19), а функция (2.3.63) — их суммой.

Случай $C_2 \neq 2a$, $C_2 \neq -6a$. В этом случае уравнение (2.3.33) имеет решение (2.3.49), сохранившееся из случая $a \neq c \neq 0$.

3.4. Разложения решений при $a \neq 0$, $c = 0$. Вычислим в этом случае сначала степенные, степенно-логарифмические и экзотические разложения решений уравнения (2.1.1), соответствующие ребру $\Gamma_4^{(1)}$. Уравнение (2.3.5) имеет двукратный корень $c_0 = 1$. Согласно (2.3.8) при $a \neq 0$, $c = 0$ для него линейный оператор $\mathcal{L}(x) \equiv 0$.

Для того чтобы исследовать уравнение (2.1.4) в этом случае, сделаем замену $y = 1 + u$. Получаем уравнение

$$\begin{aligned} g(x, u) \stackrel{\text{def}}{=} f(x, u+1) \stackrel{\text{def}}{=} & ((2u+1)u'^2 - 2(u+u^2)u'')x^5 + ((-3-8u-3u^2)u'^2 - 2(u+ \\ & + u^2)u' + 2(4u^2+u^3+3u)u'')x^4 + ((10u+6u^2+3)u'^2 + 2(5u^2+2u^3+3u)u' - \\ & - 2(5u^2+3u+2u^3)u'' - 2bu^2)x^3 + ((-3u^2-4u-1)u'^2 - 6(2u^2+u+u^3)u' + \\ & + 2(u^3+2u^2+u)u'' - 2(d+a)u^4 - 4(a+d-b)u^3 - 2(d+a-2b)u^2)x^2 + \\ & + (2(u^3+2u^2+u)u' + 4au^5 + 2(6a-b+d)u^4 - 4(b-3a-d)u^3 - 2(b-d- \\ & - 2a)u^2)x - 8au^3 - 12au^4 - 2au^2 - 8au^5 - 2au^6 = 0. \end{aligned} \quad (2.3.65)$$

Носитель $S(g)$, его выпуклая оболочка $\Gamma(g)$, грани $G_i^{(d)}$, $d = 0, 1$, $i = 1, 2, 3, 4$, изображены на рис. 13 а. Вещественные нормальные конусы $U_i^{(d)}$, $d = 0, 1$, $i = 1, 2, 3, 4$, — на рис. 13 б.

Уравнение (2.3.65) имеет двукратное тривиальное решение $u = 0$. В уравнении (2.1.4) ему соответствует двукратное исключительное решение

$$\mathcal{I}_2 : \quad y = 1.$$

По теореме 2.1.4 для исходного уравнения (2.1.1) оно является исключительным однократным. А двукратность решения $y = 1$ возникла после умножения уравнения (2.1.1) на множитель $2x^2(x-1)^2y(y-1)(y-x)$, содержащий как сомножитель $(y-1)$.

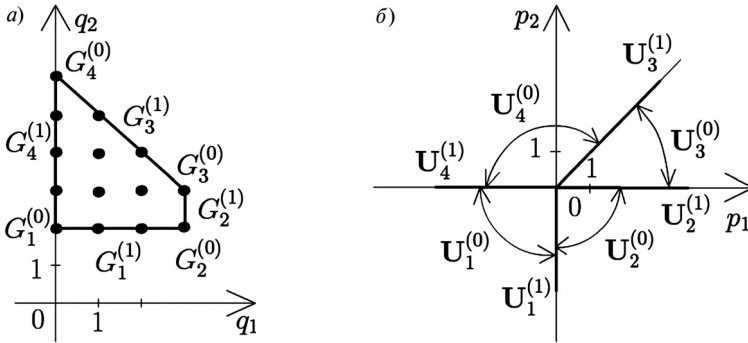


Рис. 13. Для уравнения (2.3.65): носитель, многоугольник и его грани (а); их нормальные конусы (б)

Конус задачи: $\mathcal{K} = \{p_1 \leq 0, p_2 < 0\}$, т. е. $\omega = -1$. Кроме того, $u(x) \neq \text{const}$. С конусом задачи пересекаются вещественные нормальные конусы $U_1^{(0)}, U_1^{(1)}$.

Вершине $G_1^{(0)}$ соответствует укороченное уравнение

$$\widehat{g}_1^{(0)}(x, u) \stackrel{\text{def}}{=} 2u''ux^2 - u'^2x^2 + 2u'ux - 2au^2 = 0. \quad (2.3.66)$$

Вещественный нормальный конус: $U_1^{(0)} = \{p_1 < 0, p_2 < 0\}$. Первое приближение решения имеет вид $u = c_\rho x^\rho$, где c_ρ — ненулевая произвольная постоянная. Показатель степени ρ определим из характеристического уравнения

$$\chi(\rho) \stackrel{\text{def}}{=} \rho^2 - 2a = 0, \quad (2.3.67)$$

т. е. $\rho_{1,2} = \pm\sqrt{2a}$.

Согласно п. 5.3 гл. 1 комплексный нормальный конус $\check{U}_1^{(0)} = -(1, \rho)$, где

$$\rho: \quad \rho \in \mathbb{C}, \quad \text{Re } \rho > 0. \quad (2.3.68)$$

Вычислим критические числа. Первая вариация:

$$\frac{\partial \widehat{g}_1^{(0)}(x, u)}{\partial u} = 2u''x^2 + 2\frac{d^2}{dx^2}ux^2 - 2u'\frac{d}{dx}x^2 + 2u'x + 2\frac{d}{dx}ux - 4au.$$

Линейный дифференциальный оператор:

$$\mathcal{L}(x) = 2c_\rho x^\rho \left(\rho(\rho - 1) + \frac{d^2}{dx^2}x^2 - \rho\frac{d}{dx}x + \rho + \frac{d}{dx}x - 2a \right).$$

Характеристическое уравнение $\nu(k) \stackrel{\text{def}}{=} 2c_\rho k(k - \rho) = 0$ имеет два корня $k_1 = 0, k_2 = \rho$. Согласно п. 5.3 гл. 1 конус задачи $\mathcal{K} = \{\text{Re } k > \text{Re } \rho \text{ или } \text{Re } k = \text{Re } \rho, |\text{Im } k| > |\text{Im } \rho|, \text{sgn}(\text{Im } k) = \text{sgn}(\text{Im } \rho)\}$. Числа $k_{1,2} \notin \mathcal{K}$, т. е. критических чисел нет.

Носитель разложения решений есть

$$\mathbf{K} = \{s = \rho + l\rho + m; l, m \geq 0; l + m > 0; l, m \in \mathbb{Z}\}. \quad (2.3.69)$$

Разложение решений имеет вид

$$u = c_\rho x^\rho + \sum c_s x^s \quad (\text{сумма по } s \in \mathbf{K}). \quad (2.3.70)$$

Носитель разложения (2.3.70) на комплексной плоскости s расположен в угле с вершиной в точке ρ , натянутом на точки $s = 2\rho$ и $s = \rho + 1$.

После обратной замены $y = 1 + u$ разложения (2.3.70) образуют семейство

$$\mathcal{B}_6: \quad y = 1 + c_\rho x^\rho + \sum_s c_s x^s, \quad (2.3.71)$$

где $\rho = \pm\sqrt{2a}$ и удовлетворяет (2.3.68), s пробегает множество (2.3.69), комплексные коэффициенты: c_ρ — ненулевая произвольная постоянная, все c_s постоянны и однозначно определены. Согласно теореме 1.7.2 разложение (2.3.71) сходится для достаточно малых $|x|$. В случае $\operatorname{Re} \rho = 0$ разложения (2.3.71) являются экзотическими. Обозначим их семейства как \mathcal{B}_6^τ , где $\tau = \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} \rho)$.

Семейства \mathcal{B}_6 и \mathcal{B}_6^τ — новые. Если $\sqrt{2a} \in \mathbb{N}$, то согласно (2.3.69) все показатели s — целые.

Вычислим второе приближение разложения решений (2.3.70) при $\operatorname{Re} \rho > 0$.

В случае $\operatorname{Re} \rho > 1$ второе приближение решений есть $u = c_\rho x^\rho + c_{\rho+1} x^{\rho+1}$. Второе приближение уравнения (2.3.65) есть

$$\widehat{g}_1^{(0)}(x, u) = 3u'^2 x^3 - 6uu'' x^3 - 6uu' x^2 + 2xu^2(2a - b + d).$$

Коэффициент $c_{\rho+1} = -b_{\rho+1}/\nu(\rho+1)$, где $b_{\rho+1} \stackrel{\text{def}}{=} x^{-2\rho-1} \widehat{g}_1^{(0)}(x, c_\rho x^\rho) = 2c_\rho^2(d - b - a)$, $\nu(\rho+1) = 2c_\rho(\rho+1)$. Таким образом, получаем

$$c_{\rho+1} = c_\rho \frac{a + b - d}{\rho + 1}. \quad (2.3.72)$$

В случае $0 < \operatorname{Re} \rho < 1$ второе приближение решений есть $u = c_\rho x^\rho + c_{2\rho} x^{2\rho}$. Второе приближение уравнения (2.3.65) есть

$$\widehat{g}_1^{(0)}(x, u) = -4uu'^2 x^2 + 4u^2 u'' x^2 + 4u^2 u' x - 8au^3.$$

Коэффициент $c_{2\rho} = -b_{2\rho}/\nu(2\rho)$, где $b_{2\rho} \stackrel{\text{def}}{=} x^{-3\rho} \widehat{g}_1^{(0)}(x, c_\rho x^\rho) = -8ac_\rho^3$, $\nu(2\rho) = 8ac_\rho$. Таким образом, получаем

$$c_{2\rho} = c_\rho^2. \quad (2.3.73)$$

В случае $\operatorname{Re} \rho = 1$, $\operatorname{Im} \rho \neq 0$ второе приближение решений есть $u = c_\rho x^\rho + c_{\rho+1} x^{\rho+1} + c_{2\rho} x^{2\rho}$, коэффициенты $c_{\rho+1}$ и $c_{2\rho}$ определены формулами (2.3.72) и (2.3.73) соответственно.

В случае $\rho = 1$, т. е. $a = 1/2$, второе приближение решений есть $u = c_1 x + c_2 x^2$. Коэффициенты: c_1 — произвольная постоянная,

$$c_2 = c_1 \frac{a + b - d + 2c_1}{2} \quad (2.3.74)$$

есть сумма (2.3.72) и (2.3.73).

Вычислим нестепенные решения уравнения (2.3.66), если они существуют. Преобразуем его:

$$h(x, u) \stackrel{\text{def}}{=} u^{-2} \widehat{g}_1^{(0)}(x, u) \stackrel{\text{def}}{=} 2 \frac{u''}{u} x^2 - \frac{u'^2}{u^2} x^2 + 2 \frac{u'}{u} x - 2a = 0, \quad (2.3.75)$$

так что $S(h) = \{0\}$. Уравнение $h(x, u) = 0$ содержит ненулевую постоянную $-2a$,

$$h^* = 2\frac{u''}{u}x^2 - \frac{u'^2}{u^2}x^2, \quad \text{coef}(h^*) = 2 - 1 = 1 \neq 0. \quad (2.3.76)$$

Так как $a \neq 0$, то уравнение (2.3.67) не имеет кратных корней, т. е. по теоремам 1.3.5 и 1.3.6 нестепенных решений уравнения (2.3.66) не существует. Следовательно, вершине $G_1^{(0)}$ не соответствует никакое сложное разложение решений уравнения (2.1.4).

Ребру $G_1^{(1)}$ соответствует укороченное уравнение

$$\begin{aligned} \widehat{g}_1^{(1)}(x, u) \stackrel{\text{def}}{=} & 2u''ux^2 - u'^2x^2 + 2u'ux - 2au^2 - 6u''ux^3 + 3u'^2x^3 - 6u'ux^2 - \\ & - 2(b-d-2a)u^2xbu''ux^4 - 30u'^2x^4 + 6u'ux^3 - 2(d+a - \\ & - 2b)u^2x^2 - 2u''ux^5 + u'^2x^5 - 2u'ux^4 - 2bu^2x^3 = 0. \end{aligned} \quad (2.3.77)$$

Это ребро горизонтально. Уравнение (2.3.77) не имеет степенных решений, т. е. ему не соответствуют степенные или степенно-логарифмические разложения решений. Возможно, уравнение (2.3.77) имеет нестепенные решения.левой вершине $G_1^{(0)} = (0, 2)$ этого ребра соответствует укороченное уравнение (2.3.66). Так как для обоих этих уравнений (2.3.66) и (2.3.77) суммарный порядок дифференцирования $\Delta(\widehat{g}_1^{(1)}) = \Delta(\widehat{g}_1^{(0)}) = 2$, то согласно теореме 1.3.4 уравнение (2.3.77) не имеет нестепенных решений при $x \rightarrow 0$.

Решению $c_0 = 0$ определяющего уравнения (2.3.5), как и в случае $a \neq c \neq 0$, соответствует семейство сложных разложений B_3 из (2.3.30).

Решим в случае $a \neq 0, c = 0$ уравнение (2.3.1) в явном виде. Для этого рассмотрим уравнение (2.3.33), его интегрирование происходит по-разному в зависимости от значения C_2 и параметра a . Рассмотрим три случая значений постоянной C_2 .

Случай $C_2 = 0$. В этом случае уравнение (2.3.33) принимает вид

$$\frac{dy}{d\xi} = \pm \sqrt{2a} y \sqrt{y(y-1)}. \quad (2.3.78)$$

Оно имеет решение

$$y = -\frac{2}{a(\xi + C_3)^2 - 2}, \quad (2.3.79)$$

совпадающее с (2.3.36) при $c = 0$. При $\xi \rightarrow \infty$ из (2.3.79) получаем разложение в ряд Лорана по степеням ξ :

$$y = -\frac{2}{a} \frac{1}{\xi^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{C_4}{\xi} + \frac{C_5}{\xi^2} \right)^k, \quad (2.3.80)$$

где $C_4 \stackrel{\text{def}}{=} -2C_3$ — произвольная постоянная, $C_5 \stackrel{\text{def}}{=} -C_3 - 2$.

Учитывая, что $\xi = \ln x$, получаем явный вид (2.3.79) разложения (2.3.28).

Случай $C_2 = -2a$. В этом случае уравнение (2.3.33) принимает вид

$$\frac{dy}{d\xi} = \pm \sqrt{2a} y (y-1). \quad (2.3.81)$$

Его интеграл есть

$$\frac{y-1}{y} = \exp(\pm\sqrt{2a}\xi + C_6), \tag{2.3.82}$$

где $i = 1, 2$, C_6 — произвольная постоянная.

Учитывая, что $\xi = \ln x$, из (2.3.82) получаем

$$y = \frac{1}{1 - C_7 x^\rho}, \tag{2.3.83}$$

где $i = 1, 2$, $\rho = \sqrt{2a}$, C_7 — произвольная постоянная.

При $\operatorname{Re} \rho \geq 0$, $\rho \neq 0$ и $x \rightarrow 0$ функция (2.3.83) раскладывается в ряд по степеням $C_8 x^\rho$:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (C_8 x^\rho)^k, \tag{2.3.84}$$

где $i = 1, 2$, C_8 — произвольная постоянная. Ряд (2.3.84) является явным видом разложений (2.3.71), а функция (2.3.83) — их суммой.

Случай $C_2 \neq 0$, $C_2 \neq -2a$. В этом случае уравнение (2.3.33) имеет решение (2.3.49), сохранившееся из случая $a \neq c \neq 0$.

В случае $a \neq 0$, $c = 0$ формула (2.3.50) принимает вид

$$y = \frac{C_2}{2a} \frac{1}{\beta \cos^2 [\ln(C_{11}x)^\gamma] + \alpha \sin^2 [\ln(C_{11}x)^\gamma]}, \tag{2.3.85}$$

где $\gamma = i\sqrt{-C_2}$, C_2 — вещественное положительное число, α и β из (2.3.43), т. е. $\alpha = 1$, $\beta = -C_2/(2a)$.

3.5. Сводка результатов и их обсуждение.

Теорема 2.3.1. Ребру $\Gamma_4^{(1)}$ соответствуют 6 семейств разложений решений типов 1–3:

B_1 , которое существует при $0 \neq a \neq c \neq 0$, определяется формулами (2.3.14) с $C_7 = 0$, (2.3.18), (2.3.19) и имеет 1 или 0 параметров;

B_2 , которое существует при $a \neq 0$, $c \neq 0$, определяется формулами (2.3.14) с $C_7 = 0$, (2.3.18), (2.3.19) и имеет 1 или 0 параметров;

B_3 , которое существует при $0 \neq a \neq c$, определяется формулами (2.3.30), (2.3.28), (2.3.36) и имеет 1 параметр;

B_4 и B_5 , которые существуют при $a = c \neq 0$, определяются формулами (2.3.58), (2.3.57), (2.3.62) и имеют 1 параметр;

B_6 , которое существует при $c = 0$, $\rho = \pm\sqrt{2a}$, $\operatorname{Re} \rho > 0$ определяется формулами (2.3.71), (2.3.69) и имеет 1 параметр;

и 4 пары семейств экзотических разложений решений типа 5 с $\tau = \pm 1$:

B_0^τ , которые существуют при $a \neq 0$, определяются формулами (2.3.4) и имеют 2 параметра, семейства обратных разложений y^{-1} для B_0^+ и B_0^- совпадают;

B_1^τ , которые существуют при $a \neq c \neq 0$, $\operatorname{Re}(\sqrt{2c} - \sqrt{2a}) = 0$, определяются формулами (2.3.14), (2.3.13), (2.3.40) и имеют 1 параметр;

B_2^τ , которые существуют при $a \neq 0$, $c \neq 0$, $\operatorname{Re}(\sqrt{2c} + \sqrt{2a}) = 0$, определяются формулами (2.3.14), (2.3.13), (2.3.40) и имеют 1 параметр;

\mathcal{B}_6^r , которые существуют при $a \neq 0$, $c = 0$, $\operatorname{Re} \sqrt{2a} = 0$, определяются формулами (2.3.71), (2.3.69), (2.3.83) и имеют 1 параметр;

Семейства \mathcal{B}_3 , \mathcal{B}_4 , \mathcal{B}_5 — сложные, \mathcal{B}_1 , \mathcal{B}_2 , \mathcal{B}_6 — степенные или степенно-логарифмические.

Замечание 2.3.2. Семейства \mathcal{B}_j^+ и \mathcal{B}_j^- отличаются тем, что комплексные показатели степени их разложений комплексно сопряжены. При комплексном сопряжении разложений получаются разложения с сопряженными комплексными показателями степеней. Если разложение из \mathcal{B}_j^+ совпадает с комплексным сопряжением некоторого разложения из \mathcal{B}_j^- , то этим разложениям соответствует одна и та же вещественная функция. Следовательно, возможны случаи, когда разложению из \mathcal{B}_j^+ и разложению из \mathcal{B}_j^- соответствует одна и та же функция. Обычно это происходит, если все параметры a , b , c , d в уравнении (2.1.1) вещественные. Поскольку мы не предполагаем вещественности всех этих параметров, то семейства разложений \mathcal{B}_j^+ и \mathcal{B}_j^- считаем разными семействами.

Замечание 2.3.3. Высота ребра $\Gamma_4^{(1)}$ равна трем. Определяющее уравнение (2.3.5) — третьей степени. Оказалось, что во всех случаях каждому его корню соответствует свое семейство разложений решений или своя пара в случае экзотических семейств.

Замечание 2.3.4. Семейства \mathcal{A}_0 , \mathcal{B}_1 – \mathcal{B}_6 , \mathcal{B}_0^r , \mathcal{B}_1^r , \mathcal{B}_2^r , \mathcal{B}_6^r называются базовыми. С помощью симметрий уравнения Р6 (2.1.6), (2.1.8) и (2.1.9) из них получаются другие семейства разложений.

Существование семейств \mathcal{B}_1 – \mathcal{B}_6 , \mathcal{B}_0^r , \mathcal{B}_1^r , \mathcal{B}_2^r , \mathcal{B}_6^r в зависимости от значений параметров показано в первых трех столбцах табл. 1 на стр. 16. Базовое семейство \mathcal{A}_0 существует при всех значениях параметров a , b , c , d уравнения (2.1.1).

§ 4. Разложения вблизи нуля, соответствующие ребру $\Gamma_1^{(1)}$

Семейства разложений \mathcal{H}_i , \mathcal{H}_i^r , соответствующие ребру $\Gamma_1^{(1)}$, получим из семейств разложений \mathcal{B}_i , \mathcal{B}_i^r , соответствующих ребру $\Gamma_4^{(1)}$, используя симметрию (2.1.8). Для этого в разложения, соответствующие ребру $\Gamma_4^{(1)}$, делается подстановка (2.1.8), вычисляются разложения с галочками, соответствующие ребру $\Gamma_1^{(1)}$, и галочки опускаются. При этом три случая: $a \neq c \neq 0$; $a = c \neq 0$ и $a \neq 0, c = 0$, рассмотренные для ребра $\Gamma_4^{(1)}$, перейдут соответственно в три случая: $b \neq d - 1/2 \neq 0$; $b = d - 1/2 \neq 0$ и $b \neq 0, d = 1/2$ для ребра $\Gamma_1^{(1)}$.

4.1. Разложения решений при $b \neq 0$. Рассмотрим разложения \mathcal{B}_0^r , которые определены формулой (2.3.4) и соответствуют ребру $\Gamma_4^{(1)}$. С помощью симметрии (2.1.8) переведем их в разложения \mathcal{H}_0^r , соответствующие ребру $\Gamma_1^{(1)}$.

Подставим в формулу (2.3.4) замену $x = \check{x}$, $y = \check{x}/\check{y}$ и, выражая \check{y} , получаем дробь

$$\check{y} = \frac{\check{x}}{(c_\rho \check{x}^\rho + \sum_s c_s \check{x}^s)}. \quad (2.4.1)$$

При $\check{x} \rightarrow 0$ выражение (2.4.1) можно разложить в формальный ряд

$$\check{y} = \frac{\check{x}^{1-\rho}}{c_\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \left(- \sum_s \frac{c_s}{c_\rho} \check{x}^{s-\rho} \right)^n. \quad (2.4.2)$$

Выписывая первые два члена ряда (2.4.2), получаем разложение

$$\check{y} = \frac{\check{x}^{1-\rho}}{c_\rho} - \sum_s \frac{c_s}{c_\rho^2} \check{x}^{s+1} + \dots \quad (2.4.3)$$

Положим

$$\check{\rho} = 1 - \rho, \quad \check{c}_\rho = \frac{1}{c_\rho}, \quad \check{c}_s = -\frac{c_s}{c_\rho^2}, \quad \check{s} = s + 1. \quad (2.4.4)$$

Поскольку $\check{y} = xy^{-1}(x)$ и согласно теоремам 1.5.3 и 2.3.1 для семейств \mathcal{B}_0^+ и \mathcal{B}_0^- семейства обратных разложений $y^{-1}(x)$ совпадают, то семейства \mathcal{H}_0^+ и \mathcal{H}_0^- совпадают и образуют семейство \mathcal{H}_0 . Таким образом, получаем одно двухпараметрическое семейство полукзотических разложений

$$\mathcal{H}_0: \quad \check{y} = \check{c}_\rho \check{x}^{\check{\rho}} + \check{c}_1 \check{x} + \check{c}_\beta \check{x}^{2-\check{\rho}} + \sum_s \check{c}_s \check{x}^{\check{s}} + \dots, \quad (2.4.5)$$

где $\check{\rho} - 1$ — чисто мнимая произвольная постоянная, согласно (2.3.3), (2.3.48), (2.4.4) и теореме 1.5.2 \check{s} пробегает множество $\{\check{\rho} + l\check{\rho} + m(1 - \check{\rho}), l, m \in \mathbb{Z}, l \geq 1, m \geq 0\} \cap \{2 - \check{\rho} + l(2 - \check{\rho}) + m(\check{\rho} - 1), l, m \in \mathbb{Z}, l \geq 1, m \geq 0\} = \{l + k(\check{\rho} - 1); l, k \in \mathbb{Z}; l \geq 2, |k| \leq l\}$, комплексные коэффициенты: \check{c}_β — произвольная постоянная, остальные коэффициенты \check{c}_1 и \check{c}_s постоянны и однозначно определены.

4.2. Разложения решений при $b \neq d - 1/2 \neq 0$. Рассмотрим разложения $\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_i^r$, $i = 1, 2$, соответствующие ребру $\Gamma_4^{(1)}$, и с помощью симметрии (2.1.8) переведем их в разложения $\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_i^r$, $i = 1, 2$, соответствующие ребру $\Gamma_1^{(1)}$.

Положим $\check{\theta}_i = \sqrt{1 - 2d} + (-1)^i \sqrt{-2b}$, $i = 1, 2$. Для каждого фиксированного i возможен один из трех случаев.

Случай 1. $\text{Re } \check{\theta}_i = 0$. В этом случае разложения \mathcal{B}_i , $i = 1, 2$, определяет формула (2.3.14). Подставим в нее $x = \check{x}, y = \check{x}/\check{y}$ и, выражая \check{y} , получаем дробь

$$\check{y} = \frac{\check{x}}{c_{0i} + \sum_s c_{si} \check{x}^s}. \quad (2.4.6)$$

При $\check{x} \rightarrow 0$ выражение (2.4.6) можно разложить в формальный ряд

$$\check{y} = \frac{\check{x}}{c_{0i}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(- \sum_s \frac{c_{si}}{c_{0i}} \check{x}^s \right)^n. \quad (2.4.7)$$

Выписывая первые два члена ряда (2.4.7), получаем разложение

$$\check{y} = \frac{\check{x}}{c_{0i}} - \sum_s \frac{c_{si}}{c_{0i}^2} \check{x}^{s+1} + \dots \quad (2.4.8)$$

Положим

$$\check{c}_{1i} = \frac{1}{c_{0i}}, \quad \check{c}_{si} = -\frac{c_{si}}{c_{0i}^2}, \quad \check{s} = s + 1. \quad (2.4.9)$$

Таким образом, для каждого значения i получаем два семейства экзотических разложений

$$\mathcal{H}_i^\tau : \check{y} = \check{c}_{1i}\check{x} + \sum_{\check{s}} \check{c}_{\check{s}i}\check{x}^{\check{s}} + \dots, \quad i = 1, 2, \quad \tau = \pm 1, \quad (2.4.10)$$

где согласно (2.3.13) и (2.4.9) \check{s} пробегает множество $\{1 + l + m\tau\check{\theta}_i, l, m \in \mathbb{Z}, l, m \geq 0, l + m > 0\}$, комплексные коэффициенты: \check{c}_{1i} получаем из (2.1.8), (2.3.6) и (2.4.9):

$$\check{c}_{1i} = \frac{2b + (-1)^i \sqrt{4bd - 2b}}{2b - 2d + 1}, \quad (2.4.11)$$

$\check{c}_{\check{s}i}$ с $\check{s} = 1 + \tau\check{\theta}_i$ — произвольная постоянная, остальные коэффициенты $\check{c}_{\check{s}i}$ постоянны и однозначно определены.

В случае $\check{c}_{\check{s}i} = 0$ с $\check{s} = 1 + \tau\check{\theta}_i$ второе приближение разложений решений (2.4.10) есть $\check{y} = \check{c}_{1i}\check{x} + \check{c}_{2i}\check{x}^2$. Согласно (2.1.8) и (2.3.16) коэффициент

$$\check{c}_{2i} = (-1)^i \sqrt{\frac{1 - 2d}{-2b}} \frac{(\sqrt{-2b} + (-1)^i \sqrt{1 - 2d})^2 - 2a + 2c - 1}{2 - 2(\sqrt{-2b} + (-1)^i \sqrt{1 - 2d})^2}. \quad (2.4.12)$$

Разложения (2.4.10) являются экзотическими, если $\check{c}_{\check{s}i}$ с $\check{s} = 1 + \tau\check{\theta}_i$ — ненулевая произвольная постоянная.

В случае $\check{c}_{\check{s}i} = 0$ с $\check{s} = 1 + \tau\check{\theta}_i$ разложения (2.4.10) являются разложениями по целым степеням x . Семейства таких разложений обозначим \mathcal{H}_i , $i = 1, 2$.

Положим $k_i = 1 + \check{\theta}_i$, если $\text{Re } \check{\theta}_i > 0$, и $k_i = 1 - \check{\theta}_i$, если $\text{Re } \check{\theta}_i < 0$.

Случай 2. $\text{Re } \check{\theta}_i \neq 0$, $\check{\theta}_i \notin \mathbb{Z}$. Аналогично из (2.3.18) с помощью (2.1.8) и (2.4.9) получаем однопараметрическое семейство степенных разложений

$$\mathcal{H}_i : \check{y} = \check{c}_{1i}\check{x} + \sum_{\check{s}} \check{c}_{\check{s}i}\check{x}^{\check{s}} + \dots, \quad i = 1, 2, \quad (2.4.13)$$

где $\check{s} \in \{1 + l + m k_i, l, m \in \mathbb{Z}, l, m \geq 0, l + m > 0\}$, комплексные коэффициенты таковы: \check{c}_{1i} определен формулой (2.4.11), $\check{c}_{k_i i}$ — произвольный, остальные $\check{c}_{\check{s}i}$ постоянны и однозначно определены.

Второе приближение разложения решения (2.4.13) зависит от расположения числа $\text{Re } k_i$. Если $\text{Re } k_i > 2$, тогда второе приближение решений имеет вид $\check{y} = \check{c}_{1i}\check{x} + \check{c}_{2i}\check{x}^2$, что аналогично случаю $\text{Re } \check{\theta}_i = 0$. Если $1 < \text{Re } k_i < 2$, то второе приближение решений будет иметь вид $\check{y} = \check{c}_{1i}\check{x} + \check{c}_{k_i i}\check{x}^{k_i}$, где коэффициент $\check{c}_{k_i i}$ — произвольный. Если $\text{Re } k_i = 2$, то второе приближение решений будет иметь вид $\check{y} = \check{c}_{1i}\check{x} + \check{c}_{2i}\check{x}^2 + \check{c}_{k_i i}\check{x}^{k_i}$, где коэффициенты таковы: $\check{c}_{k_i i}$ — произвольный, \check{c}_{2i} определен формулой (2.4.12).

Случай 3. $\check{\theta}_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Имеем однопараметрическое семейство степенно-логарифмических разложений

$$\mathcal{H}_i : \check{y} = \check{c}_{1i}\check{x} + \sum_{\check{s}=2}^{\infty} \check{c}_{\check{s}i}(\ln \check{x})\check{x}^{\check{s}} + \dots, \quad i = 1, 2, \quad (2.4.14)$$

где коэффициент \check{c}_{1i} определен формулой (2.4.11), коэффициент $\check{c}_{k_i i} = \check{\alpha}_{k_i i} + \check{\beta}_{k_i i} \ln \check{x}$, $\check{\alpha}_{k_i i}$ — произвольная постоянная, коэффициент $\check{\beta}_{k_i i}$ — постоянный и однозначно

определенный, остальные \check{c}_{3i} — многочлены от $\ln \check{x}$, которые однозначно определяются.

Второе приближение разложения решения (2.4.14) зависит от расположения числа k_i . Если $k_i = 2$, тогда второе приближение решения имеет вид $y = \check{c}_{1i}\check{x} + \check{c}_{2i}\check{x}^2$. Согласно (2.1.8) и (2.3.20) коэффициент

$$\check{c}_{2i} = \check{\alpha}_{2i} + (-1)^i \sqrt{\frac{1-2d}{-2b} \frac{(\sqrt{-2b} + (-1)^i \sqrt{1-2d})^2 - 2a + 2c - 1}{4}} \ln \check{x}, \quad (2.4.15)$$

где $\check{\alpha}_{2i}$ — произвольная постоянная.

Если $(\sqrt{-2b} + (-1)^i \sqrt{1-2d})^2 - 2a + 2c - 1 = 0$, то выполнено условие совместности и в разложении (2.4.14) отсутствуют логарифмы.

Аналогично с помощью симметрии (2.1.8) из (2.3.30) получаем однопараметрическое семейство сложных разложений

$$\mathcal{H}_3 : \quad \check{y} = \check{\varphi}_1 \check{x} + \sum_{\check{\sigma}=2}^{\infty} \check{\varphi}_{\check{\sigma}} \check{x}^{\check{\sigma}}, \quad (2.4.16)$$

где

$$\check{\varphi}_1 = \frac{1+2b-2d}{4} \ln^2 \check{x} + \check{c}_1 \ln \check{x} + \sum_{\check{s}=0}^{\infty} \check{c}_{-s} \ln^{-s} \check{x}, \quad (2.4.17)$$

комплексные коэффициенты таковы: \check{c}_1 — произвольный, остальные \check{c}_{-s} постоянны и однозначно определены; $\check{\varphi}_{\check{\sigma}}$ — ряды по убывающим степеням логарифмов.

4.3. Разложения решений при $b = d - 1/2 \neq 0$. Из разложений (2.3.58) получаем два однопараметрических семейства сложных разложений

$$\mathcal{H}_{3+j} : \quad \check{y} = \check{\phi}_{1j} \check{x} + \sum_{\check{\sigma}=2}^{\infty} \check{\phi}_{\check{\sigma}j} \check{x}^{\check{\sigma}}, \quad j = 1, 2, \quad (2.4.18)$$

где

$$\check{\phi}_{1j} = (-1)^j \sqrt{-2b} \ln \check{x} + \check{c}_{0j} + \sum_{\check{s}=1}^{\infty} \check{c}_{-sj} \ln^{-s} \check{x}, \quad j = 1, 2, \quad (2.4.19)$$

комплексные коэффициенты таковы: \check{c}_{0j} — произвольная постоянная, остальные \check{c}_{-sj} постоянны и однозначно определены; $\check{\phi}_{\check{\sigma}j}$ — ряды по убывающим степеням логарифмов.

Семейства разложений \mathcal{H}_2 и \mathcal{H}_2^r сохраняются из случая $b \neq d - 1/2 \neq 0$. В качестве значения $\check{\theta}_2$ берем $2\sqrt{-2b}$ с $\text{Re } \check{\theta}_2 \geq 0$. В зависимости от этого значения возможны три случая, а именно: случай 1 ($\text{Re } \check{\theta}_2 = 0$, семейства экзотических разложений \mathcal{H}_2^r определяются формулой (2.4.10)), случай 2 ($\text{Re } \check{\theta}_2 \neq 0$, $\check{\theta}_2 \notin \mathbb{Z}$, однопараметрическое семейство степенных разложений \mathcal{H}_2 определяется формулой (2.4.13)), случай 3 ($\check{\theta}_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, однопараметрическое семейство степенно-логарифмических разложений \mathcal{H}_2 определяется формулой (2.4.14)).

4.4. Разложения решений при $d = 1/2$, $b \neq 0$. В случае $\text{Re } \sqrt{-2b} > 0$ имеем однопараметрическое семейство степенных разложений

$$\mathcal{H}_6 : \quad \check{y} = \check{x} + \check{c}_{\rho} \check{x}^{\check{\rho}} + \sum_{\check{s}} \check{c}_{\check{s}} \check{x}^{\check{s}}, \quad (2.4.20)$$

где $\check{c}_\rho \neq 0$, \check{c}_ρ — произвольная постоянная, $\check{\rho} = 1 + \sqrt{-2b}$, \check{s} пробегает множество $\{\check{\rho} + l(\check{\rho} - 1) + m; l, m \geq 0; l + m > 0; l, m \in \mathbb{Z}\}$, остальные комплексные коэффициенты \check{c}_s постоянны и однозначно определены.

Если $\operatorname{Re} \check{\rho} > 2$, третье приближение разложения (2.4.20) имеет вид $\check{y} = \check{x} + \check{c}_\rho \check{x}^{\check{\rho}} + \check{c}_{\check{\rho}+1} \check{x}^{\check{\rho}+1}$. Коэффициент

$$\check{c}_{\check{\rho}+1} = -\check{c}_\rho \frac{2b + 2a - 2c + 1}{2\check{\rho}}. \quad (2.4.21)$$

Если $1 < \operatorname{Re} \check{\rho} < 2$, третье приближение разложения (2.4.20) имеет вид $\check{y} = \check{x} + \check{c}_\rho \check{x}^{\check{\rho}} + \check{c}_{2\check{\rho}-1} \check{x}^{2\check{\rho}-1}$. Коэффициент

$$\check{c}_{2\check{\rho}-1} = -\check{c}_\rho^2. \quad (2.4.22)$$

Если $\operatorname{Re} \check{\rho} = 2$, $\operatorname{Im} \check{\rho} \neq 0$, третье приближение разложения (2.4.20) имеет вид $\check{y} = \check{x} + \check{c}_\rho \check{x}^{\check{\rho}} + \check{c}_{\check{\rho}+1} \check{x}^{\check{\rho}+1} + \check{c}_{2\check{\rho}-1} \check{x}^{2\check{\rho}-1}$, где коэффициенты $\check{c}_{\check{\rho}+1}$ и $\check{c}_{2\check{\rho}-1}$ определены формулами (2.4.21) и (2.4.22) соответственно. В случае $\check{\rho} = 2$ третье приближение разложения (2.4.20) имеет вид $\check{y} = \check{x} + \check{c}_2 \check{x}^2 + \check{c}_3 \check{x}^3$. Коэффициенты: \check{c}_2 — ненулевая произвольная постоянная, $\check{c}_3 = -\check{c}_2(2b + 2a - 2c + 1 + 4\check{c}_2)/4$ есть сумма выражений (2.4.21) и (2.4.22).

В случае $\operatorname{Re} \sqrt{-2b} = 0$ имеем два однопараметрических семейства экзотических разложений

$$\mathcal{H}_6^\tau: \check{y} = \check{x} + \check{c}_\rho \check{x}^{\check{\rho}} + \sum_s \check{c}_s \check{x}^s, \quad \tau = \pm 1, \quad (2.4.23)$$

где $\check{\rho} = 1 + \sqrt{-2b}$, \check{s} пробегает множество $\{\check{\rho} + l(\check{\rho} - 1) + m; l, m \geq 0; l + m > 0; l, m \in \mathbb{Z}\}$, комплексные коэффициенты: \check{c}_ρ — ненулевая произвольная постоянная, остальные \check{c}_s постоянны и однозначно определены.

Здесь имеется также однопараметрическое семейство \mathcal{H}_3 , которое определяется формулами (2.4.16), (2.4.17).

4.5. Сводка результатов и их обсуждение.

Теорема 2.4.1. Ребру $\Gamma_1^{(1)}$ соответствуют 6 семейств разложений решений типов 1–3:

$\mathcal{H}_1 = \check{\mathcal{B}}_1$, которое существует при $b \neq d - 1/2 \neq 0$, определяется формулами (2.4.10), (2.4.13), (2.4.14) и имеет 1 или 0 параметров;

$\mathcal{H}_2 = \check{\mathcal{B}}_2$, которое существует при $d \neq 1/2$, определяется формулами (2.4.10), (2.4.13), (2.4.14) и имеет 1 или 0 параметров;

$\mathcal{H}_3 = \check{\mathcal{B}}_3$, которое существует при $b \neq d - 1/2$, определяется формулами (2.4.16), (2.4.17) и имеет 1 параметр;

$\mathcal{H}_4 = \check{\mathcal{B}}_4$ и $\mathcal{H}_5 = \check{\mathcal{B}}_5$, которые существуют при $b = d - 1/2$, определяются формулами (2.4.18), (2.4.19) и имеют 1 параметр;

$\mathcal{H}_6 = \check{\mathcal{B}}_6$, которое существует при $d = 1/2$, определяется формулой (2.4.20) и имеет 1 параметр;

одно семейство полужэкзотических разложений:

$\mathcal{H}_0 = \check{\mathcal{B}}_0^\tau$, которое существует при $b \neq 0$, определяется формулой (2.4.5) и имеет 2 параметра;

и 3 пары семейств экзотических разложений решений с $\tau = \pm 1$:

$\mathcal{H}_1^\tau = \check{\mathcal{B}}_1^\tau$, которые существуют при $b \neq d - 1/2 \neq 0$, $\operatorname{Re}(\sqrt{1 - 2d} - \sqrt{-2b}) = 0$, определяются формулой (2.4.10) и имеют 1 параметр;

$\mathcal{H}_2^\tau = \check{\mathcal{B}}_2^\tau$, которые существуют при $b \neq 0$, $d \neq 1/2$, $\operatorname{Re}(\sqrt{1 - 2d} + \sqrt{-2b}) = 0$, определяются формулой (2.4.10) и имеют 1 параметр;

$\mathcal{H}_6^\tau = \check{\mathcal{B}}_6^\tau$, которые существуют при $b \neq 0$, $d = 1/2$, $\operatorname{Re} \sqrt{-2b} = 0$, определяются формулой (2.4.23) и имеют 1 параметр.

$\check{\mathcal{B}}_i$ означает семейство, полученное из \mathcal{B}_i симметрией (2.1.8).

Семейства \mathcal{H}_3 , \mathcal{H}_4 , \mathcal{H}_5 — сложные, семейства \mathcal{H}_1 , \mathcal{H}_2 , \mathcal{H}_6 — степенные или степенно-логарифмические.

§ 5. Разложения вблизи бесконечности

С помощью симметрии (2.1.6) из разложений решений уравнения (2.1.1) при $x \rightarrow 0$ получим разложения его решений при $x \rightarrow \infty$. Для этого в разложения, найденные при $x \rightarrow 0$, делается подстановка (2.1.6), вычисляются новые разложения со звездочками при $x \rightarrow \infty$ и звездочки опускаются.

Подробно рассмотрим преобразование разложения, соответствующего вершине $\Gamma_4^{(0)}$, в разложение, соответствующее вершине $\Gamma_2^{(0)}$. Остальные разложения вблизи бесконечности, соответствующие ребрам $\Gamma_2^{(1)}$ и $\Gamma_3^{(1)}$, перечислим.

5.1. Разложения, соответствующие вершине $\Gamma_2^{(0)}$. Эти разложения получим из разложений, образующих семейство \mathcal{A}_0 , соответствующих вершине $\Gamma_4^{(0)}$ и определяемых формулой (2.2.6), где показатель r произвольный и удовлетворяет условиям $0 < \operatorname{Re} r < 1$, s пробегает множество (2.2.5), комплексные коэффициенты: c_r — ненулевая произвольная постоянная, остальные c_s постоянны и однозначно определены. Подставляя в (2.1.2) выражения $x = 1/x^*$, $y = 1/y^*$ и выражая y^* , получаем дробь

$$y^* = \frac{1}{c_r x^{*-r} + \sum_s c_s x^{*-s}}, \tag{2.5.1}$$

где $c_r \neq 0$ — произвольная постоянная, остальные коэффициенты c_s постоянны и однозначно определены, показатель степени r — произвольный, $0 < \operatorname{Re} r < 1$, s пробегает множество (2.2.5). При $x^* \rightarrow \infty$ (2.5.1) можно разложить в формальный ряд

$$y^* = \frac{x^{*r}}{c_r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(- \sum_s \frac{c_s}{c_r} x^{*-s+r} \right)^n. \tag{2.5.2}$$

Выписывая первые два члена ряда (2.5.2), получаем разложение

$$y^* = \frac{1}{c_r} x^{*r} - \sum_s \frac{c_s}{c_r^2} x^{*-s+2r} + \dots \tag{2.5.3}$$

Положим

$$c_r^* = 1/c_r, \quad c_s^* = -c_s/c_r^2, \quad s^* = -s + 2r. \tag{2.5.4}$$

Наконец, учитывая (2.2.5) и (2.5.4), получаем разложение

$$y^* = c_r^* x^{*r} + \sum_{s^*} c_{s^*}^* x^{*s^*}, \quad (2.5.5)$$

где показатель степени r — произвольный с $0 < \operatorname{Re} r < 1$, $s^* \in \{r - lr + m(r - 1)\}$; $l, m \geq 0$; $l + m > 0$; $l, m \in \mathbb{Z}$, комплексные коэффициенты: c_r^* — ненулевая произвольная постоянная, остальные $c_{s^*}^*$ постоянны и однозначно определены.

Таким образом, при $x^* \rightarrow \infty$ имеем двухпараметрическое (по c_r^* и r) семейство \mathcal{A}_∞ разложений, определенных формулой (2.5.5).

Вычислим второе приближение решения. Рассмотрим четыре случая.

В случае $1/2 < \operatorname{Re} r < 1$ второе приближение решения есть $y^* = c_r^* x^{*r} + c_{2r-1}^* x^{*2r-1}$. Коэффициент

$$c_{2r-1}^* = c_r^{*2} \frac{2(a+d) + (r-1)^2 - 1}{2(r-1)^2}. \quad (2.5.6)$$

В случае $0 < \operatorname{Re} r < 1/2$ второе приближение решения есть $y^* = c_r^* x^{*r} + c_0^*$. Коэффициент:

$$c_0^* = \frac{2(b+c) - r^2}{2r^2}. \quad (2.5.7)$$

В случае $r = 1/2$ второе приближение решения есть $y^* = c_{1/2}^* \sqrt{x^*} + c_0^*$, где $c_{1/2}^*$ — произвольная постоянная, коэффициент $c_0^* = (-1 + 8(b+c) - 3c_{1/2}^{*2} + 8c_{1/2}^{*2}(a+d))/2$.

В случае $\operatorname{Re} r = 1/2$, $\operatorname{Im} r \neq 0$ второе приближение решения есть $y^* = c_r^* x^{*r} + c_0^* + c_{2r-1}^* x^{*2r-1}$, где коэффициенты c_{2r-1}^* и c_0^* определены ранее формулами (2.5.6) и (2.5.7) соответственно.

5.2. Разложения решений, соответствующие ребру $\Gamma_2^{(1)}$. Здесь рассматриваем четыре случая: $b \neq 0$, $-b \neq c \neq 0$, $-b = c \neq 0$ и $b \neq 0$, $c = 0$.

Разложения решений при $b \neq 0$. Имеем одно двухпараметрическое семейство полуэкзотических разложений

$$\mathcal{D}_0: y^* = c_{\rho^*}^* x^{*\rho^*} + c_0^* + c_{\rho^*}^* x^{*-\rho^*} + \sum_{s^*} c_{s^*}^* x^{*s^*}, \quad (2.5.8)$$

где $\rho^* \neq 0$ — произвольная чисто мнимая постоянная, s^* пробегает множество $\{l + k\rho^*; l \leq -1; |k| \leq |l| + 1; l, k \in \mathbb{Z}\}$, комплексные коэффициенты таковы: $c_{\rho^*}^*$ — произвольная ненулевая постоянная, c_0^* и $c_{s^*}^*$ постоянны и однозначно определены.

Разложения решений при $-b \neq c \neq 0$. Положим $\theta_i^* \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{2c} + (-1)^i \sqrt{-2b}$, $i = 1, 2$. Для каждого фиксированного i в зависимости от значения θ_i^* возможен один из трех случаев.

Случай 1. $\operatorname{Re} \theta_i^* = 0$. Имеем два однопараметрических семейства экзотических разложений

$$\mathcal{D}_i^\tau: y^* = c_{0i}^* + \sum_{s^*} c_{s^*i}^* x^{*s^*}, \quad \tau = \pm 1, \quad (2.5.9)$$

где $s^* \in \{-l + m\tau\theta_i^*; l, m \geq 0; l + m > 0; l, m \in \mathbb{Z}\}$; комплексные коэффициенты: $c_{s^*i}^*$ с $s^* = \tau\theta_i^*$ — произвольная постоянная, c_{0i}^* получается из (2.1.6), (2.3.6) и (2.5.4):

$$c_{0i}^* = \frac{b + (-1)^i \sqrt{-bc}}{b + c}, \quad i = 1, 2, \quad (2.5.10)$$

остальные $c_{s^*i}^*$ постоянны и однозначно определены.

Если $c_{s^*i}^* = 0$ с $s^* = \tau\theta_i^*$, то второе приближение разложений решений (2.5.9) есть $y^* = c_{0i}^* + c_{-1i}^* x^{*-1}$. Из (2.1.6), (2.3.16) и (2.5.4) следует, что коэффициент

$$c_{-1i}^* = (-1)^i \sqrt{-\frac{c}{b}} \frac{(\sqrt{-b} + (-1)^i \sqrt{c})^2 - a - d}{1 - 2(\sqrt{-b} + (-1)^i \sqrt{c})^2}. \quad (2.5.11)$$

В случае $c_{s^*i}^* = 0$ с $s^* = \tau\theta_i^*$ разложения (2.5.9) являются разложениями по целым степеням x . Семейства таких разложений обозначим $\mathcal{D}_i, i = 1, 2$.

Положим $k_i = \theta_i^*$, если $\text{Re } \theta_i^* < 0$, и $k_i = -\theta_i^*$, если $\text{Re } \theta_i^* > 0$.

Случай 2. $\text{Re } \theta_i^* \neq 0, \theta_i^* \notin \mathbb{Z}$. Имеем однопараметрическое семейство степенных разложений

$$\mathcal{D}_i: \quad y^* = c_{0i}^* + \sum_{s^*} c_{s^*i}^* x^{*s^*}, \quad i = 1, 2, \quad (2.5.12)$$

где $s^* \in \{-l + mk_i; l, m \in \mathbb{Z}; l, m \geq 0; l + m > 0\}$, комплексные коэффициенты таковы: c_{0i}^* определен формулой (2.5.10), $c_{k_i i}^*$ — произвольный, остальные $c_{s^*i}^*$ постоянны и однозначно определены. Второе приближение разложений решений (2.5.12) зависит от расположения числа $\text{Re } k_i$. Если $\text{Re } k_i < -1$, тогда второе приближение решений имеет вид $y^* = c_{0i}^* + c_{-1i}^* x^{*-1}$, коэффициент c_{-1i}^* определен формулой (2.5.11). Если $-1 < \text{Re } k_i < 0$, то второе приближение решения будет иметь вид $y^* = c_{0i}^* + c_{k_i i}^* x^{*k_i}$, где коэффициент $c_{k_i i}^*$ — произвольный. Если $\text{Re } k_i = -1$, то второе приближение решения будет иметь вид $y^* = c_{0i}^* + c_{-1i}^* x^{*-1} + c_{k_i i}^* x^{*k_i}$, где коэффициенты таковы: $c_{k_i i}^*$ — произвольный, c_{-1i}^* определен формулой (2.5.11).

Случай 3. $\theta_i^* \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Имеем однопараметрическое семейство степенно-логарифмических разложений

$$\mathcal{D}_i: \quad y^* = c_{0i}^* + \sum_{s^*=1}^{+\infty} c_{-s^*i}^* (\ln x^*) x^{*-s^*}, \quad i = 1, 2, \quad (2.5.13)$$

где коэффициенты таковы: c_{0i}^* определен формулой (2.3.6); $c_{k_i i}^* = \alpha_{k_i i}^* + \beta_{k_i i}^* \ln x^*$, где $\alpha_{k_i i}^*$ — произвольная постоянная, коэффициент $\beta_{k_i i}^*$ постоянный и однозначно определенный; комплексные коэффициенты $c_{s^*i}^*$ — многочлены от $\ln x^*$, которые однозначно определяются. Второе приближение разложения решения (2.5.13) зависит от расположения числа k_i . Если $k_i = -1$, тогда второе приближение решения имеет вид $y^* = c_{0i}^* + c_{-1i}^* x^{*-1}$. Коэффициент:

$$c_{-1i}^* = \alpha_{-1i}^* + (-1)^i \sqrt{-\frac{c}{b}} \frac{(\sqrt{-b} + (-1)^i \sqrt{c})^2 - a - d}{2} \ln x^*, \quad (2.5.14)$$

где α_{-1i}^* — произвольная постоянная.

Также имеется однопараметрическое семейство сложных разложений

$$\mathcal{D}_3: \quad y^* = \varphi_0^* + \sum_{\sigma^*=1}^{\infty} \varphi_{-\sigma^*}^* x^{-\sigma^*}, \quad (2.5.15)$$

где

$$\varphi_0^* = \frac{b+c}{2} \ln^2 x^* + c_1^* \ln x^* + \sum_{s^*=0}^{\infty} c_{-s^*}^* \ln^{-s^*} x^*, \quad (2.5.16)$$

комплексные коэффициенты таковы: c_1^* — произвольная постоянная, $c_{-s^*}^*$ постоянны и однозначно определены; $\varphi_{-\sigma^*}^*$ — ряды по убывающим степеням $\ln x^*$.

Разложения решений при $-b = c \neq 0$. В этом случае существуют два однопараметрических семейства сложных разложений

$$\mathcal{D}_{3+j}: \quad y^* = \phi_{0j}^* + \sum_{\sigma^*=1}^{\infty} \phi_{-\sigma^*j}^* x^{*\sigma^*}, \quad j = 1, 2, \quad (2.5.17)$$

где

$$\phi_{0j}^* = (-1)^j \sqrt{-2b} \ln x^* + c_{0j}^* + \sum_{s^*=1}^{\infty} c_{-s^*j}^* \ln^{-s^*} x^*, \quad j = 1, 2, \quad (2.5.18)$$

комплексные коэффициенты таковы: c_{0j}^* — произвольная постоянная, $c_{-s^*j}^*$ постоянны и однозначно определены; $\phi_{-\sigma^*j}^*$ — ряды по убывающим степеням $\ln x^*$.

Семейства разложений \mathcal{D}_2 и \mathcal{D}_2^r сохраняются из случая $-b \neq c \neq 0$. В качестве θ_2^* берем $2\sqrt{-2b}$ с $\operatorname{Re} \sqrt{-2b} \leq 0$. В зависимости от его значения возможны три случая. А именно: случай 1 ($\operatorname{Re} \theta_2^* = 0$, два однопараметрических семейства экзотических разложений \mathcal{D}_2^r определяются формулой (2.5.9)), случай 2 ($\operatorname{Re} \theta_2^* \neq 0$, $\theta_2^* \notin \mathbb{Z}$, однопараметрическое семейство степенных разложений \mathcal{D}_2 определяется формулой (2.5.12)), случай 3 ($\theta_2^* \in \mathbb{Z}$, однопараметрическое семейство степенно-логарифмических разложений \mathcal{D}_2 определяется формулой (2.5.13)).

Разложения решений при $b \neq 0, c = 0$. При $\operatorname{Re} \sqrt{-2b} < 0$ имеем однопараметрическое семейство степенных разложений

$$\mathcal{D}_6: \quad y^* = 1 + c_{\rho^*}^* x^{*\rho^*} + \sum_{s^*} c_{s^*}^* x^{*s^*}, \quad (2.5.19)$$

где $\rho^* = \sqrt{-2b}$, s^* пробегает множество $\{\rho^* + l\rho^* - m; l, m \geq 0; l+m > 0; l, m \in \mathbb{Z}\}$, комплексные коэффициенты: $c_{\rho^*}^*$ — ненулевая произвольная постоянная, остальные $c_{s^*}^*$ постоянны и однозначно определены.

Если $\operatorname{Re} \rho^* < -1$, то третье приближение разложения (2.5.19) имеет вид $y = 1 + c_{\rho^*}^* x^{*\rho^*} + c_{\rho^*-1}^* x^{*\rho^*-1}$. Коэффициент

$$c_{\rho^*-1}^* = c_{\rho^*}^* \frac{a+b+d}{\rho^*-1}. \quad (2.5.20)$$

Если $-1 < \operatorname{Re} \rho^* < 0$, то третье приближение разложения (2.5.19) имеет вид $y^* = 1 + c_{\rho^*}^* x^{*\rho^*} + c_{2\rho^*}^* x^{*2\rho^*}$. Коэффициент

$$c_{2\rho^*}^* = -c_{\rho^*}^{*2}. \quad (2.5.21)$$

Если $\operatorname{Re} \rho^* = -1$, $\operatorname{Im} \rho^* \neq 0$, то третье приближение разложения (2.5.19) имеет вид $y^* = 1 + c_{\rho^*}^* x^{*\rho^*} + c_{\rho^*-1}^* x^{*\rho^*-1} + c_{2\rho^*}^* x^{*2\rho^*}$, где коэффициенты $c_{\rho^*-1}^*$ и $c_{2\rho^*}^*$ определены формулами (2.5.20) и (2.5.21) соответственно. Если $\rho^* = -1$, то третье приближение разложения (2.5.19) имеет вид $y^* = 1 + c_{-1}^* x^{*-1} + c_{-2}^* x^{*-2}$. Коэффициенты: c_{-1}^* — ненулевая произвольная постоянная, $c_{-2}^* = -c_{-1}^*(a + b + d + 2c_{-1}^*)/2$ есть сумма выражений (2.5.20) и (2.5.21).

Если $\operatorname{Re} \sqrt{-2b} = 0$, то существуют два однопараметрических семейства экзотических разложений

$$\mathcal{D}_6^T: y^* = 1 + c_{\rho^*}^* x^{*\rho^*} + \sum_{s^*} c_{s^*}^* x^{*s^*}, \quad (2.5.22)$$

где $\rho^* = \sqrt{-2b}$, s^* пробегает множество $\{\rho^* + l\rho^* - m; l, m \geq 0; l + m > 0; l, m \in \mathbb{Z}\}$, $\tau = \pm 1$, комплексные коэффициенты: $c_{\rho^*}^*$ — ненулевая произвольная постоянная, все $c_{s^*}^*$ постоянны и однозначно определены.

Также здесь имеется однопараметрическое семейство сложных разложений \mathcal{D}_3 , которое определяется формулами (2.5.15), (2.5.16).

5.3. Разложения решений, соответствующие ребру $\Gamma_3^{(1)}$. Здесь также рассматриваем четыре случая: $a \neq 0$, $a \neq -d + 1/2 \neq 0$, $a = -d + 1/2 \neq 0$ и $d = 1/2$, $a \neq 0$.

Разложения решений при $a \neq 0$. Имеем два двухпараметрических семейства экзотических разложений

$$\mathcal{G}_0^T: y^* = c_{\rho^*}^* x^{*\rho^*} + \sum_{s^*} c_{s^*}^* x^{*s^*}, \quad \tau = \operatorname{sgn} \operatorname{Im}(\rho^* - 1), \quad (2.5.23)$$

где $\rho^* - 1$ — произвольная чисто мнимая постоянная, s^* пробегает множество $\{\rho^* - l\rho^* + m(\rho^* - 1); l, m \geq 0; l + m > 0; l, m \in \mathbb{Z}\}$, комплексные коэффициенты таковы: $c_{\rho^*}^*$ — произвольная постоянная, $c_{s^*}^*$ постоянны и однозначно определены.

Разложения решений при $a \neq -d + 1/2 \neq 0$. Положим $\theta_i^* \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{1 - 2d} + (-1)^i \sqrt{2a}$, $i = 1, 2$. Для каждого фиксированного i , в зависимости от значения θ_i^* возможен один из трех случаев.

Случай 1. $\operatorname{Re} \theta_i^* = 0$. Имеем два однопараметрических семейства экзотических разложений

$$\mathcal{G}_i^T: y^* = c_{1i}^* x^* + \sum_{s^*} c_{s^*i}^* x^{*s^*}, \quad i = 1, 2, \quad \tau = \pm 1, \quad (2.5.24)$$

где $s^* \in \{1 - l + m\tau\theta_i^*; l, m \geq 0; l + m > 0; l, m \in \mathbb{Z}\}$; комплексные коэффициенты: $c_{s^*i}^*$, с $s^* = 1 + \tau\theta_i^*$ — произвольная постоянная, c_{1i}^* получается из (2.1.6), (2.4.11) и (2.5.4):

$$c_{1i}^* = 1 + (-1)^i \sqrt{\frac{1 - 2d}{2a}}, \quad (2.5.25)$$

остальные $c_{s^*i}^*$ постоянны и однозначно определены.

Если $c_{s^*i}^* = 0$ с $s^* = 1 + \tau\theta_i^*$, второе приближение разложений решений (2.5.24) есть $y^* = c_{1i}^* x^* + c_{0i}^*$. Из (2.1.6), (2.4.12) и (2.5.4) следует, что коэффициент

$$c_{0i}^* = (-1)^i \sqrt{\frac{1 - 2d}{2a} \frac{(\sqrt{2a} + (-1)^i \sqrt{1 - 2d})^2 + 2b + 2c - 1}{2 - 2(\sqrt{2a} + (-1)^i \sqrt{1 - 2d})^2}}. \quad (2.5.26)$$

В случае $c_{s^*i}^* = 0$ с $s^* = 1 + \tau\theta_i^*$ разложения (2.5.24) являются разложениями по целым степеням x . Семейства таких разложений обозначим \mathcal{G}_i , $i = 1, 2$.

Положим $k_i = 1 + \theta_i^*$, если $\operatorname{Re} \theta_i^* < 0$, и $k_i = 1 - \theta_i^*$, если $\operatorname{Re} \theta_i^* > 0$.

Случай 2. $\operatorname{Re} \theta_i^* \neq 0$, $\theta_i^* \notin \mathbb{Z}$. Здесь имеем однопараметрическое семейство степенных разложений

$$\mathcal{G}_i: \quad y^* = c_{1i}^* x^* + \sum_{s^*} c_{s^*i}^* x^{*s^*}, \quad i = 1, 2, \quad (2.5.27)$$

где комплексные коэффициенты таковы: c_{1i}^* определен формулой (2.5.25), $c_{k_i i}^*$ — произвольный, остальные $c_{s^*i}^*$ постоянны и однозначно определены, s^* пробегает множество $\{1 - l + mk_i; l, m \in \mathbb{Z}; l, m \geq 0; l + m > 0\}$. Второе приближение разложений решений (2.5.27) зависит от расположения числа $\operatorname{Re} k_i$. Если $\operatorname{Re} k_i < 0$, тогда второе приближение решений имеет вид $y^* = c_{1i}^* x^* + c_{0i}^*$, коэффициент c_{0i}^* определен формулой (2.5.26). Если $0 < \operatorname{Re} k_i < 1$, то второе приближение решений будет иметь вид $y^* = c_{1i}^* x^* + c_{k_i i}^* x^{*k_i}$, где коэффициент $c_{k_i i}^*$ — произвольный. Если $\operatorname{Re} k_i = 0$, то второе приближение решений есть $y^* = c_{1i}^* x^* + c_{0i}^* + c_{k_i i}^* x^{*k_i}$, где коэффициенты таковы: $c_{k_i i}^*$ — произвольный, c_{0i}^* определен формулой (2.5.26).

Случай 3. $\theta_i^* \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ Имеем однопараметрическое семейство степенно-логарифмических разложений

$$\mathcal{G}_i: \quad y^* = c_{1i}^* x^* + \sum_{s^*=0}^{+\infty} c_{s^*i}^* (\ln x^*) x^{*s^*}, \quad i = 1, 2, \quad (2.5.28)$$

где коэффициенты таковы: c_{1i}^* определен формулой (2.5.25), коэффициент $c_{k_i i}^* = \alpha_{k_i i}^* + \beta_{k_i i}^* \ln x^*$, $\alpha_{k_i i}^*$ — произвольная постоянная, коэффициент $\beta_{k_i i}^*$ — постоянный и однозначно определенный, остальные $c_{s^*i}^*$ — многочлены от $\ln x^*$, которые однозначно определяются. Второе приближение разложения решения (2.5.24) зависит от расположения числа k_i . Если $k_i = 0$, тогда второе приближение решения имеет вид $y^* = c_{1i}^* x^* + c_{0i}^*$. Коэффициент

$$c_{0i}^* = \alpha_{0i}^* + (-1)^i \sqrt{\frac{1-2d}{2a}} \frac{(\sqrt{2a} + (-1)^i \sqrt{1-2d})^2 + 2b + 2c^* - 1}{4} \ln x^*, \quad (2.5.29)$$

где α_{0i}^* — произвольная постоянная.

Здесь имеется также однопараметрическое семейство

$$\mathcal{G}_3: \quad y^* = \varphi_1^* x^* + \sum_{\sigma^*=0}^{\infty} \varphi_{-\sigma^*}^* x^{*-\sigma^*}, \quad (2.5.30)$$

где

$$\varphi_1^* = \frac{4}{1-2a-2d} \frac{1}{\ln^2 x^*} + \frac{c_{-3}^*}{\ln^3 x^*} + \sum_{s^*=4}^{\infty} \frac{c_{-s^*}^*}{\ln^{s^*} x^*}, \quad (2.5.31)$$

комплексные коэффициенты таковы: c_{-3}^* — произвольная постоянная, $c_{-s^*}^*$ постоянны и однозначно определены; $\varphi_{\sigma^*}^*$ — ряды по убывающим степеням логарифмов.

Разложения решений при $a = -d + 1/2 \neq 0$. Имеем два однопараметрических семейства сложных разложений

$$\mathcal{G}_{3+j} : y^* = \phi_{1j}^* x^* + \sum_{\sigma^*=0}^{\infty} \phi_{-\sigma^*j}^* x^{*-\sigma^*}, \quad j = 1, 2, \quad (2.5.32)$$

где

$$\phi_{1j}^* = (-1)^j \frac{1}{\sqrt{2a}} \frac{1}{\ln x^*} + \frac{c_{-2j}^*}{\ln^2 x^*} + \sum_{s^*=3}^{\infty} \frac{c_{-s^*j}^*}{\ln^{s^*} x^*}, \quad (2.5.33)$$

комплексные коэффициенты таковы: c_{-2j}^* — произвольная постоянная, $c_{-s^*j}^*$ постоянны и однозначно определены; $\phi_{\sigma^*j}^*$ — ряды по убывающим степеням логарифмов.

Семейства разложений \mathcal{G}_2 и \mathcal{G}_2^r сохраняются из случая $a \neq -d + 1/2 \neq 0$. В качестве θ_2^* берем $2\sqrt{2a}$ с $\operatorname{Re} \sqrt{2a} \leq 0$. В зависимости от его значения возможны три случая. А именно: случай 1 ($\operatorname{Re} \theta_2^* = 0$, однопараметрические семейства экзотических разложений \mathcal{G}_2^r определяются формулой (2.5.24)), случай 2 ($\operatorname{Re} \theta_2^* \neq 0$, $\theta_2^* \notin \mathbb{Z}$, однопараметрическое семейство степенных разложений \mathcal{G}_2 определяется формулой (2.5.27)), случай 3 ($\theta_2^* \notin \mathbb{Z}$, однопараметрическое семейство степенно-логарифмических разложений \mathcal{G}_2 определяется формулой (2.5.28)).

Разложения решений при $d = 1/2$, $a \neq 0$. Если $\operatorname{Re} \sqrt{2a} < 0$, то имеем однопараметрическое семейство степенных разложений

$$\mathcal{G}_6 : y^* = x^* + c_{\rho^*}^* x^{*\rho^*} + \sum_{s^*} c_{s^*}^* x^{*s^*}, \quad (2.5.34)$$

где $\rho^* = 1 + \sqrt{2a}$, s^* пробегает множество $\{\rho^* + l(\rho^* - 1) - m; l, m \geq 0; l + m > 0; l, m \in \mathbb{Z}\}$, комплексные коэффициенты: $c_{\rho^*}^*$ — ненулевая произвольная постоянная, остальные $c_{s^*}^*$ постоянны и однозначно определены.

Если $\operatorname{Re} \rho^* < 0$, то третье приближение разложения (2.5.34) имеет вид $y = x^* + c_{\rho^*}^* x^{*\rho^*} + c_{2\rho^*-1}^* x^{*2\rho^*-1}$. Коэффициент

$$c_{\rho^*-1}^* = c_{\rho^*}^* \frac{1 - 2(a + b + c)}{2(\rho^* - 2)}. \quad (2.5.35)$$

Если $0 < \operatorname{Re} \rho^* < 1$, то третье приближение разложения (2.5.34) имеет вид $y^* = x^* + c_{\rho^*}^* x^{*\rho^*} + c_{2\rho^*-1}^* x^{*2\rho^*-1}$. Коэффициент

$$c_{2\rho^*-1}^* = c_{\rho^*}^{*2}. \quad (2.5.36)$$

Если $\operatorname{Re} \rho^* = 0$, $\operatorname{Im} \rho^* \neq 0$, то третье приближение разложения (2.5.34) имеет вид $y^* = x^* + c_{\rho^*}^* x^{*\rho^*} + c_{2\rho^*-1}^* x^{*2\rho^*-1} + c_{2\rho^*-1}^* x^{*2\rho^*-1}$, где коэффициенты $c_{\rho^*-1}^*$ и $c_{2\rho^*-1}^*$ определены формулами (2.5.35) и (2.5.36) соответственно. Если $\rho^* = 0$, то третье приближение разложения (2.5.34) имеет вид $y^* = x^* + c_0^* + c_{-1}^* x^{*-1}$. Коэффициенты: c_0^* — ненулевая произвольная постоянная, $c_{-1}^* = c_0^*(-1 + 2(a + b + c) + 4c_0^*)/4$ есть сумма выражений (2.5.35) и (2.5.36).

Если $\operatorname{Re} \sqrt{2a} = 0$, то существуют два однопараметрических семейства экзотических разложений

$$\mathcal{G}_6^r : y^* = x^* + c_{\rho^*}^* x^{*\rho^*} + \sum_{s^*} c_{s^*}^* x^{*s^*}, \quad (2.5.37)$$

где $\rho^* = 1 + \sqrt{2a}$, s^* пробегает множество $\{\rho^* + l(\rho^* - 1) - m; l, m \geq 0; l + m > 0; l, m \in \mathbb{Z}\}$, $\tau = \pm 1$, комплексные коэффициенты: c_ρ^* — ненулевая произвольная постоянная, все c_s^* постоянны и однозначно определены.

Здесь имеется однопараметрическое семейство сложных разложений \mathcal{G}_3 . Оно сохраняется из случая $a \neq 1/2 - d \neq 0$ и определяется формулой (2.5.30).

5.4. Сводка результатов.

Теорема 2.5.1. При $x \rightarrow \infty$ и $a \cdot b \neq 0$ уравнение (2.1.1) имеет 13 семейств разложений решений типов 1–3:

$\mathcal{A}_\infty = \mathcal{A}_0^*$, которое определяется формулой (2.5.5) и имеет 2 параметра;

$\mathcal{D}_1 = \mathcal{B}_1^*$, которое существует при $-b \neq c \neq 0$, определяется формулами (2.5.9), (2.5.12), (2.5.13) и имеет 1 или 0 параметров;

$\mathcal{D}_2 = \mathcal{B}_2^*$, которое существует при $c \neq 0$, определяется формулами (2.5.9), (2.5.12), (2.5.13) и имеет 1 или 0 параметров;

$\mathcal{D}_3 = \mathcal{B}_3^*$, которое существует при $-b \neq c$, определяется формулами (2.5.15), (2.5.16) и имеет 1 параметр;

$\mathcal{D}_4 = \mathcal{B}_4^*$ и $\mathcal{D}_5 = \mathcal{B}_5^*$, которые существуют при $-b = c \neq 0$, определяются формулами (2.5.17), (2.5.18) и имеют 1 параметр;

$\mathcal{D}_6 = \mathcal{B}_6^*$, которое существует при $c = 0$, определяется формулой (2.5.19) и имеет 1 параметр;

$\mathcal{G}_1 = \mathcal{H}_1^*$, которое существует при $a \neq -d + 1/2 \neq 0$, определяется формулами (2.5.24), (2.5.27), (2.5.28) и имеет 1 или 0 параметров;

$\mathcal{G}_2 = \mathcal{H}_2^*$, которое существует при $d \neq 1/2$, определяется формулами (2.5.24), (2.5.27), (2.5.28) и имеет 1 или 0 параметров;

$\mathcal{G}_3 = \mathcal{H}_3^*$, которое существует при $a \neq -d + 1/2 \neq 0$, определяется формулами (2.5.30), (2.5.31) и имеет 1 параметр;

$\mathcal{G}_4 = \mathcal{H}_4^*$ и $\mathcal{G}_5 = \mathcal{H}_5^*$, которые существуют при $a = -d + 1/2 \neq 0$, определяются формулами (2.5.32), (2.5.33) и имеют 1 параметр;

$\mathcal{G}_6 = \mathcal{H}_6^*$, которое существует при $d = 1/2$, определяется формулой (2.5.34) и имеет 1 параметр;

одно семейство полуэкзотических разложений:

$\mathcal{D}_0 = \mathcal{B}_0^*$, которые существуют при $b \neq 0$, определяются формулой (2.5.8) и имеют 2 параметра;

и 7 пар семейств экзотических разложений решений с $\tau = \pm 1$:

$\mathcal{D}_1^\tau = \mathcal{B}_1^{\tau*}$, которые существуют при $-b \neq c \neq 0$, $\operatorname{Re}(\sqrt{2c} - \sqrt{-2b}) = 0$, определяются формулой (2.5.9) и имеют 1 параметр;

$\mathcal{D}_2^\tau = \mathcal{B}_2^{\tau*}$, которые существуют при $b \neq 0$, $c \neq 0$, $\operatorname{Re}(\sqrt{2c} + \sqrt{-2b}) = 0$, определяются формулой (2.5.9) и имеют 1 параметр;

$\mathcal{D}_6^\tau = \mathcal{B}_6^{\tau*}$, которые существуют при $b \neq 0$, $c = 0$, $\operatorname{Re} \sqrt{-2b} = 0$, определяются формулой (2.5.22) и имеют 1 параметр;

$\mathcal{G}_0^\tau = \mathcal{H}_0^{\tau*}$, которые существуют при $a \neq 0$, определяются формулой (2.5.23) и имеют 2 параметра;

$\mathcal{G}_1^\tau = \mathcal{H}_1^{\tau*}$, которые существуют при $a \neq -d + 1/2 \neq 0$, $\operatorname{Re}(\sqrt{1-2d} - \sqrt{2a}) = 0$, определяются формулой (2.5.24) и имеют 1 параметр;

$\mathcal{G}_2^\tau = \mathcal{H}_2^{\tau*}$, которые существуют при $a \neq 0$, $d \neq 1/2$, $\operatorname{Re}(\sqrt{1-2d} + \sqrt{2a}) = 0$, определяются формулой (2.5.24) и имеют 1 параметр;

$\mathcal{G}_6^\tau = \mathcal{H}_6^{\tau*}$, которые существуют при $a \neq 0$, $d = 1/2$, $\operatorname{Re}\sqrt{2a} = 0$, определяются формулой (2.5.37) и имеют 1 параметр.

\mathcal{A}_0^* , \mathcal{B}_i^* и \mathcal{H}_i^* означают семейства, полученные из \mathcal{A}_0 , \mathcal{B}_i и \mathcal{H}_i симметрией (2.1.6).

Семейства \mathcal{D}_1 , \mathcal{D}_2 , \mathcal{D}_6 , \mathcal{G}_1 , \mathcal{G}_2 , \mathcal{G}_6 — степенные или степенно-логарифмические, семейства \mathcal{D}_3 , \mathcal{D}_4 , \mathcal{D}_5 , \mathcal{G}_3 , \mathcal{G}_4 , \mathcal{G}_5 — сложные.

Глава 3. Разложения решений уравнения Р6 в случаях $a = 0$, $b \neq 0$ и $a \neq 0$, $b = 0$ вблизи нуля и бесконечности

§ 1. Общие свойства уравнения

1.1. Постановка задачи. В этой главе для шестого уравнения Пенлеве (2.1.1) в двух случаях значений комплексных параметров:

- 1) $a = 0$, $b \neq 0$, c и d — произвольные;
- 2) $a \neq 0$, $b = 0$, c и d — произвольные —

ищем асимптотические разложения его решений при $x \rightarrow 0$ и $x \rightarrow \infty$ вида (2.1.2) всех пяти типов — степенные, степенно-логарифмические, сложные, полуэкзотические и экзотические.

1.2. Носители и нормальные конусы. Если $a = 0$, тогда уравнение (2.1.4) примет вид

$$\begin{aligned} f(x, y) \stackrel{def}{=} & 2y''x^2(x-1)^2y(y-1)(y-x) - (y')^2[x^2(x-1)^2(y-1)(y-x) + x^2 \times \\ & \times (x-1)^2y(y-x) + x^2(x-1)^2y(y-1)] + 2y'[x(x-1)^2y(y-1)(y-x) + \\ & + x^2(x-1)y(y-1)(y-x) + x^2(x-1)^2y(y-1)] - [2bx(y-1)^2(y-x)^2 + \\ & + 2c(x-1)y^2(y-x)^2 + 2dx(x-1)y^2(y-1)^2] = 0. \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

В этом случае у носителя, изображенного на рис. 8 а, пропадут точки (0, 6), (0, 5), (1, 5). Носитель $\mathbf{S}(f_{a=0})$ левой части уравнения (3.1.1), его выпуклая оболочка $\Gamma(f_{a=0})$, грани $\Gamma_i^{(0) \text{ def}} \equiv Q_i$, $i = 1, 2, 4, 5, 6$, $\Gamma_j^{(1)}$, $j = 1, 2, 5, 6, 7$, изображены на рис. 14 а (грани многоугольника $\Gamma(f)$, сохранившиеся из случая $a \cdot b \neq 0$, сохранили свои номера), соответствующие этим граням вещественные нормальные конусы $\mathbf{U}_i^{(d)}$, $d = 0, 1$, — на рис. 14 б.

Для $\omega = -1$ разбиение комплексной плоскости $L_- : r \in \mathbb{C}$ на комплексные нормальные конусы $\check{\mathbf{U}}_j^{(d)}$ показано на рис. 5 с заменой обозначений: $\check{\mathbf{U}}_6^{(0)}$ и $\check{\mathbf{U}}_7^{(1)}$ вместо $\check{\mathbf{U}}_3^{(0)}$ и $\check{\mathbf{U}}_4^{(1)}$ соответственно. Оно аналогично случаю $a \neq 0$.

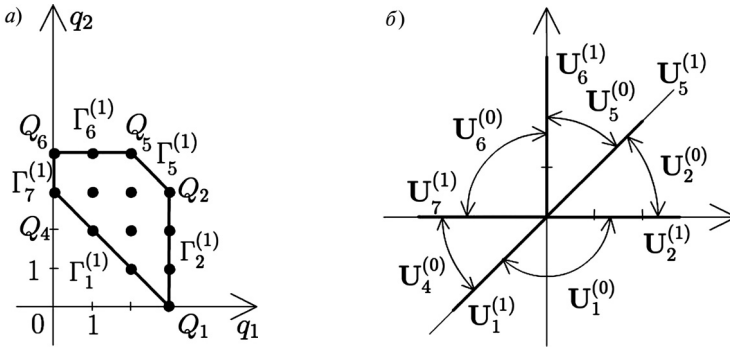


Рис. 14. Для уравнения (3.1.1): носитель, многоугольник и его грани (а); их нормальные конусы (б)

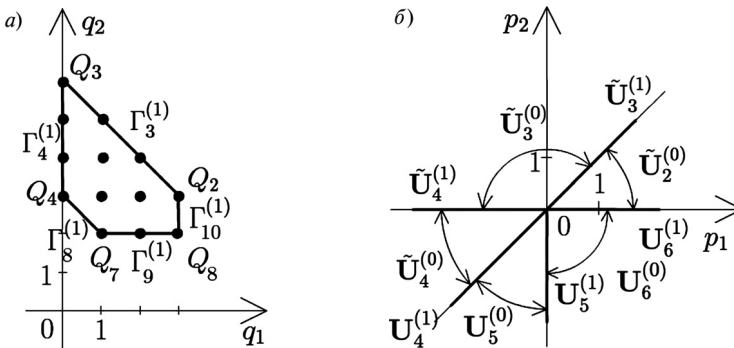


Рис. 15. Для уравнения (3.1.2): носитель, многоугольник и его грани (а); их нормальные конусы (б)

Если $b = 0$, тогда уравнение (2.1.4) примет вид

$$\begin{aligned}
 f(x, y) \stackrel{def}{=} & 2y''x^2(x-1)^2y(y-1)(y-x) - (y')^2[x^2(x-1)^2(y-1)(y-x) + x^2 \times \\
 & \times (x-1)^2y(y-x) + x^2(x-1)^2y(y-1)] + 2y'[x(x-1)^2y(y-1)(y-x) + \\
 & + x^2(x-1)y(y-1)(y-x) + x^2(x-1)^2y(y-1)] - [2ay^2(y-1)^2(y-x)^2 + \\
 & + 2c(x-1)y^2(y-x)^2 + 2dx(x-1)y^2(y-1)^2] = 0.
 \end{aligned}
 \tag{3.1.2}$$

В этом случае у носителя, изображенного на рис. 8 а, пропадут точки $(3, 0)$, $(2, 1)$, $(3, 1)$. Носитель $S(f_{b=0})$ левой части уравнения (3.1.2), его выпуклая оболочка $\Gamma(f_{b=0})$, грани $\Gamma_i^{(0)} \stackrel{def}{=} Q_i$, $i = 2, 3, 4, 7, 8$, $\Gamma_j^{(1)}$, $j = 3, 4, 8, 9, 10$, изображены на рис. 15 а (грани многоугольника $\Gamma(f)$, сохранившиеся из случая $a \cdot b \neq 0$, сохранили свои номера), соответствующие этим граням вещественные нормальные конусы $U_i^{(d)}$, $d = 0, 1$, — на рис. 15 б.

Используя симметрию (2.1.6), можно сократить вычисления. С ее помощью случай $a = 0$ переводится в случай $b = 0$. Вершины $\Gamma_i^{(0)}$, $i = 1, 2, 4, 5, 6$, и ребра $\Gamma_j^{(1)}$, $j = 1, 2, 5, 6, 7$, в случае $a = 0$ симметричны соответственно вершинам $\Gamma_i^{(0)}$, $i = 3, 4, 2, 7, 8$, и ребрам $\Gamma_j^{(1)}$, $j = 3, 4, 8, 9, 10$, в случае $b = 0$.

Поэтому далее подробно рассмотрим случай $a = 0$, а затем с помощью симметрии (2.1.6) перенесем результаты на случай $b = 0$.

Кроме того, вершины $\Gamma_1^{(0)}, \Gamma_2^{(0)}, \Gamma_3^{(0)}, \Gamma_4^{(0)}$ и ребра $\Gamma_1^{(1)}, \Gamma_2^{(1)}, \Gamma_3^{(1)}, \Gamma_4^{(1)}$, изображенные на рис. 8а, 14а и 15а, рассматривались в случае $a \cdot b \neq 0$ в главе 2. Члены уравнения (2.1.4), имеющие множителем параметр a , имеют носитель, изображенный на рис. 16 сплошными точками.

Таким образом, при $a = 0$ члены в уравнении (2.1.4), соответствующие вершинам $\Gamma_1^{(0)}, \Gamma_2^{(0)}, \Gamma_4^{(0)}$ и ребрам $\Gamma_1^{(1)}, \Gamma_2^{(1)}$, остаются без изменений. И соответствующие им укороченные уравнения также не меняются, т. е. сохраняются виды разложений решений, соответствующие им, изменяясь, быть может, лишь в членах начиная со второго.

При $b = 0$, аналогично случаю $a = 0$, члены уравнения (2.1.4), соответствующие вершинам $\Gamma_2^{(0)}, \Gamma_3^{(0)}, \Gamma_4^{(0)}$ и ребрам $\Gamma_3^{(1)}, \Gamma_4^{(1)}$, остаются без изменений. Таким образом, в разложениях решений, соответствующих этим границам, могут измениться члены начиная со второго, но виды разложений сохраняются.

Поэтому в случае $a = 0$ рассмотрим вершины $\Gamma_5^{(0)}, \Gamma_6^{(0)}$ и ребра $\Gamma_5^{(1)}, \Gamma_6^{(1)}, \Gamma_7^{(1)}$, которым могут соответствовать новые виды разложений решений уравнения (2.1.1).

Аналогично в случае $b = 0$ новые виды разложений могут соответствовать вершинам $\Gamma_7^{(0)}, \Gamma_8^{(0)}$ и ребрам $\Gamma_8^{(1)}, \Gamma_9^{(1)}, \Gamma_{10}^{(1)}$, которые мы получим, используя симметрию (2.1.6) и результаты случая $a = 0$.

Более того, используя симметрию (2.1.8), можно сократить вычисления и в случае $a = 0$, так как с ее помощью разложения, соответствующие вершине $\Gamma_5^{(0)}$ и ребрам $\Gamma_5^{(1)}, \Gamma_6^{(1)}$, переводятся в разложения, соответствующие вершине $\Gamma_6^{(0)}$ и ребрам $\Gamma_7^{(1)}, \Gamma_6^{(1)}$ (и обратно).

Таким образом, мы подробно изучим одну вершину $\Gamma_6^{(0)}$ и два ребра $\Gamma_6^{(1)}, \Gamma_7^{(1)}$ в случае $a = 0$, а затем с помощью симметрий (2.1.6), (2.1.8) перенесем полученные результаты на все оставшиеся случаи. А именно, при $a = 0$ с помощью симметрии (2.1.8) получим разложения решений, соответствующие вершине $\Gamma_5^{(0)}$ и ребру $\Gamma_5^{(1)}$, а с помощью симметрии (2.1.6) из разложений, возникающих в случае $a = 0$, получим разложения, соответствующие случаю $b = 0$.

Напомним, что согласно теореме 2.1.4 при $a = 0$ имеется исключительное решение $\mathcal{I}_4: y = \infty$, а при $b = 0$ — решение $\mathcal{I}_1: y = 0$.

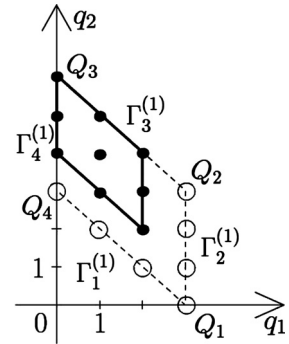


Рис. 16. Носитель членов уравнения (2.1.4) с коэффициентом a

§ 2. Разложения вблизи нуля, соответствующие вершине $\Gamma_6^{(0)}$

Вершина $\Gamma_6^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} Q_6 = (0, 4)$ — левая верхняя (см. рис. 14а), ей соответствует значение $\omega = -1$ и укороченное уравнение

$$\widehat{f}_6^{(0)}(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} 2y''x^2y^3 - 3y'^2x^2y^2 + 2y'xy^3 + 2cy^4 = 0. \quad (3.2.1)$$

Вещественный нормальный конус: $U_6^{(0)} = \{p_1 < 0, p_2 > 0\}$, т. е. $x \rightarrow 0, y \rightarrow \infty$.
 Комплексный нормальный конус: $\check{U}_6^{(0)} = -(1, r)$, где

$$r : r \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} r < 0. \quad (3.2.2)$$

2.1. Разложения решений со степенной асимптотикой. Решением уравнения (3.2.1) является выражение $y = c_r x^r$, c_r — ненулевая произвольная постоянная. Показатель степени r определяется из характеристического уравнения $\chi(r) = x^{-4r} \hat{f}_6^{(0)}(x, x^r) = -r^2 + 2c = 0$, которое имеет два корня

$$r_{1,2} = \pm \sqrt{2c}, \quad (3.2.3)$$

и из комплексного нормального конуса (3.2.2).

Вычислим критические числа. Первая вариация:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{f}_6^{(0)}(x, y)}{\partial y} &= 2 \frac{d^2}{dx^2} x^2 y^3 + 6y'' x^2 y^2 - 6y' \frac{d}{dx} x^2 y^2 - \\ &- 6y'^2 x^2 y + 2 \frac{d}{dx} x y^3 + 6y' x y^2 + 8c y^3. \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Линейный дифференциальный оператор:

$$\mathcal{L}(x) \stackrel{\text{def}}{=} 2c_r^3 x^{3r} \left(\frac{d^2}{dx^2} x^2 + 3r(r-1) - 3r \frac{d}{dx} x - 3r^2 + \frac{d}{dx} x + 3r + 4c \right). \quad (3.2.5)$$

Характеристический многочлен

$$\nu(k) = 2c_r^3 (k^2 - 3rk + 2r^2) \quad (3.2.6)$$

имеет два корня $k_1 = 2r$ и $k_2 = r$. Конус задачи: $\mathcal{K} = \{\operatorname{Re} k > \operatorname{Re} r\}$. Числа $k_{1,2}$ не лежат в \mathcal{K} , следовательно, критических чисел нет.

Носитель разложения решения:

$$\mathbf{K} = \{s = r - lr + m; l \geq 0, m \geq 1; l, m \in \mathbb{Z}\}. \quad (3.2.7)$$

Таким образом, получаем однопараметрическое семейство разложений

$$C_0^\infty : y = c_r x^r + \sum_s c_s x^s, \quad (3.2.8)$$

где показатели степени таковы: $r = \pm \sqrt{2c}$ и удовлетворяет неравенству (3.2.2), s из множества (3.2.7), c_r — ненулевая произвольная постоянная, все c_s постоянны и однозначно определены.

Носитель (3.2.7) имеет две образующие $-r$ и 1 и располагается на комплексной плоскости в угле с вершиной в точке r , стороны которого параллельны векторам $-(\operatorname{Re} r, \operatorname{Im} r)$ и $(1, 0)$.

Итак, доказана

Теорема 3.2.1. При $x \rightarrow 0$ и $a = 0, c \neq 0$ существует однопараметрическое семейство степенных разложений решений C_0^∞ , которое определяется формулой (3.2.8).

По теореме 1.7.2 ряд (3.2.8) сходится для достаточно малых $|x|$.

Если $2c = k^2$, где k — целое число, то согласно (3.2.7) разложение (3.2.8) содержит только целые степени x , т. е. является рядом Лорана. Только в этом случае оно было известно [54, § 46, теорема 46.3].

Вычислим второе приближение решения.

Если $\operatorname{Re} r \leq -1$, оно имеет вид $y = c_r x^r + c_{r+1} x^{r+1}$. Вычислим коэффициент c_{r+1} . Второе приближение уравнения (3.1.1) есть

$$\widehat{f}_6^{(0)}(x, y) = -4y''x^3y^3 + 6y'^2x^3y^2 - 6y'x^2y^3 + 2xy^4(-c + d - b). \quad (3.2.9)$$

$$b_{r+1} = x^{-4r-1} \widehat{f}_6^{(0)}(x, c_r x^r) = 2c_r^4(r^2 - r - c + d - b), \quad \nu(1+r) = 2c_r^3(1-r), \quad c_{r+1} = c_r(c + d - b - r)/(r-1).$$

Если $-1 < \operatorname{Re} r < 0$, то второе приближение решения есть $y = c_r x^r + c_0$, а второе приближение уравнения (3.1.1) имеет вид

$$\widehat{f}_6^{(0)}(x, y) = -2y''x^2y^2 + 2y'^2x^2y - 2y'xy^2. \quad (3.2.10)$$

Так как $b_0 = \widehat{f}_6^{(0)}(x, c_r x^r) = 0$, $\nu(0) = 4c_r^3r^2 \neq 0$, то $c_0 = 0$.

Случай $\operatorname{Re} r = -1$ рассмотрен вместе со случаем $\operatorname{Re} \sqrt{2c} \leq -1$, поскольку вклад второго приближения (3.2.10) равен нулю.

2.2. Нестепенные асимптотики. Вычислим нестепенные решения уравнения (3.2.1), если они существуют. Преобразуем его:

$$g(x, y) = y^{-4} \widehat{f}_6^{(0)}(x, y) = \frac{2y''}{y}x^2 - \frac{3y'^2}{y^2}x^2 + \frac{2y'}{y}x + 2c = 0, \quad (3.2.11)$$

$S(g) = \{0\}$. Уравнение $g(x, y) = 0$ содержит ненулевую постоянную $2c$. В случае $c = 0$ уравнение $\chi(r) = 0$ имеет двукратный корень $r = 0$. Но $P = \omega(1, 0)$ не лежит в нормальном конусе $U_6^{(0)}$. Поскольку $\Delta(g) = 2$ и

$$g^* = \frac{2y''}{y}x^2 - \frac{3y'^2}{y^2}x^2, \quad \operatorname{coef}(g^*) = 2 - 3 = -1 \neq 0, \quad (3.2.12)$$

то по теоремам 1.3.5 и 1.3.6 нужных нестепенных асимптотик нет.

§ 3. Разложения, соответствующие ребру $\Gamma_6^{(1)}$

Ребру $\Gamma_6^{(1)}$ соответствует укороченное уравнение

$$\begin{aligned} \widehat{f}_6^{(1)}(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} & 2y''x^4y^3 - 3y'^2x^4y^2 + 4y'x^3y^3 - 2dx^2y^4 + 2y''x^2y^3 - 3y'^2x^2y^2 + \\ & + 2y'xy^3 + 2cy^4 - 4y''x^3y^3 + 6y'^2x^3y^2 - 2xy^4(c + b - d) - 6y'x^2y^3 = 0. \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

Оно не дает степенных решений, так как ребро $\Gamma_6^{(1)}$ горизонтально. Проверим, существуют ли нестепенные асимптотики. Ребро $\Gamma_6^{(1)}$ соединяет вершины $Q_6 = (0, 4)$ и $Q_5 = (2, 4)$, соответствующие укороченные уравнения $\widehat{f}_6^{(0)}(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} 2y''x^2y^3 - 3y'^2x^2y^2 + 2y'xy^3 + 2cy^4 = 0$ и $\widehat{f}_5^{(0)}(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} 2y''x^4y^3 - 3y'^2x^4y^2 + 4y'x^3y^3 - 2dx^2y^2 = 0$ имеют порядки дифференцирования, равные 2. А порядок дифференцирования уравнения $\widehat{f}_6^{(1)}(x, y) = 0$ также равен 2, следовательно, по теореме 1.3.4, не существует нужных решений ни при $x \rightarrow 0$, ни при $x \rightarrow \infty$.

§ 4. Разложения, соответствующие ребру $\Gamma_7^{(1)}$

4.1. Предварительный анализ. Ребро $\Gamma_7^{(1)}$ вертикально. Ему соответствует укороченное уравнение

$$\widehat{f}_7^{(1)}(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} 2y''x^2y^3 - 3y'^2x^2y^2 + 2y'xy^3 + 2cy^4 + 2y'^2x^2y - 2y''x^2y^2 - 2y'xy^2 = 0 \quad (3.4.1)$$

и $r = 0$. Вещественный нормальный конус есть $U_7^{(1)} = \{\lambda(-1, 0), \lambda > 0\}$, т. е. $x \rightarrow 0$ и $\omega = -1$.

Укороченное уравнение (3.4.1) является суммой двух укороченных уравнений (2.2.1) и (3.2.1). В случае $\rho^2 \neq 2c$ значение $\rho = r + i\gamma$ с $r = 0$, $\gamma \neq 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$ является корнем характеристического уравнения $\chi(\rho) \equiv 0$, соответствующего нижней вершине $\Gamma_4^{(0)} = (0, 3)$. Согласно теореме 1.5.1 здесь имеются два семейства экзотических разложений \mathcal{B}_τ^r с $\tau = \text{sgn Im } \rho$. Конусы задачи суть $\mathcal{K}^r = \{s : \text{Re } s \geq 0, \text{ если } \text{Re } s = 0, \text{ то } \text{sgn Im } s = \tau\}$. Поскольку характеристическое уравнение (2.2.4) имеет корень $k_{1,2} = \rho$, который не лежит в конусе задачи, то критических чисел нет. Носитель разложений решений есть

$$\mathbf{K} = \{\rho + l\rho + m(1 - \rho); l, m \geq 0; l + m > 0; l, m \in \mathbb{Z}\}. \quad (3.4.2)$$

Таким образом, имеем два семейства экзотических разложений

$$\mathcal{B}_\tau^r : y = c_\rho x^\rho + \sum c_s x^s \quad (\text{сумма по } s \in \mathbf{K}), \quad (3.4.3)$$

где $\tau = \text{sgn Im } \rho$, $\rho^2 \neq 2c$, $\text{Re } \rho = 0$, $\rho \neq 0$, s пробегает множество (3.4.2), c_r — произвольная ненулевая комплексная постоянная, все комплексные коэффициенты c_s постоянны и однозначно определены.

Более точный вид этих семейств получен в (3.4.39).

Если $\rho^2 = 2c$, $\text{Re } \rho = 0$, $\rho \neq 0$, то здесь возникает ситуация, описанная в замечании 1.5.1. Значение $\rho = r + i\gamma$ с $r = 0$, $\gamma \neq 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$ является корнем характеристического уравнения $\chi(\rho) \equiv 0$, соответствующего нижней вершине $\Gamma_4^{(0)} = (0, 3)$, и характеристического уравнения $\chi(\rho) = \rho^2 - 2c = 0$, соответствующего верхней вершине $\Gamma_6^{(0)} = (0, 4)$.

Согласно замечанию 1.5.1 здесь имеются два семейства разложений с начальным членом $y = c_\rho x^{\sqrt{2c}}$. А именно: семейство разложений \mathcal{B}_8 с $\text{Im } \sqrt{2c} > 0$ и семейство разложений \mathcal{B}_9 с $\text{Im } \sqrt{2c} < 0$. В обоих случаях конус задачи есть $\mathcal{K} = \{s : \text{Re } s > 0\}$.

Характеристическое уравнение (2.2.4), соответствующее укороченному решению $y = c_\rho x^\rho$ и вершине $\Gamma_4^{(0)} = (0, 3)$, имеет двукратный корень $k_{1,2} = \rho$. Он не лежит в конусе задачи, поэтому критических чисел нет. Носитель разложений решений (2.2.6), соответствующих вершине $\Gamma_4^{(0)}$, есть

$$\mathbf{K}_1 = \{\rho + l\rho + m(1 - \rho); l, m \geq 0; l + m > 0; l, m \in \mathbb{Z}\}. \quad (3.4.4)$$

Характеристическое уравнение (3.2.6), соответствующее укороченному решению $y = c_\rho x^\rho$ и вершине $\Gamma_6^{(0)} = (0, 4)$, имеет два корня $k_1 = \rho$ и $k_2 = 2\rho$. Они не лежат в конусе задачи, поэтому критических чисел нет. Носитель разложений решений (3.2.8), соответствующих вершине $\Gamma_6^{(0)}$ есть

$$\mathbf{K}_2 = \{\rho - l\rho + m; l \geq 0, m \geq 1; l, m \in \mathbb{Z}\}. \quad (3.4.5)$$

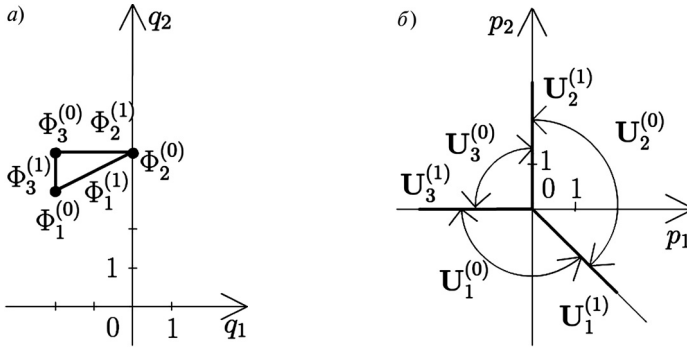


Рис. 17. Для уравнения (3.4.8): носитель, многоугольник и его грани (а); их нормальные конусы (б)

Согласно замечанию 1.5.1 имеем два семейства разложений

$$\mathcal{B}_{8,9} : y = c_\rho x^\rho + \sum_{\text{Re } s \geq 1} c_s x^s \quad (\text{сумма по } s \in \mathbf{K}), \quad (3.4.6)$$

где ρ — чисто мнимая постоянная, $\rho^2 = 2c$, $\text{Im } \rho > 0$ для семейства \mathcal{B}_8 и $\text{Im } \rho < 0$ для семейства \mathcal{B}_9 , $s \in \mathbf{K} = \mathbf{K}_1 \cap \mathbf{K}_2$, т. е. $s \in \{\rho + l(1 - \rho) + m, l, m \geq 0; l + m > 0; l, m \in \mathbb{Z}\}$, комплексные коэффициенты таковы: c_ρ — ненулевая произвольная постоянная, c_s постоянны и однозначно определены.

Поскольку $r = 0$, то ищем степенные решения уравнения (3.4.1) в виде $y = c_0$, $c_0 \neq 0$. Вычислим коэффициент c_0 . Определяющее уравнение есть

$$\tilde{f}_7^{(1)}(c_0) \stackrel{\text{def}}{=} c_0^{-3} \hat{f}_7^{(1)}(x, c_0) \stackrel{\text{def}}{=} 2cc_0 = 0. \quad (3.4.7)$$

Высота ребра $\Gamma_7^{(1)}$ равна единице и определяющее уравнение — первой степени. Из него следует, что при $c = 0$ оно имеет решение c_0 — произвольную постоянную, а при $c \neq 0$ имеет только нулевое решение $c_0 = 0$. Поэтому далее рассмотрим два случая: $c \neq 0$ и $c = 0$.

4.2. Разложения решений при $a = 0, b \cdot c \neq 0$. В этом случае степенных решений уравнения (3.4.1) нет. Вычислим нестепенные решения этого уравнения.

Поскольку нет кратных ненулевых решений определяющего уравнения, то по теореме 1.3.2 нет решений, стремящихся к ненулевой постоянной.

Сделаем логарифмическое преобразование $\xi = \ln x$ в уравнении (3.4.1). Тогда согласно (2.2.13) и (3.4.1) получаем уравнение

$$\varphi(\xi, y) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{f}_7^{(1)}(\xi, y) = 2\ddot{y}y^2(y - 1) + \dot{y}^2y(2 - 3y) + 2cy^4 = 0. \quad (3.4.8)$$

По теореме 1.3.3 у этого уравнения нас интересуют только решения, стремящиеся к нулю при $\xi \rightarrow \infty$. Носитель левой части уравнения, его выпуклая оболочка и нормальные конусы граней изображены на рис. 17. Конус задачи: $\mathcal{K} = \{p_1 \geq 0, p_2 \leq 0\}$, что соответствует пределу $\xi \rightarrow \infty$. С конусом задачи пересекаются вещественные нормальные конусы $U_1^{(0)}$, $U_2^{(0)}$ и $U_1^{(1)}$. Укороченное уравнение $\hat{\varphi}_2^{(0)}(\xi, y) \stackrel{\text{def}}{=} 2cy^4 = 0$ имеет только тривиальное решение.

Вершине $\Phi_1^{(0)}$ соответствует укороченное уравнение

$$\widehat{\varphi}_1^{(0)}(\xi, y) \stackrel{\text{def}}{=} -2\ddot{y}y^2 + 2\dot{y}^2y = 0. \quad (3.4.9)$$

Оно имеет решение $y = c_0$, так как вектор $P = \omega(1, r) = (1, 0)$ лежит в $U_1^{(0)} \cap \mathcal{K}$. Но постоянное решение нам не подходит.

Ребру $\Phi_1^{(1)}$ соответствует укороченное уравнение

$$\widehat{\varphi}_1^{(1)}(\xi, y) = -2\ddot{y}y^2 + 2\dot{y}^2y + 2cy^4 = 0. \quad (3.4.10)$$

Вещественный нормальный конус: $U_1^{(1)} = \{\lambda(1, -2), \lambda > 0\}$. Первое приближение решения уравнения $\varphi(\xi, y) = 0$ есть $y = c_{-2}\xi^{-2}$, $c_{-2} \neq 0$. Вычислим коэффициент c_{-2} . Определяющее уравнение

$$\widehat{\varphi}_1^{(1)}(c_{-2}) = c_{-2}^3(-4 + 2cc_{-2}) = 0, \quad (3.4.11)$$

так как $c_{-2} \neq 0$, имеет решение $c_{-2} = 2/c$. Найдем критические числа решения. Первая вариация:

$$\frac{\partial \widehat{\varphi}_1^{(1)}(\xi, y)}{\partial y} = -2\frac{d^2}{d\xi^2}y^2 - 4\ddot{y}y + 4\dot{y}\frac{d}{d\xi}y + 2\dot{y}^2 + 8cy^3. \quad (3.4.12)$$

Линейный дифференциальный оператор:

$$\mathcal{L}(\xi) = -2\frac{d^2}{d\xi^2}c_{-2}^2\frac{1}{\xi^4} - 24c_{-2}^2\frac{1}{\xi^6} - 8c_{-2}^2\frac{d}{d\xi}\frac{1}{\xi^5} + 8c_{-2}^2\frac{1}{\xi^6} + 8cc_{-2}^3\frac{1}{\xi^6}. \quad (3.4.13)$$

Характеристический многочлен $\nu(k) = c_{-2}^2(-2k^2 - 6k)$, $c_{-2} \neq 0$, имеет два корня $k_1 = 0$, $k_2 = -3$. Конус задачи: $\mathcal{K} = \{\text{Re } k < -2 \text{ или } \text{Re } k = 0, \text{Im } k \neq 0\}$. Число $k_2 \in \mathcal{K}$, т. е. k_2 — единственное критическое число. Носитель разложения решения: $\mathbf{K} = \{s = -2 - 2l, l > 0\}$. Множество $\mathbf{K}(k_2) = \{s = -2 - l, l > 0\}$. Второе приближение решения уравнения $\varphi(\xi, y) = 0$ есть

$$y = c_{-2}\frac{1}{\xi^2} + c_{-3}\frac{1}{\xi^3}. \quad (3.4.14)$$

Поскольку $k_2 \notin \mathbf{K}$, то условие совместности автоматически выполнено и коэффициент c_{-3} — комплексная произвольная постоянная.

Разложение решения есть

$$y = \frac{2}{c}\frac{1}{\xi^2} + c_{-3}\frac{1}{\xi^3} + \sum_{s=4}^{+\infty} c_{-s}\frac{1}{\xi^s}, \quad (3.4.15)$$

где c_{-3} — комплексная произвольная постоянная, а c_{-s} — постоянные и однозначно определенные комплексные коэффициенты. По теореме 1.7.2 ряд (3.4.15) сходится для достаточно больших $|\xi|$. Сделаем обратную замену и получим асимптотику решения уравнения (3.1.1)

$$y = \frac{2}{c}\frac{1}{\ln^2 x} + c_{-3}\frac{1}{\ln^3 x} + \sum_{s=4}^{+\infty} c_{-s}\frac{1}{\ln^s x}, \quad (3.4.16)$$

где c_{-3} — комплексная произвольная постоянная, комплексные коэффициенты c_{-s} — постоянные и однозначно определенные.

Вычислим критические числа укороченных решений (3.4.16). Первая вариация определена формулой (3.4.19). Обозначим ее $\mathcal{M}(x, y)$. Сделаем в $\mathcal{M}(x, y)$ логарифмическую замену $\xi = \ln x$ и производную по ξ будем обозначать точкой. Тогда $y' = \dot{y}/x$, $y'' = (\ddot{y} - \dot{y})/x^2$. После замены получаем оператор

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(x, y) = & 2 \left(\frac{d^2}{d\xi^2} - \frac{d}{d\xi} \right) y^3 + 6(\ddot{y} - \dot{y})y^2 - 6 \frac{d}{d\xi} \dot{y}y^2 - 6\dot{y}^2 y + 2 \frac{d}{d\xi} y^3 + 6\dot{y}y^2 + 4 \frac{d}{d\xi} \dot{y}y + \\ & + 2\dot{y}^2 - 2 \left(\frac{d^2}{d\xi^2} - \frac{d}{d\xi} \right) y^2 - 4(\ddot{y} - \dot{y})y - 2 \frac{d}{d\xi} y^2 - 4\dot{y}y + 8cy^3 \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{N}(\xi, y). \end{aligned} \quad (3.4.17)$$

Для решений (3.4.16) имеем $y = \frac{2}{c} \frac{1}{\xi^2} + \dots$. Поэтому в операторе \mathcal{N} члены с ξ^n имеют наибольшее значение $n = -4$, и сумма членов с ξ^{-4} образует оператор

$$\mathcal{N}_{-4} = -2y^2 \frac{d^2}{d\xi^2},$$

где $y = \frac{2}{c} \frac{1}{\xi^2}$. Ему соответствует характеристический многочлен $\nu(k) = -2 \left(\frac{2}{c} \right)^2 k^2$, который имеет двукратный корень $k = 0 = r$, т. е. не дает критических значений.

По теореме 1.4.1 для решений исходного уравнения (3.1.1) существует единственное разложение

$$\mathcal{B}_3 : \quad y = \varphi_0 + \sum_{\sigma=1}^{\infty} \varphi_{\sigma} x^{\sigma}, \quad (3.4.18)$$

где φ_0 есть (3.4.15), φ_{σ} — ряды по убывающим степеням некратных логарифмов. Оно получается из (2.3.30) и (2.3.28) при $a = 0$.

4.3. Разложения решений при $a = c = 0$, $b \neq 0$. Вычислим сначала в этом случае степенные и степенно-логарифмические разложения.

Согласно (3.4.7) коэффициент c_0 — произвольная постоянная. Вычислим критические числа. Первая вариация есть

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{f}_7^{(1)}(x, y)}{\partial y} = & 2 \frac{d^2}{dx^2} x^2 y^3 + 6y'' x^2 y^2 - 6 \frac{d}{dx} y' x^2 y^2 - 6y'^2 x^2 y + 2 \frac{d}{dx} x y^3 + 6y' x y^2 + 4 \frac{d}{dx} y' x^2 y + \\ & + 2y'^2 x^2 - 2 \frac{d^2}{dx^2} x^2 y^2 - 4y'' x^2 y - 2 \frac{d}{dx} x y^2 - 4y' x y + 8cy^3. \end{aligned} \quad (3.4.19)$$

Линейный дифференциальный оператор при $c = 0$ есть

$$\mathcal{L}(x) = \frac{\partial \widehat{f}_7^{(1)}(x, c_0)}{\partial y} = 2 \frac{d^2}{dx^2} x^2 c_0^3 + 2 \frac{d}{dx} x c_0^3 - 2 \frac{d^2}{dx^2} x^2 c_0^2 - 2 \frac{d}{dx} x c_0^2. \quad (3.4.20)$$

Характеристический многочлен

$$\nu(k) = 2k^2 c_0^2 (c_0 - 1) \quad (3.4.21)$$

в зависимости от $c_0 \neq 0$ имеет два корня. Если $c_0 = 1$, то его двукратным корнем является любое число k и $\mathcal{L}(x) \equiv 0$. Если $c_0 \neq 1$, c_0 — произвольная постоянная, то многочлен (3.4.21) имеет двукратный нулевой корень $k = 0$.

Конус задачи: $\mathcal{K} = \{\operatorname{Re} k > 0 \text{ или } \operatorname{Re} k = 0, \operatorname{Im} k \neq 0\}$. Если $c_0 \neq 0, 1$, то $k \notin \mathcal{K}$, т. е. критических чисел нет и разложение идет по целым возрастающим степеням x . Разложение решения

$$\mathcal{B}_{10}: \quad y = c_0 + \sum_{s=1}^{+\infty} c_s x^s, \quad (3.4.22)$$

где комплексный коэффициент $c_0 \neq 0, 1$ — произвольная постоянная, остальные комплексные коэффициенты c_s — постоянные и однозначно определенные. Разложение (3.4.22) известно [54, § 46, формула (46.4)]. Ряд (3.4.22) сходится для достаточно малых $|x|$ по теореме 1.7.2.

Второе приближение решения уравнения есть $y = c_0 + c_1 x$. Второе приближение уравнения (3.1.1) есть

$$\begin{aligned} \widehat{f}_7(x, y) = & 2y'' x^3 y - y'^2 x^3 - 2(b-d)xy^2 + 2y'' x^3 y^2 - 2y'^2 x^3 y + 6y' x^2 y^2 - \\ & - 4xy^3(b-d) - 4y'' x^3 y^3 + 6y'^2 x^3 y^2 - 2xy^4(b-d). \end{aligned} \quad (3.4.23)$$

Коэффициент $c_1 = -b_1/\nu(1)$, $b_1 = x^{-1} \widehat{f}_7^{(1)}(x, c_0) = -2(b-d)c_0^2(c_0-1)^2$, $\nu(1) = 2c_0^2(c_0-1)$,

$$c_1 = (b-d)(c_0-1). \quad (3.4.24)$$

Если $c_0 = 1$, т. е. $\mathcal{L}(x) \equiv 0$, то сделаем в уравнении (3.1.1) при $c = 0$ замену $y = 1 + u$ и получим уравнение

$$\begin{aligned} g(x, u) \stackrel{\text{def}}{=} & u'' x^2 (x-1)^2 (u+1)u(u+1-x) - u'^2 [x^2 (x-1)^2 u(u+1-x) + \\ & + x^2 (x-1)^2 (u+1)^2 (u+1-x) + x^2 (x-1)^2 (u+1)u] + \\ & + 2u' [x(x-1)^2 (u+1)u(u+1-x) + \\ & + x^2 (x-1)(u+1)u(u+1-x) + x^2 (x-1)^2 (u+1)u - \\ & - 2bxu^2 (u+1-x)^2 + 2dx(x-1)(u+1)^2 u^2] = 0. \end{aligned} \quad (3.4.25)$$

Уравнение (3.4.25) имеет тривиальное решение $u = 0$. В уравнении (3.1.1) ему соответствует исключительное решение $\mathcal{I}_2: y = 1$.

Конус задачи: $\mathcal{K} = \{p_1 \leq 0, p_2 < 0\}$. Носитель $\mathbf{S}(g)$ левой части уравнения (3.4.25), его выпуклая оболочка $\Gamma(g)$, грани: вершины $G_i^{(0)}$ и ребра $G_i^{(1)}$, $i = 1, \dots, 5$, изображены на рис. 18 а. Вещественные нормальные конусы $\mathbf{U}_i^{(j)}$, соответствующие этим граням, изображены на рис. 18 б.

С конусом задачи \mathcal{K} пересекаются нормальные конусы $\mathbf{U}_1^{(0)}$ и $\mathbf{U}_1^{(1)}$.

Вершине $G_1^{(0)}$ соответствует укороченное уравнение

$$\widehat{g}_1^{(0)}(x, u) \stackrel{\text{def}}{=} 2u'' ux^2 - u'^2 x^2 + 2u' ux = 0. \quad (3.4.26)$$

Первое приближение решения имеет вид $u = c_r x^r$, где c_r — ненулевая произвольная постоянная. Показатель степени r определим из характеристического уравнения

$$\chi(r) = r^2 = 0, \quad (3.4.27)$$

т. е. $r_{1,2} = 0$. Вектор $P = \omega(1, r) = -(1, 0)$ не лежит в $\mathbf{U}_1^{(0)} \cap \mathcal{K}$, следовательно, подходящих степенных решений, соответствующих вершине $G_1^{(0)}$, нет. Несложный

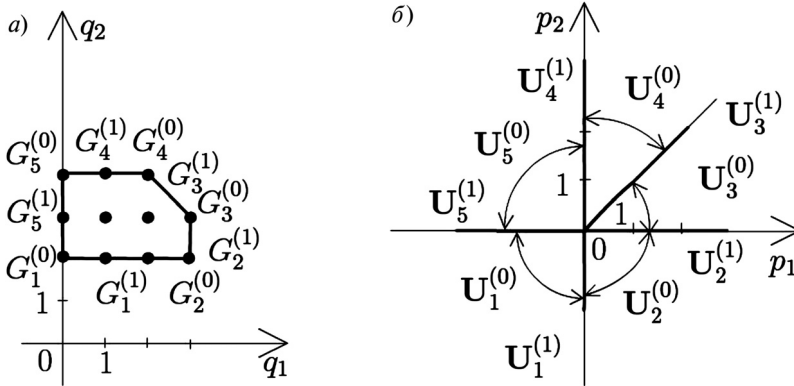


Рис. 18. Для уравнения (3.4.25): носитель, многоугольник и его грани (а); их нормальные конусы (б)

анализ показывает, что все решения уравнения (3.4.26) имеют вид $u = C_1 \ln^2(C_0 x)$, где C_0 и C_1 — произвольные постоянные. Все эти решения имеют порядок $p = 0$, но $|u| \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow 0$, т. е. они не годятся.

Ребру $G_1^{(1)}$ соответствует укороченное уравнение

$$\begin{aligned} \widehat{g}_1^{(1)}(x, u) \stackrel{\text{def}}{=} & 2u''ux^2 - u'^2x^2 + 2u'ux - 6u''ux^3 + 3u'^2x^3 - 6u'ux^2 - \\ & - 2(b-d)u^2x + 6u''ux^4 - 30u'^2x^4 + 6u'ux^3 - \\ & - 2(d+2b)u^2x^2 - 2u''ux^5 + u'^2x^5 - 2u'ux^4 - 2bu^2x^3 = 0. \end{aligned} \quad (3.4.28)$$

Это ребро горизонтально. Его левой вершине $G_1^{(0)} = (0, 2)$ соответствует укороченное уравнение (3.4.26). Для обоих этих уравнений (3.4.26) и (3.4.28) суммарный порядок дифференцирования $\Delta(\widehat{g}_1^{(1)}) = \Delta(\widehat{g}_1^{(0)}) = 2$. Согласно теореме 1.3.4 уравнение (3.4.28) не имеет нестепенных решений $u \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$.

Вычислим в этом случае нестепенные решения уравнения (3.4.1). Определяющее уравнение (3.4.7) здесь имеет произвольное решение. Конус задачи есть $\mathcal{K} = \{p_1 \geq 0\}$. И кроме того, $y \neq \text{const}$.

При $c = 0$ носитель $S(\varphi)$ уравнения (3.4.8) состоит из двух точек Q_1 и Q_3 . Его выпуклая оболочка — это отрезок, совпадающий с ребром $\Phi_3^{(1)}$ (рис. 17 а). Нормальные конусы суть $U_1^{(0)} = \{p_2 < 0\}$, $U_3^{(0)} = \{p_2 > 0\}$, $U_3^{(1)} = \{\lambda(1, 0), \lambda > 0\}$. Все они пересекаются с конусом задачи.

Вершина $\Phi_1^{(0)}$ рассматривалась в случае $c \neq 0$ (п. 4.2 гл. 3, уравнение (3.4.9)). Вычисленный там вектор $P = (1, 0)$ лежит в конусе задачи \mathcal{K} , но ему отвечает постоянное решение, которое нам не подходит. Следовательно, нет решений, соответствующих вершине $\Phi_1^{(0)}$.

Вершине $\Phi_3^{(0)}$ соответствует укороченное уравнение

$$\widehat{\varphi}_3^{(0)}(\xi, y) \stackrel{\text{def}}{=} 2\ddot{y}y^3 - 3\dot{y}^2y^2 = 0.$$

Нормальный конус есть $U_3^{(0)} = \{p_2 > 0\}$. Ищем его решения в виде $y = c_r \xi^r$, $c_r \neq 0$, c_r — произвольная постоянная. Вычислим показатель степени r . Характеристическое

уравнение

$$\chi(r) \stackrel{\text{def}}{=} \xi^{-4r+2} \widehat{\varphi}_3^{(0)}(\xi, \xi^r) \stackrel{\text{def}}{=} -r^2 - 2r = 0$$

имеет корни $r_1 = 0$ и $r_2 = -2$. Вектору $P_1 = \omega(1, r_1) = (1, 0)$ соответствует постоянное решение, которое нам не подходит. А вектор $P_2 = \omega(1, r_2) = (1, -2)$ не лежит в нормальном конусе $U_3^{(0)}$. Следовательно, решений, соответствующих вершине $\Phi_3^{(0)}$, нет.

Вертикальному ребру $\Phi_3^{(1)}$ соответствует укороченное уравнение

$$\widehat{\varphi}_3^{(1)}(\xi, y) \stackrel{\text{def}}{=} 2\ddot{y}y^3 - 3\dot{y}^2y^2 - 2\ddot{y}y^2 + 2\dot{y}^2y = 0. \quad (3.4.29)$$

Корнем определяющего уравнения служит любая постоянная. Но решение $y(\xi) = \text{const}$ нам не подходит.

Согласно п. 3.2 гл. 1 делаем еще одно логарифмическое преобразование $\eta = \ln \xi$, тогда $\dot{y} = \frac{1}{\xi} \frac{dy}{d\eta}$, $\ddot{y} = \frac{1}{\xi^2} \left(\frac{d^2y}{d\eta^2} - \frac{dy}{d\eta} \right)$. При этом уравнение (3.4.29) принимает вид

$$\widehat{\varphi}_3^{(1)}(\xi, y) \stackrel{\text{def}}{=} \sigma(\eta, y) \stackrel{\text{def}}{=} -2 \left(\frac{d^2y}{d\eta^2} - \frac{dy}{d\eta} \right) y^2 (1-y) + \left(\frac{dy}{d\eta} \right)^2 y (2-3y) = 0.$$

Носитель $S(\sigma)$ состоит из четырех точек $Q_1 = (-1, 3)$, $Q_2 = (-1, 4)$, $Q_3 = (-2, 4)$, $Q_4 = (-2, 3)$. Их выпуклая оболочка является квадратом с этими вершинами. Граница этого квадрата состоит из четырех вершин и четырех ребер. Их нормальные конусы суть квадранты и координатные лучи плоскости p_1, p_2 .

Конус задачи здесь $\mathcal{K} = \{p_1 \geq 0\}$ и решение $y(\eta) \neq \text{const}$. С конусом задачи пересекаются нормальные конусы верхнего, правого и нижнего ребер и двух правых вершин.

Верхнее и нижнее ребра соответствуют вершинам $\Phi_3^{(0)}$ и $\Phi_1^{(0)}$, для которых было уже установлено отсутствие нужных решений. Правому ребру соответствует укороченное уравнение

$$2 \frac{dy}{d\eta} y^2 (1-y) = 0. \quad (3.4.30)$$

Оно имеет только постоянные решения, которые нам не подходят. Укороченные уравнения, соответствующие правым вершинам, являются частями уравнения (3.4.30). Поэтому они имеют также только постоянные решения, которые нам не подходят. Следовательно, нет решений, соответствующих ребру $\Phi_3^{(1)}$.

Итак, в случае $c = 0$ нет нестепенных решений уравнения (3.4.1).

4.4. Решение уравнения (3.4.1) в явном виде. Очевидно, что уравнение (3.4.1) и уравнение (2.3.1) при $a = 0$ это одно и то же. Поэтому мы воспользуемся результатами гл. 2 и сразу рассмотрим уравнение (2.3.33).

В случае $a = 0$ уравнение (2.3.33) принимает вид

$$\frac{dy}{d\xi} = \pm y \sqrt{(2c - C_2 + C_2 y)}. \quad (3.4.31)$$

Интегрирование уравнения (3.4.31) зависит от значения C_2 и параметра c . Рассмотрим три случая значений постоянной C_2 .

Случай $C_2 = 2c$. Если $a = 0$, $c \neq 0$, то уравнение (2.3.33) имеет решение (2.3.36), сохранившееся из случая $a \neq c \neq 0$. Ему соответствует разложение (2.3.37).

В случае $a = c = 0$ уравнение (3.4.31) есть $dy/d\xi = 0$. Оно имеет решение $y = C_3$, C_3 — произвольная постоянная. Этому решению соответствует семейство разложений решений (3.4.22) полного уравнения.

Случай $C_2 = 0$. Уравнение (3.4.31) принимает вид

$$\frac{dy}{d\xi} = \pm y\sqrt{2c}. \quad (3.4.32)$$

Если $a = 0$, $c \neq 0$, то уравнение (3.4.32) имеет решение

$$y = C_4 x^{\pm\sqrt{2c}}, \quad (3.4.33)$$

где C_4 — произвольная постоянная.

Функция (3.4.33) является решением укороченного уравнения (3.4.1), соответствующего ребру $\Gamma_3^{(1)}$. Более того, она является решением каждого из укороченных уравнений, соответствующих вершинам $Q_4 = (0, 3)$ и $Q_6 = (0, 4)$ (рис. 14б).

При $\operatorname{Re} \sqrt{2c} = 0$ получаем начальные части (3.4.33) разложений (3.4.6) семейств \mathcal{B}_8 с $\operatorname{Im} \sqrt{2c} > 0$ и \mathcal{B}_9 с $\operatorname{Im} \sqrt{2c} < 0$.

Случай $0 \neq C_2 \neq 2c$. Пусть

$$t^2 = 2c - C_2 + C_2 y, \quad (3.4.34)$$

тогда уравнение (3.4.31) принимает вид

$$\frac{dt}{d\xi} = \pm \frac{(t^2 - 2c + C_2)}{2}. \quad (3.4.35)$$

Уравнение (3.4.35) имеет интеграл

$$\ln \frac{t - \sqrt{2c - C_2}}{t + \sqrt{2c - C_2}} = \pm \sqrt{2c - C_2} (\xi + C_{16}),$$

где C_{16} — произвольная постоянная. Отсюда получаем

$$\frac{t - \sqrt{2c - C_2}}{t + \sqrt{2c - C_2}} = \exp [\pm \sqrt{2c - C_2} (\xi + C_{16})] \stackrel{\text{def}}{=} \sigma. \quad (3.4.36)$$

Учитывая (3.4.34) и (3.4.36), получаем

$$y = \frac{2c - C_2}{C_2} \frac{4\sigma}{(1 - \sigma)^2}. \quad (3.4.37)$$

Правую часть (3.4.37) можно записать в виде

$$y = \frac{2c - C_2}{C_2} \left(\frac{2}{1/\sqrt{\sigma} - \sqrt{\sigma}} \right)^2. \quad (3.4.38)$$

Положим $2i\eta = \ln \sigma \stackrel{\text{def}}{=} \pm \sqrt{2c - C_2} (\xi + C_{16})$. Учитывая равенство $\xi = \ln x$, имеем

$$\eta = \pm i \frac{\sqrt{2c - C_2}}{2} (\ln x + C_{16}).$$

Тогда (3.4.38) принимает вид

$$y = \frac{C_2 - 2c}{C_2} \frac{1}{\sin^2 \eta}. \quad (3.4.39)$$

Согласно (3.4.36) y разлагается в ряд по степеням $\sigma = (C_{17}x)^{\pm\sqrt{2c-C_2}}$, где C_{17} — произвольная постоянная.

Если $2c - C_2$ — вещественное отрицательное число, то число $i\sqrt{2c - C_2} \stackrel{\text{def}}{=} 2\gamma$ — вещественно. В этом случае $\eta = \gamma \ln(C_{17}x)$. Из (3.4.39) видно, что y разлагается в ряд по целым степеням σ , т. е. по целым степеням $x^{2\gamma i}$, что дает ряд по чисто мнимым степеням x , который при $a = 0$ соответствует семействам \mathcal{B}_7^τ экзотических разложений (3.4.3) с $\text{Re } \rho = 0$ и $\rho^2 \neq 2c$. Согласно (3.4.38) обратное к нему разложение y^{-1} не зависит от знака γ , т. е. от τ . Согласно теореме 1.5.3 обратные к (3.4.3) разложения y^{-1} также не зависят от τ .

Итак, доказана

Теорема 3.4.1.

- (а) При $x \rightarrow 0$ и $a = 0$ существуют два двухпараметрических семейства экзотических разложений решений с постоянными комплексными коэффициентами

$$\mathcal{B}_7^\tau: \quad y = \frac{\rho^2}{2c - \rho^2} \frac{1}{\sin^2[\ln(C_{11}x)^\gamma]} + \sum_{\text{Re } s \geq 1} c_s x^s, \quad (3.4.3)$$

где ρ — произвольная чисто мнимая постоянная, $\rho^2 \neq 2c$, $\tau = \text{sgn}(\text{Im } \rho)$, $s \in \{\rho + l\rho + m(1 - \rho), l, m \geq 0; l + m > 0; l, m \in \mathbb{Z}\}$, $2\gamma = i\rho$, C_{11} — ненулевая произвольная постоянная, \tilde{c}_k и c_s постоянны и однозначно определены. Семейства обратных разложений y^{-1} семейств \mathcal{B}_7^+ и \mathcal{B}_7^- совпадают.

- (б) При $x \rightarrow 0$ и $a = 0$, $c \neq 0$ существуют два однопараметрических семейства степенных разложений решений

$$\mathcal{B}_{8,9}: \quad y = c_\rho x^\rho + \sum_{\text{Re } s \geq 1} c_s x^s, \quad (3.4.6)$$

где ρ — чисто мнимая постоянная, $\rho^2 = 2c$, $\text{Im } \rho > 0$ для семейства \mathcal{B}_8 и $\text{Im } \rho < 0$ для семейства \mathcal{B}_9 , $s \in \{\rho + l(1 - \rho) + m, l, m \geq 0; l + m > 0; l, m \in \mathbb{Z}\}$, комплексные коэффициенты таковы: c_ρ — ненулевая произвольная постоянная, c_s постоянны и однозначно определены.

- (в) При $x \rightarrow 0$ и $a = c = 0$ существует однопараметрическое семейство степенных разложений решений с постоянными комплексными коэффициентами

$$\mathcal{B}_{10}: \quad y = c_0 + \sum_{s=1}^{+\infty} c_s x^s, \quad (3.4.22)$$

где $c_0 \neq 0, 1$ — произвольная постоянная, c_s постоянны и однозначно определены.

§ 5. Разложения вблизи бесконечности при $a = 0$, $b \neq 0$

5.1. Разложения решений вблизи бесконечности, соответствующие вершине $\Gamma_2^{(0)}$.

Вершина $\Gamma_5^{(0)} = (2, 4)$ с помощью преобразования

$$x = \frac{1}{x^*}, \quad y = \frac{y^*}{x^*}, \quad (3.5.1)$$

которое является суперпозицией симметрий (2.1.6) и (2.1.8), переводится в вершину $\Gamma_6^{(0)} = (0, 4)$. Поэтому разложения, соответствующие вершине $\Gamma_5^{(0)}$, получаются с помощью симметрии (3.5.1) из разложений, соответствующих вершине $\Gamma_6^{(0)}$. И представляют собой семейство

$$\mathcal{C}_\infty^\infty : y = c_r x^r + \sum_s c_s x^s, \quad (3.5.2)$$

где $r = 1 + \sqrt{1 - 2d}$, $\operatorname{Re} \sqrt{1 - 2d} > 0$, $s \in \{r + l(1 - r) - m; l, m \geq 0; l + m > 0; l, m \in \mathbb{Z}\}$, комплексные коэффициенты: c_r — ненулевая произвольная постоянная, c_s постоянны и однозначно определены.

Если $\operatorname{Re} r > 2$, второе приближение решения есть $y = c_r x^r + c_{r-1} x^{r-1}$, где $c_{r-1} = c_r(c + b + d - r)/r$.

Если $1 < \operatorname{Re} r \leq 2$, то второе приближение решения есть $y = c_r x^r + c_1 x$, где $c_1 = 0$.

5.2. Разложения решений вблизи бесконечности, соответствующие ребру $\Gamma_5^{(1)}$. При $a = 0$, $b \neq 0$, $d = 1/2$ имеем семейство степенных разложений \mathcal{G}_{10} , соответствующее ребру $\Gamma_5^{(1)}$ и вычисленное с помощью симметрии (3.5.1) из семейства разложений решений \mathcal{B}_{10} , соответствующего ребру $\Gamma_7^{(1)}$.

$$\mathcal{G}_{10} : y = c_1 x + \sum_{s=0}^{+\infty} c_{-s} x^{-s}, \quad (3.5.3)$$

где комплексные коэффициенты: $c_1 \neq 0$, 1 — произвольная постоянная, c_{-s} постоянны и однозначно определены. Второе приближение решения имеет вид $y = c_1 x + c_0$, где

$$c_0 = (c_1 - 1)(1 - 2c - 2b). \quad (3.5.4)$$

При $a = 0$, $d \neq 1/2$ имеем семейство сложных разложений, соответствующее ребру $\Gamma_7^{(1)}$,

$$\mathcal{G}_3 : y = \varphi_1 x + \sum_{\sigma=0}^{\infty} \varphi_{-\sigma} x^{-\sigma}, \quad (3.5.5)$$

где

$$\varphi_1 = \frac{4}{1 - 2d} \frac{1}{\ln^2 x} + c_{-3} \frac{1}{\ln^3 x} + \sum_{s=4}^{+\infty} c_{-s} \left(\frac{1}{\ln x} \right)^s, \quad (3.5.6)$$

комплексные коэффициенты: c_{-3} — произвольный, остальные c_{-s} постоянны и однозначно определены; $\varphi_{-\sigma}$ — ряды по убывающим степеням некрatных логарифмов.

При $a = 0$, $d \neq 1/2$ существуют 2 семейства экзотических разложений

$$\mathcal{G}_7^\tau : y = c_\rho x^\rho + \sum_s c_s x^s, \quad (3.5.7)$$

где $\tau = \operatorname{sgn}(\rho - 1)$, ρ — произвольная комплексная постоянная с $\operatorname{Re} \rho = 1$, $\operatorname{Im} \rho \neq 0$, $\rho - 1 \neq \sqrt{1 - 2d}$, $s \in \{\rho + l(\rho - 1) - m\rho; l, m \geq 0; l + m > 0; l, m \in \mathbb{Z}\}$, комплексные коэффициенты: c_ρ — ненулевая произвольная постоянная, c_s постоянны и однозначно определены.

При $a = 0$, $d > 1/2$ имеем 2 семейства разложений с $\rho = 1 + \sqrt{1 - 2d}$. А именно: 2 семейства экзотических разложений

$$\mathcal{G}_{8,9}: \quad y = c_\rho x^\rho + \sum_{\operatorname{Re} s \leq 0} c_s x^s, \quad (3.5.8)$$

где $\operatorname{Re} \rho = 1$, $\operatorname{Im} \rho \neq 0$, $\operatorname{Im} \rho > 0$ для семейства \mathcal{G}_8 и $\operatorname{Im} \rho < 0$ для семейства \mathcal{G}_9 , $s \in \{\rho - l\rho - m\rho; l, m \geq 0; l + m > 0; l, m \in \mathbb{Z}\}$, комплексные коэффициенты: c_ρ — ненулевая произвольная постоянная, c_s постоянны и однозначно определены.

§ 6. Сводка результатов в случае $a = 0$, $b \neq 0$

Теорема 3.6.1. В случае $a = 0$, $b \neq 0$ уравнение (2.1.1) при $x \rightarrow 0$ имеет всего 21 семейство разложений решений. Из них 15 семейств \mathcal{A}_0 , \mathcal{H}_i , $i = 1, \dots, 6$, \mathcal{H}_0 , \mathcal{H}_1^τ , \mathcal{H}_2^τ , \mathcal{H}_6^τ , $\tau = \pm 1$, и \mathcal{B}_3 , соответствующие вершине $\Gamma_4^{(0)}$, ребру $\Gamma_1^{(1)}$ и ребру $\Gamma_4^{(1)}$, сохранились из случая $a \cdot b \neq 0$. Остальные 6 семейств разложений решений новые:

\mathcal{C}_0^∞ , которое существует при $c \neq 0$, определяется формулами (3.2.8), (3.2.7) и имеет 1 параметр;

$\mathcal{B}_{8,9}$, которые существуют при $c < 0$ определяются формулой (3.4.6), и имеют 1 параметр;

\mathcal{B}_{10} , которое существует при $c = 0$, определяется формулой (3.4.22) и имеет 1 параметр;

\mathcal{B}_7^τ , которые существуют при $c \neq 0$ определяются формулами (3.4.3), (3.4.39) и имеют 2 параметра.

Замечание 3.6.1. Семейства \mathcal{C}_0^∞ , \mathcal{B}_8 – \mathcal{B}_{10} , \mathcal{B}_7^τ также назовем базовыми. С помощью симметрий уравнения Р6 (2.1.6), (2.1.8) и (2.1.9) из них получаются другие семейства разложений.

Однопараметрические семейства \mathcal{C}_0^∞ , \mathcal{B}_8 – \mathcal{B}_{10} — степенные, \mathcal{B}_7^τ — экзотические, \mathcal{B}_3 — сложное. Существование базовых семейств \mathcal{B}_3 , \mathcal{C}_0^∞ , \mathcal{B}_8 – \mathcal{B}_{10} , \mathcal{B}_7^τ при разных значениях параметров для $a = 0$ показано в двух последних столбцах табл. 1 на стр. 16.

Теорема 3.6.2. В случае $a = 0$, $b \neq 0$ уравнение (2.1.1) при $x \rightarrow \infty$ имеет 21 семейство разложений решений. Из них 15 семейств \mathcal{A}_∞ , \mathcal{D}_i , $i = 1, \dots, 6$, \mathcal{D}_0 , \mathcal{D}_1^τ , \mathcal{D}_2^τ , \mathcal{D}_6^τ , $\tau = \pm 1$, и \mathcal{G}_3 , соответствующие вершине $\Gamma_2^{(0)}$, ребру $\Gamma_2^{(1)}$ и ребру $\Gamma_3^{(1)}$, сохранились из случая $a \cdot b \neq 0$. Остальные 6 семейств разложений решений новые:

$\mathcal{C}_\infty^\infty$, которое существует при $d \neq 1/2$, определяется формулой (3.5.2) и имеет 1 параметр;

$\mathcal{G}_{8,9}$, которые существуют при $d > 1/2$, определяются формулой (3.5.8) и имеют 1 параметр;

\mathcal{G}_{10} , которое существует при $d = 1/2$, определяется формулой (3.5.3) и имеет 1 параметр;

\mathcal{G}_7^τ , которые существуют при $d \neq 1/2$, определяются формулой (3.5.7) и имеют 2 параметра.

Шестое уравнение Пенлеве имеет три симметрии (2.1.6), (2.1.8), (2.1.9). Если скомбинировать первые две из них, то получается симметрия (3.5.1):

$$(x, y, a, b, c, d) \rightarrow \left(\frac{1}{x^*}, \frac{y^*}{x^*}, a^*, b^*, -d^* + \frac{1}{2}, -c^* + \frac{1}{2} \right). \quad (3.6.1)$$

Она переводит семейства разложений при $x \rightarrow 0$ в семейства разложений при $x \rightarrow \infty$. При этом семейства $\mathcal{C}_0^\infty, \mathcal{B}_8 - \mathcal{B}_{10}, \mathcal{B}_7^r$ переходят в семейства $\mathcal{C}_\infty^\infty, \mathcal{G}_8 - \mathcal{G}_{10}, \mathcal{G}_7^r$ соответственно (и обратно). Покажем это на примере семейств разложений \mathcal{C}_0^∞ и $\mathcal{C}_\infty^\infty$.

Формула (3.2.8) при замене (3.6.1) испытывает следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \frac{y^*}{x^*} &= c_r x^{*-r} + \sum_s c_s x^{*-s}, \\ y^* &= c_r x^{*-r+1} + \sum_s c_s x^{*-s+1}. \end{aligned} \quad (3.6.2)$$

Положим $c_{r^*} = c_r, r^* = -r + 1, c_{s^*} = c_s, s^* = -s + 1$, где s^* пробегает множество $\mathbb{K}^* = \{s^* = r^* + l(1 - r^*) - m, l, m > 0, l + m \geq 0, l, m \in \mathbb{Z}\}$. Получаем ряд

$$y^* = c_{r^*} x^{*r^*} + \sum_{s^*} c_{s^*} x^{*s^*}.$$

Из § 2 гл. 3 известно, что в случае $1 > |\operatorname{Re} \sqrt{2c}| > 0$ второе приближение решения, соответствующего вершине $\Gamma_6^{(0)}$, есть $y = c_r x^r + c_0, c_r \neq 0, c_r$ — произвольная постоянная, $r = -\sqrt{2c}$. С помощью преобразования (3.6.1) получаем второе приближение решения, соответствующего вершине $\Gamma_5^{(0)}$ для $1 > |\operatorname{Re} \sqrt{1 - 2d^*}| > 0$,

$$y^* = c_{r^*}^* x^{*r^*} + c_1^* x^*,$$

где $r^* = 1 + \sqrt{1 - 2d^*}, c_{r^*}^* \neq 0, c_{r^*}^*$ — произвольная постоянная, $c_1^* = 0$.

Аналогично в случае $|\operatorname{Re} \sqrt{1 - 2d^*}| \geq 1$ получаем

$$y^* = c_{r^*}^* x^{*r^*} + c_{r^*-1}^* x^{*r^*-1},$$

где $r^* = 1 + \sqrt{1 - 2d^*}, c_{r^*}^* \neq 0, c_{r^*}^*$ — произвольная постоянная, $c_{r^*-1}^* = c_{r^*}^* (-r^{*2} + r^* + c^* + b^* - d^*)/r^*$.

Наконец, опускаем звездочки и получаем

$$\mathcal{C}_\infty^\infty : y = c_r x^r + \sum_s c_s x^s, \quad (3.6.3)$$

где комплексный показатель $r = 1 + \sqrt{1 - 2d}, \operatorname{Re} \sqrt{1 - 2d} > 0, c_r \neq 0, c_r$ — комплексная произвольная постоянная, комплексные коэффициенты c_s — постоянные и однозначно определенные, $s \in \mathbb{C}$ пробегает множество $\{r + l(1 - r) - m, l, m > 0, l + m \geq 0, l, m \in \mathbb{Z}\}$; в случае $|\operatorname{Re} \sqrt{1 - 2d}| \geq 1$ разложение (3.6.3) имеет второе приближение $y = c_r x^r + c_{r-1} x^{r-1}$, где $c_{r-1} = c_r (-r^2 + r + c + b - d)/r$, а в случае $1 > |\operatorname{Re} \sqrt{1 - 2d}| > 0$ второе приближение решения уравнения имеет вид $y = c_r x^r + c_1 x$, где $c_1 = 0$.

§ 7. Разложения в случае $a \neq 0, b = 0$

Многоугольник уравнения Р6 в этом случае показан на рис. 15 а, а нормальные конусы его обобщенных граней — на рис. 15 б.

С помощью симметрии (2.1.6) разложения, вычисленные в случае $a = 0$, переводятся в разложения, имеющиеся в случае $b = 0$.

7.1. Разложения, соответствующие вершине $\Gamma_8^{(0)} = (3, 2)$. Эта вершина симметрична вершине $\Gamma_6^{(0)}$. Поэтому разложения решений, соответствующие вершине $\Gamma_8^{(0)}$, симметричны разложениям решений, соответствующих вершине $\Gamma_6^{(0)}$. Рассмотрим разложение (3.2.8). Формула (3.2.8) при замене (2.1.6) испытывает такие преобразования:

$$\frac{1}{y^*} = c_r x^{*-r} + \sum_s c_s x^{*-s},$$

$$y^* = \frac{1}{\frac{c_r}{x^{*r}} \left(1 + \sum_s \frac{c_s}{c_r} x^{*-s+r} \right)}. \quad (3.7.1)$$

Так как $|x^*| \rightarrow \infty$, то (3.7.1) можно разложить в формальный ряд

$$y^* = \frac{x^{*r}}{c_r} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\sum_s \frac{c_s}{c_r} x^{*-s+r} \right)^n. \quad (3.7.2)$$

Выпишем первые два его члена:

$$y^* = \frac{x^{*r}}{c_r} - \sum_s \frac{c_s}{c_r^2} x^{*-s+2r} + \dots \quad (3.7.3)$$

Положим $c_r^* = 1/c_r$, $c_{s^*} = -c_s/c_r^2$, $s^* = -s + 2r$, где s^* пробегает множество $\{r + lr - m, l, m > 0, l + m \geq 0, l, m \in \mathbb{Z}\}$, получим ряд

$$y^* = c_r^* x^{*r} + \sum_{s^*} c_{s^*}^* x^{*s^*} + \dots$$

Второе приближение решения в случае $\operatorname{Re} r \leq -1$ имеет вид $y^* = c_r^* x^{*r} + c_{r-1}^* x^{*r-1}$, $r = -\sqrt{2c}$,

$$c_{r-1}^* = -\frac{c_{r+1}}{c_r^2} = -c_r^* \frac{c^* + d^* + a^* - r}{r-1}.$$

А в случае $-1 < \operatorname{Re} r < 0$ второе приближение решения есть

$$y^* = c_r^* x^{*r} + c_{2r}^* x^{*2r},$$

где $c_{2r}^* = 0$. Наконец, опустим звездочки и получим выражение

$$C_\infty^0 : y = c_r x^r + \sum_s c_s x^s, \quad (3.7.4)$$

где комплексный показатель $r = \sqrt{2c}$ и удовлетворяет условию $\operatorname{Re} r < 0$, s пробегает множество $\{r + lr - m, l, m > 0, l + m \geq 0, l, m \in \mathbb{Z}\}$, комплексные коэффициенты: c_r — ненулевая произвольная постоянная, все c_s постоянны и однозначно определены.

В случае $\operatorname{Re} r < -1$ разложение решения имеет второе приближение $y = c_r x^r + c_{r-1} x^{r-1}$, где

$$c_{r-1} = -c_r \frac{c + d + a - r}{r - 1},$$

а в случае $-1 < \operatorname{Re} r < 0$ второе приближение решения уравнения имеет вид $y = c_r x^r + c_{2r} x^{2r}$, где $c_{2r} = 0$. По теореме 1.7.2 ряд (3.7.4) сходится для достаточно больших $|x|$.

7.2. Разложение, соответствующее вершине $\Gamma_7^{(0)} = (1, 2)$. Имеем однопараметрическое семейство разложений

$$C_0^0: \quad y = c_r x^r + \sum_s c_s x^s, \quad (3.7.5)$$

где $r = 1 + \sqrt{1 - 2d}$, $\operatorname{Re} r > 1$, $s \in \{r + l(r - 1) + m, l, m > 0, l + m \geq 0, l, m \in \mathbb{Z}\}$, комплексные коэффициенты: c_r — ненулевая произвольная постоянная, все c_s постоянны и однозначно определены. В случае $\operatorname{Re} r \geq 2$ второе приближение решения $y = c_r x^r + c_{2r-1} x^{2r-1}$, $c_{2r-1} = c_r \frac{r - c + a - d}{r}$, в случае $1 < \operatorname{Re} r < 2$ второе приближение решения $y = c_r x^r + c_{2r-1} x^{2r-1}$, $c_{2r-1} = 0$. Ряд (3.7.5) сходится для достаточно малых $|x|$ согласно теореме 1.7.2.

7.3. Разложения решений, соответствующие $\Gamma_{10}^{(1)}$. При $c = 0$ имеем однопараметрическое семейство степенных разложений

$$D_{10}: \quad y = c_0 + \frac{c_{-1}}{x} + \sum_{s=2}^{+\infty} \frac{c_{-s}}{x^s}, \quad (3.7.6)$$

где комплексные коэффициенты: $c_0 \neq 0, 1$, — произвольная постоянная, комплексный коэффициент $c_{-1} = (d + a)(1 - c_0)c_0$, все c_{-s} постоянны и однозначно определены.

По теореме 1.7.2 ряд (3.7.6) сходится для достаточно больших $|x|$.

При $c \neq 0$ имеем однопараметрическое семейство сложных разложений

$$D_3: \quad y = \varphi_0 + \sum_{\sigma=1}^{\infty} \varphi_{-\sigma} x^{-\sigma}, \quad (3.7.7)$$

где

$$\varphi_0 = \frac{c}{2} \ln^2 x + c_1 \ln x + \sum_{s=0}^{+\infty} c_{-s} \left(\frac{1}{\ln x} \right)^s + \dots, \quad (3.7.8)$$

комплексные коэффициенты: c_1 — произвольная постоянная, все c_{-s} постоянны и однозначно определены; $\varphi_{-\sigma}$ — ряды по убывающим степеням логарифмов.

При $c \neq 0$ существует семейство полуэкзотических разложений

$$D_7: \quad y = c_\rho x^\rho + c_0 + c_\rho x^{-\rho} + \sum_s c_s x^s, \quad (3.7.9)$$

где ρ — произвольная комплексная постоянная с $\operatorname{Re} \rho = 0$, $\operatorname{Im} \rho \neq 0$, $\rho^2 \neq 2c$, $s \in \{l + k\rho; l \leq -1; |k| \leq |l|; l, k \in \mathbb{Z}\}$, комплексные коэффициенты: c_ρ — ненулевая произвольная постоянная, c_s постоянны и однозначно определены.

При $c < 0$ имеем 2 семейства разложений с $\rho = \sqrt{2c}$

$$\mathcal{D}_{8,9}: \quad y = c_\rho x^\rho + \sum_{\operatorname{Re} s \leq -1} c_s x^s, \quad (3.7.10)$$

где $\operatorname{Re} \rho = 0$, $\operatorname{Im} \rho \neq 0$, $\operatorname{Im} \rho < 0$ для семейства \mathcal{D}_8 и $\operatorname{Im} \rho > 0$ для семейства \mathcal{D}_9 , $s \in \{\rho - l\rho - m; l, m \geq 0; l + m > 0; l, m \in \mathbb{Z}\}$, комплексные коэффициенты: c_ρ — ненулевая произвольная постоянная, c_s постоянны и однозначно определены.

7.4. Разложения решений, соответствующие $\Gamma_8^{(1)}$. При $d = 1/2$ имеем однопараметрическое семейство степенных разложений

$$\mathcal{H}_{10}: \quad y = c_1 x + \sum_{s=2}^{+\infty} c_s x^s, \quad (3.7.11)$$

где комплексные коэффициенты: $c_1 \neq 0, 1$ — произвольная постоянная, $c_2 = -c_1 \times (1 - c_1)(1 - 2c_1 + 2a)$, все c_s постоянны и однозначно определены.

Этот ряд сходится для достаточно малых $|x|$.

При $d \neq 1/2$ имеем однопараметрическое семейство сложных разложений

$$\mathcal{H}_3: \quad y = \varphi_1 x + \sum_{\sigma=2}^{\infty} \varphi_\sigma x^\sigma, \quad (3.7.12)$$

где

$$\varphi_1 = \frac{1 - 2d}{4} \ln^2 x + c_1 \ln x + \sum_{s=0}^{+\infty} c_{-s} (\ln x)^{-s}, \quad (3.7.13)$$

комплексные коэффициенты: c_1 — произвольная постоянная, все c_{-s} постоянны и однозначно определены; φ_σ — ряды по убывающим степеням логарифмов.

При $d \neq 1/2$ существует 1 семейство полуэкзотических разложений

$$\mathcal{H}_7: \quad y = c_\rho x^\rho + c_1 x + c_\rho x^{2-\rho} + \sum_s c_s x^s, \quad (3.7.14)$$

где ρ — произвольная комплексная постоянная с $\operatorname{Re} \rho = 1$, $\operatorname{Im} \rho \neq 0$, $\rho - 1 \neq \sqrt{1 - 2d}$, $s \in \{l + k(\rho - 1); l \geq 2; |k| \leq l; l, k \in \mathbb{Z}\}$, комплексные коэффициенты: c_ρ — ненулевая произвольная постоянная, c_s постоянны и однозначно определены.

При $a = 0$, $d > 1/2$ имеем 2 семейства разложений

$$\mathcal{H}_{8,9}: \quad y = c_\rho x^\rho + \sum_{\operatorname{Re} s \geq 2} c_s x^s, \quad (3.7.15)$$

где $\operatorname{Re} \rho = 1$, $\operatorname{Im} \rho \neq 0$, $\operatorname{Im} \rho < 0$ для семейства \mathcal{H}_8 и $\operatorname{Im} \rho > 0$ для семейства \mathcal{H}_9 , $s \in \{\rho + l\rho + m; m \geq 0; l \geq 1; l, m \in \mathbb{Z}\}$, комплексные коэффициенты: c_ρ — ненулевая произвольная постоянная, c_s постоянны и однозначно определены.

7.5. Сводка результатов в случае $a \neq 0$, $b = 0$.

Теорема 3.7.1. В случае $a \neq 0$, $b = 0$ уравнение (2.1.1) при $x \rightarrow 0$ имеет всего 21 семейство разложений решений. Из них 16 семейств \mathcal{A}_0 , \mathcal{B}_i , $i = 1, \dots, 6$, \mathcal{B}_0^τ , \mathcal{B}_1^τ , \mathcal{B}_2^τ , \mathcal{B}_6^τ , $\tau = \pm 1$, и \mathcal{H}_3 , соответствующие вершине $\Gamma_4^{(0)}$, ребру $\Gamma_4^{(1)}$ и ребру $\Gamma_1^{(1)}$, сохранились из случая $a \cdot b \neq 0$. Остальные 5 семейств разложений решений новые:

C_0^0 , которое существует при $d \neq 1/2$, определяется формулой (3.7.5) и имеет 1 параметр;

$\mathcal{H}_{8,9}$, которые существуют при $d > 1/2$, определяются формулой (3.7.15), и имеют 1 параметр;

\mathcal{H}_{10} , которое существует при $d = 1/2$, определяется формулой (3.7.11) и имеет 1 параметр;

\mathcal{H}_7 , которое существует при $d \neq 1/2$, определяется формулой (3.7.14) и имеет 2 параметра.

Теорема 3.7.2. В случае $a \neq 0, b = 0$ уравнение (2.1.1) при $x \rightarrow \infty$ имеет 21 семейство разложений решений. Из них 16 семейств $\mathcal{A}_\infty, \mathcal{G}_i, i = 1, \dots, 6, \mathcal{G}_0^\tau, \mathcal{G}_1^\tau, \mathcal{G}_2^\tau, \mathcal{G}_6^\tau, \tau = \pm 1$, и \mathcal{D}_3 , соответствующие вершине $\Gamma_2^{(0)}$, ребру $\Gamma_3^{(1)}$ и ребру $\Gamma_2^{(1)}$, сохранились из случая $a \cdot b \neq 0$. Остальные 5 семейств разложений решений новые:

C_∞^0 , которое существует при $c = 0$, определяется формулой (3.7.4) и имеет 1 параметр;

\mathcal{D}_{10} , которое существует при $c = 0$, определяется формулой (3.7.6) и имеет 1 параметр.

$\mathcal{D}_{8,9}$, которые существуют при $c < 0$, определяются формулой (3.7.10) и имеют 1 параметр;

\mathcal{D}_7 , которое существует при $c \neq 0$, определяется формулой (3.7.9) и имеет 2 параметра.

С помощью симметрии (3.6.1) разложения решений при $x \rightarrow 0$ переводятся в разложения решений при $x \rightarrow \infty$. При этом разложения $C_0^0, \mathcal{H}_8 - \mathcal{H}_{10}, \mathcal{H}_7$ переходят в разложения $C_\infty^0, \mathcal{D}_8 - \mathcal{D}_{10}, \mathcal{D}_7$ соответственно (и обратно).

Глава 4. Разложения решений уравнения Р6 в случае $a = b = 0$ вблизи нуля и бесконечности

§ 1. Разложения

Для шестого уравнения Пенлеве (2.1.1) при $a = b = 0$, c и d — произвольных ищем разложения его решений при $x \rightarrow 0$ и $x \rightarrow \infty$ вида (2.1.2) всех пяти типов — степенные, степенно-логарифмические, сложные, полуэкзотические и экзотические.

Уравнение (2.1.4) при $a = b = 0$ принимает вид

$$\begin{aligned} f(x, y) \stackrel{def}{=} & 2y''x^2(x-1)^2y(y-1)(y-x) - (y')^2[x^2(x-1)^2(y-1)(y-x) + \\ & + x^2(x-1)^2y(y-x) + x^2(x-1)^2y(y-1)] + 2y'[x(x-1)^2y \times \\ & \times (y-1)(y-x) + x^2(x-1)y(y-1)(y-x) + x^2(x-1)^2y(y-1)] - \\ & - [2c(x-1)y^2(y-x)^2 + 2dx(x-1)y^2(y-1)^2] = 0. \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

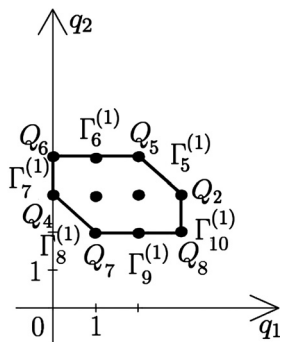


Рис. 19. Носитель уравнения (4.1.1), его многоугольник, ребра и вершины

Носитель $S(f_{a=b=0})$ левой части уравнения (4.1.1), его выпуклая оболочка $\Gamma(f_{a=b=0})$, грани: вершины $\Gamma_i^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} Q_i$, $i = 2, 5, 6, 4, 7, 8$, и ребра $\Gamma_i^{(1)}$, $i = 5, \dots, 10$, изображены на рис. 19.

Согласно рис. 19 в этом случае нет новых семейств разложений решений. Все семейства разложений, существующие в случае $a = b = 0$, содержатся в случаях $a \cdot b \neq 0$; $a = 0, b \neq 0$ и $a \neq 0, b = 0$ и перечислены в главах 2 и 3.

$b \neq 0$ и $a \neq 0, b = 0$.

Теорема 4.1.1. В случае $a = b = 0$ уравнение (2.1.1) при $x \rightarrow 0$ имеет всего 14 семейств разложений решений. Из них 3 семейства $\mathcal{A}_0, \mathcal{B}_3$ и \mathcal{H}_3 сохранились из случая $a \cdot b \neq 0$. Еще 11 семейств разложений решений $\mathcal{C}_0^\infty, \mathcal{B}_8 - \mathcal{B}_{10}, \mathcal{B}_7^T, \mathcal{C}_0^0, \mathcal{H}_8 - \mathcal{H}_{10}, \mathcal{H}_7$ сохранились из случаев $a = 0$,

Теорема 4.1.2. В случае $a = b = 0$ уравнение (2.1.1) при $x \rightarrow \infty$ имеет всего 14 семейств разложений решений. Из них 3 семейства $\mathcal{A}_\infty, \mathcal{G}_3$ и \mathcal{D}_3 сохранились из случая $a \cdot b \neq 0$. Еще 11 семейств разложений решений $\mathcal{C}_\infty^\infty, \mathcal{G}_8 - \mathcal{G}_{10}, \mathcal{G}_7^T, \mathcal{C}_\infty^0, \mathcal{D}_8 - \mathcal{D}_{10}, \mathcal{D}_7$ сохранились из случаев $a = 0, b \neq 0$ и $a \neq 0, b = 0$.

§ 2. Примеры и сравнения с известными результатами

Пример 1. В случае

$$a = b = c = 0, \quad d = 1/2 \tag{4.2.1}$$

мы получили следующие базовые семейства разложений:

1. Три дупараметрических (по c_r и r) семейства разложений \mathcal{B}_7^T с $\tau = \text{sgn}(\text{Im } r)$ (семейства экзотических разложений) и \mathcal{A}_0 (семейство степенных разложений), определяемых формулой

$$y = c_r x^r + \sum c_s x^s, \tag{4.2.2}$$

где комплексные показатели степени: r — произвольный с $\text{Re } r = 0, r \neq 0$ для семейств \mathcal{B}_7^T , $\tau = \text{sgn}(\text{Im } r)$ и с $0 < \text{Re } r < 1$ для семейства \mathcal{A}_0 , $s \in \{r + lr + m(1 - r); l, m \geq 0; l + m > 0; l, m \in \mathbb{Z}\}$; комплексные коэффициенты: c_r — ненулевая произвольная постоянная, все c_s постоянны и однозначно определены.

Если $\text{Re } r = 0, r \neq 0$, то сумма ряда (4.2.2) для $m = 0$ есть функция (3.4.39), т. е. асимптотики имеют вид

$$y = \sin^{-2} \left[-\frac{\text{Im } r}{2} \ln(C_{17}x) \right], \tag{4.2.3}$$

где $r = \sqrt{-C_2}$, C_2 — любое вещественное положительное число, C_{17} — ненулевая произвольная постоянная.

2. Однопараметрическое (по c_0) семейство степенных разложений \mathcal{B}_{10} , определяемое формулой

$$y = c_0 + \sum_{s=1}^{\infty} c_s x^s, \tag{4.2.4}$$

где комплексные коэффициенты: $c_0 \neq 0, 1$, c_0 — произвольная постоянная, $c_1 = (c_0 - 1)/2$, остальные c_s постоянны и однозначно определены.

Пример 2. В случае (4.2.1) Пикар [69] проинтегрировал уравнение (2.1.1) в явном виде. Некоторые асимптотики решений Пикара есть в [63, лемма 2]. При $x \rightarrow 0$ они имеют вид

$$y(x) \sim a_0 x^r (1 + O(x^\varepsilon)), \tag{4.2.5}$$

где $0 < \operatorname{Re} r < 1$, либо $r = 0$, либо $r = 1$, a_0 — ненулевая произвольная постоянная.

В случае $\operatorname{Re} r = 0, r \neq 0$ асимптотики решений суть [55]

$$y(x) \sim (1 + O(x)) \sin^{-2} \left[\frac{-\operatorname{Im} r \log(x)}{2} + O(1) \right]. \tag{4.2.6}$$

Сравнивая формулу (4.2.5) с формулами (4.2.2), (4.2.4) и формулу (4.2.6) с формулой (4.2.3), видим, что формулы (4.2.5) и (4.2.6) суть асимптотики решений семейств $\mathcal{A}_0, \mathcal{B}_{10}$ (для $r = 0$) и \mathcal{B}_r^{\pm} соответственно.

Пример 3. При

$$a = 2, \quad b = c = 0, \quad d = 1/2 \tag{4.2.7}$$

мы получили следующие базовые семейства разложений:

1. Три двупараметрических семейства разложений \mathcal{B}_0^{\pm} (семейства экзотических разложений) и \mathcal{A}_0 (семейство степенных разложений), определяемых формулой

$$y = c_r x^r + \sum c_s x^s, \tag{4.2.8}$$

где комплексные показатели степени: r — произвольный с $\operatorname{Re} r = 0, r \neq 0$ для семейств \mathcal{B}_0^{\pm} и с $0 < \operatorname{Re} r < 1$ для семейства \mathcal{A}_0 , $s \in \{r + lr + m(1 - r); l, m \geq 0; l + m > 0; l, m \in \mathbb{Z}\}$; комплексные коэффициенты: c_r — ненулевая произвольная постоянная, все c_s постоянны и однозначно определены.

В случае $\operatorname{Re} r = 0, r \neq 0$ сумма ряда (4.2.8) для $m = 0$ есть функция (2.3.85), где C_2 — вещественное положительное число, $\alpha = 1, \beta = -C_2/4, \gamma = \sqrt{C_2}/2$. Таким образом, асимптотики решений суть

$$y = \frac{\beta}{\beta \cos^2 [\sqrt{-\beta} \ln(C_{11}x)] + \sin^2 [\sqrt{-\beta} \ln(C_{11}x)]}, \tag{4.2.9}$$

где β — произвольное вещественное отрицательное число, C_{11} — ненулевая произвольная постоянная.

2. Однопараметрическое семейство степенных разложений \mathcal{B}_6 , определяемое формулой

$$y = 1 + c_2 x^2 + \frac{c_2}{2} x^3 + \sum_{s=4}^{\infty} c_s x^s, \tag{4.2.10}$$

где комплексные коэффициенты: c_2 — ненулевая произвольная постоянная, все c_s постоянны и однозначно определены.

3. Однопараметрическое семейство сложных разложений \mathcal{B}_3 с асимптотикой

$$y = -\ln^{-2} x + c_{-3} \ln^{-3} x + \sum_{s=4}^{\infty} c_{-s} \ln^{-s} x, \quad (4.2.11)$$

где комплексные коэффициенты: c_{-3} — ненулевая произвольная постоянная, все c_{-s} постоянны и однозначно определены.

Пример 4. В случае (4.2.7) в работе [63] был найден класс решений (названный решениями Шази) в явном виде. Для решений этого класса в [63, лемма 5] при $x \rightarrow 0$ асимптотики имеют вид

$$y(x) \sim -\log^{-2} x + b_0 \log^{-3} x + O(\log^{-4} x), \quad (4.2.12)$$

где b_0 — произвольная комплексная постоянная.

Формула (4.2.12) аналогична (4.2.11) в случае (4.2.7). Для других решений в случае (4.2.7) (за исключением решений Шази) асимптотики не выписаны.

Согласно [63, лемма 6] существует преобразование, которое отображает решения в случае (4.2.7) в решения в случае (4.2.1). По [63, лемма 7] все решения Шази преобразуются в исключительное решение $\mathcal{I}_4: y = \infty$. В [63] выделен также класс решений, названных решениями типа Пикара. По [63, лемма 8] решения типа Пикара не отображаются в исключительное решение $y = \infty$. Таким образом, можно предполагать, что асимптотики решений типа Пикара имеют вид асимптотик решений семейств \mathcal{A}_0 , \mathcal{B}_0^i и \mathcal{B}_6 .

Рассмотрим преобразование из [63, лемма 6] для разложений решений семейства \mathcal{B}_6 , т. е. для разложений вида (4.2.10). В результате этого преобразования разложения (4.2.10) переводятся в разложения вида

$$y = \frac{1}{1 - 64c_2} - \frac{32c_2}{1 - 64c_2} x + \dots, \quad (4.2.13)$$

где c_2 — комплексная произвольная постоянная из (4.2.10).

Если $c_2 \neq 1/64$, то разложение (4.2.13) относится к семейству \mathcal{B}_{10} , т. е. имеет вид (4.2.4). Но в случае $c_2 = 1/64$ оно является исключительным решением $y = \infty$. Следовательно, в случае (4.2.7) решение (4.2.10) семейства \mathcal{B}_6 с $c_2 = 1/64$ с помощью преобразования из [63, лемма 6] переводится в решение $y = \infty$. Поэтому и по [63, лемма 8] оно не является решением типа Пикара. Поскольку его асимптотика при $x \rightarrow 0$ отлична от асимптотик (4.2.11) решений Шази, то это решение не является решением Шази.

Таким образом, в случае (4.2.7) существует решение (4.2.10) с $c_2 = 1/64$, которое не является решением Шази и не является решением типа Пикара. Это противоречит теореме 4 (iii) из [63], утверждающей, что в случае (4.2.7) решения Шази и решения типа Пикара исчерпывают все возможные решения.

На самом деле в случае (4.2.7) имеются решения трех типов: 1) двухпараметрическое семейство решений типа Пикара; 2) однопараметрическое семейство решений Шази и 3) единственное решение (4.2.10) с $c_2 = 1/64$. При этом разложения типа 2) являются предельными для типа 1), а решение типа 3) — предельным для решений типов 1) и 2). У решения типа 3) специфичны не только асимптотические, но и другие свойства.

Глава 5. Разложения решений уравнения Р6 вблизи единицы

С помощью симметрии (2.1.9) из разложений решений при $x \rightarrow 0$ получаем разложения решений при $x \rightarrow 1$. Здесь приведены только результаты без выводов.

§ 1. Разложения вблизи единицы при $a \cdot c \neq 0$

1.1. Двупараметрические семейства разложений. Имеем одно двупараметрическое семейство степенных разложений решений

$$\mathcal{A}_1: \quad y = 1 + c_r(1-x)^r + \sum_s c_s(1-x)^s, \quad (5.1.1)$$

где показатель степени r — произвольный и удовлетворяет неравенствам $0 < \operatorname{Re} r < 1$, а $s \in \{r + lr + m(1-r); l, m \geq 0; l + m > 0; l, m \in \mathbb{Z}\}$, $c_r \neq 0$, c_r — произвольная комплексная постоянная, остальные комплексные коэффициенты c_s постоянны и однозначно определены.

Если $1 > \operatorname{Re} r > 1/2$, то третье приближение решения есть $y = 1 + c_r(1-x)^r + c_1(1-x)$,

$$c_1 = \frac{2(c+d) + (r-1)^2 - 1}{2(r-1)^2}. \quad (5.1.2)$$

Если $0 < \operatorname{Re} r < 1/2$, то третье приближение решения есть $y = 1 + c_r(1-x)^r + c_{2r}(1-x)^{2r}$,

$$c_{2r} = -c_r^2 \frac{2(a+b) + r^2}{2r^2}. \quad (5.1.3)$$

Если $\operatorname{Re} r = 1/2$, $\operatorname{Im} r \neq 0$, то третье приближение решения есть $y = 1 + c_r(1-x)^r + c_1(1-x) + c_{2r}(1-x)^{2r}$, где коэффициенты c_1 и c_{2r} определены ранее формулами (5.1.2) и (5.1.3) соответственно. Если $r = 1/2$, то третье приближение решения есть $y = 1 + c_{1/2}\sqrt{1-x} + c_1(1-x)$, где $c_{1/2}$ — произвольная постоянная, коэффициент $c_1 = (-3 + 8(c+d) - c_{1/2}^2 - 8c_{1/2}^2(a+b))/2$.

Имеем два двупараметрических семейства экзотических разложений \mathcal{E}_0^r и одно двупараметрическое семейство полужэкзотических разложений \mathcal{J}_0 , которые определяются формулой

$$y = 1 + c_r(1-x)^r + \sum_s c_s(1-x)^s, \quad (5.1.4)$$

где $x \rightarrow 1$, комплексные показатели степени таковы: r — произвольный с $\operatorname{Re} r = 0$, $r \neq 0$, $s \in \{r + lr + m(1-r); l, m \geq 0; l + m > 0; l, m \in \mathbb{Z}\}$ для семейств \mathcal{E}_0^r с $\tau = \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} r)$ и r — произвольный с $\operatorname{Re} r = 1$, $r \neq 1$, $s \in \{l + k(r-1); l \geq 1; |k| \leq l; l, k \in \mathbb{Z}\}$ для семейства \mathcal{J}_0 , комплексные коэффициенты: c_r — ненулевая произвольная постоянная, c_s постоянны и однозначно определены.

1.2. Разложения решений при $a \neq -b \neq 0$. Положим $\theta_i \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{2a} + (-1)^i \sqrt{-2b}$, где $i = 1, 2$. Для каждого фиксированного i в зависимости от значения θ_i возможен один из трех случаев.

Случай 1. $\text{Re } \theta_i = 0$. Здесь имеем однопараметрические семейства экзотических разложений

$$\mathcal{E}_i^\tau : y = c_{0i} + \sum_s c_{si}(1-x)^s, \quad i = 1, 2, \quad \tau = \pm 1, \quad (5.1.5)$$

где $s \in \{l + m\tau\theta_i; l, m \geq 0; l + m > 0; l, m \in \mathbb{Z}\}$; комплексные коэффициенты:

$$c_{0i} = (-1)^i \sqrt{-\frac{b}{a}}, \quad (5.1.6)$$

c_{si} с $s = \tau\theta_i$ — произвольная постоянная, остальные c_{si} постоянны и однозначно определены.

Если $c_{si} = 0$ с $s = \tau\theta_i$, то семейство степенных разложений (5.1.5) обозначаем \mathcal{E}_i .

В случае $c_{si} = 0$ с $s = \tau\theta_i$ второе приближение разложений решений (5.1.5) есть $y = c_{0i} + c_{1i}(1-x)$, где

$$c_{1i} = (-1)^i \sqrt{\frac{-b}{a}} \frac{c + d - (\sqrt{a} + (-1)^i \sqrt{-b})^2}{1 - 2(\sqrt{a} + (-1)^i \sqrt{-b})^2}. \quad (5.1.7)$$

Пусть $k_i = \theta_i$, если $\text{Re } \theta_i > 0$, и $k_i = -\theta_i$, если $\text{Re } \theta_i < 0$.

Случай 2. $\text{Re } \theta_i \neq 0$, $\theta_i \notin \mathbb{Z}$. Здесь имеем семейство степенных разложений решений

$$\mathcal{E}_i : y = c_{0i} + \sum_s c_{si}(1-x)^s, \quad i = 1, 2, \quad (5.1.8)$$

где $s \in \{l + mk_i, l, m \in \mathbb{Z}, l, m \geq 0, l + m > 0\}$. Комплексные коэффициенты таковы: c_{0i} определен формулой (5.1.6), $c_{k_i i}$ — произвольный, остальные c_{si} постоянны и однозначно определены. Второе приближение разложения решения (5.1.8) зависит от расположения числа $\text{Re } k_i$. Если $\text{Re } k_i > 1$, тогда второе приближение решения имеет вид $y = c_{0i} + c_{1i}(1-x)$, что аналогично случаю $\text{Re } \theta_i = 0$. Если $0 < \text{Re } k_i < 1$, то второе приближение решения будет иметь вид $y = c_{0i} + c_{k_i i}(1-x)^{k_i}$, где коэффициент $c_{k_i i}$ — произвольный. Если $\text{Re } k_i = 1$, то второе приближение решения будет иметь вид $y = c_{0i} + c_{1i}(1-x) + c_{k_i i}(1-x)^{k_i}$, где коэффициенты: $c_{k_i i}$ — произвольный, c_{1i} определен формулой (5.1.7).

Случай 3. $\text{Re } \theta_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Здесь имеем семейство степенно-логарифмических разложений решений

$$\mathcal{E}_i : y = c_{0i} + \sum_{s=1}^{\infty} c_{si}(\ln(1-x))(1-x)^s, \quad i = 1, 2. \quad (5.1.9)$$

Коэффициент $c_{k_i i} = \alpha_{k_i i} + \beta_{k_i i} \ln(1-x)$, где $\alpha_{k_i i}$ — произвольная постоянная, коэффициент $\beta_{k_i i}$ — постоянный и однозначно определенный, коэффициент c_{0i} определен формулой (5.1.6), остальные c_{si} — многочлены от $\ln(1-x)$, которые однозначно определяются. Здесь разложение (5.1.9) образует однопараметрическое (по $\alpha_{k_i i}$) семейство \mathcal{E}_i . Второе приближение разложения решения (5.1.9) зависит

от расположения числа k_i . Если $k_i = 1$, тогда второе приближение решения имеет вид $y = c_{0i} + c_{1i}(1 - x)$. Коэффициент

$$c_{1i} = \alpha_{1i} + (-1)^i \sqrt{\frac{-b}{a}} \frac{c + d - (\sqrt{a} + (-1)^i \sqrt{-b})^2}{2} \ln(1 - x), \quad (5.1.10)$$

где α_{1i} — произвольная постоянная.

Имеем семейство сложных разложений

$$\mathcal{E}_3: \quad y = \varphi_0 + \sum_{\sigma=1}^{\infty} \varphi_{\sigma}(1 - x)^{\sigma}, \quad (5.1.11)$$

где $\varphi_0 = 1 + \frac{2}{a+b} \ln^{-2}(1-x) + c_{-3} \ln^{-3}(1-x) + \sum_{s=4}^{\infty} c_{-s} \ln^{-s}(1-x)$, комплексные коэффициенты таковы: c_{-3} — произвольная постоянная, c_{-s} постоянны и однозначно определены, φ_{σ} — ряды по убывающим степеням логарифмов.

1.3. Разложения решений при $a = -b \neq 0$. Имеем два однопараметрических семейства сложных разложений

$$\mathcal{E}_{3+j}: \quad y = \varphi_{0j} + \sum_{\sigma=1}^{\infty} \varphi_{\sigma j}(1 - x)^{\sigma}, \quad (5.1.12)$$

где

$$\varphi_{0j} = 1 + (-1)^j \frac{1}{\sqrt{2a}} \ln^{-1}(1-x) + c_{-2j} \ln^{-2}(1-x) + \sum_{s=3}^{\infty} c_{-sj} \ln^{-s}(1-x), \quad j = 1, 2,$$

комплексные коэффициенты таковы: c_{-2j} — произвольная постоянная, c_{-sj} постоянны и однозначно определены, $\varphi_{\sigma j}$ — ряды по убывающим степеням логарифмов.

Семейства разложений \mathcal{E}_2 и \mathcal{E}_2^r сохраняются из случая $a \neq b \neq 0$. В качестве значения θ_2 берем $2\sqrt{2a}$ с $\text{Re } \theta_2 \geq 0$. В зависимости от значения θ_2 возможны три случая. А именно: случай 1 ($\text{Re } \theta_2 = 0$, однопараметрические семейства экзотических разложений \mathcal{E}_2^r определяются формулой (5.1.5)), случай 2 ($\text{Re } \theta_2 \neq 0$, $\theta_2 \notin \mathbb{Z}$, однопараметрическое семейство степенных разложений \mathcal{E}_2 определяется формулой (5.1.8)), случай 3 ($\theta_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, однопараметрическое семейство степенно-логарифмических разложений \mathcal{E}_2 определяется формулой (5.1.9)).

1.4. Разложения решений при $b = 0$. В этом случае имеем исключительное решение согласно теореме (2.1.4)

$$\mathcal{I}_2: \quad y = 1.$$

Имеем одно семейство степенных разложений

$$\mathcal{E}_6: \quad y = c_{\rho}(1-x)^{\rho} + \sum_s c_s(1-x)^s, \quad (5.1.13)$$

где коэффициенты таковы: $c_{\rho} \neq 0$, c_{ρ} — произвольная постоянная, c_s постоянны и однозначно определены, $\rho = \sqrt{2a}$, $\text{Re } \sqrt{2a} > 0$, $s \in \{\rho + l\rho + m; l, m \geq 0; l + m > 0; l, m \in \mathbb{Z}\}$.

Если $\operatorname{Re} \rho > 1$, то второе приближение решения есть $y = c_\rho(1-x)^\rho + c_{\rho+1} \times (1-x)^{\rho+1}$. Коэффициент

$$c_{\rho+1} = c_\rho \frac{a-c-d}{\rho+1}. \quad (5.1.14)$$

Если $0 < \operatorname{Re} \rho < 1$, то второе приближение решения есть $y = c_\rho(1-x)^\rho + c_{2\rho}(1-x)^{2\rho}$. Коэффициент

$$c_{2\rho} = -c_\rho^2. \quad (5.1.15)$$

Если $\operatorname{Re} \rho = 1$, $\operatorname{Im} \rho \neq 0$, то второе приближение решения есть $y = c_\rho(1-x)^\rho + c_2(1-x)^2 + c_{2\rho}(1-x)^{2\rho}$, коэффициенты $c_{2\rho}$ и c_2 определены формулами (5.1.14) и (5.1.15) соответственно. Если $\rho = 1$, то второе приближение решения есть $y = c_1(1-x) + c_2(1-x)^2$. Комплексные коэффициенты: c_1 — произвольная постоянная,

$$c_2 = c_1 \frac{a-c-d-2c_1}{2}$$

есть сумма (5.1.14) и (5.1.15).

Здесь существуют два однопараметрических семейства экзотических разложений

$$\mathcal{E}_6^\tau : y = c_\rho(1-x)^\rho + \sum_s c_s(1-x)^s, \quad (5.1.16)$$

где $\rho = \sqrt{2a}$, $\operatorname{Re} \rho = 0$, s пробегает множество $\{\rho + l\rho + m; l, m \geq 0; l + m > 0; l, m \in \mathbb{Z}\}$, $\tau = \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} \rho)$, комплексные коэффициенты: c_ρ — ненулевая произвольная постоянная, все c_s постоянны и однозначно определены.

Имеется также однопараметрическое семейство сложных разложений \mathcal{E}_3 , которое определяется формулой (5.1.11).

1.5. Разложения решений при $-c \neq d - 1/2 \neq 0$. Положим $\theta_i \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{1-2d} + (-1)^i \sqrt{2c}$, где $i = 1, 2$. Для каждого фиксированного i в зависимости от значения θ_i возможен один из трех случаев.

Случай 1. $\operatorname{Re} \theta_i = 0$. Имеем однопараметрические семейства экзотических разложений решений

$$\mathcal{J}_i^\tau : y = 1 + c_{1i}(1-x) + \sum_s c_{si}(1-x)^s, \quad i = 1, 2, \quad \tau = \pm 1, \quad (5.1.17)$$

где $s \in \{1 + l + m\tau\theta_i; l, m \geq 0; l + m > 0; l, m \in \mathbb{Z}\}$; комплексные коэффициенты:

$$c_{1i} = \frac{-2c - (-1)^i \sqrt{-4cd + 2c}}{2c + 2\check{d} - 1}, \quad (5.1.18)$$

c_{si} с $s = 1 + \tau\theta_i$ — произвольная постоянная, c_{si} постоянны и однозначно определены.

Если $c_{si} = 0$ с $s = 1 + \tau\theta_i$, то семейство степенных разложений (5.1.17) обозначаем \mathcal{J}_i .

В случае $c_{si} = 0$ с $s = 1 + \tau\theta_i$ третье приближение разложения решений (5.1.17) есть $y = 1 + c_{1i}(1-x) + c_{2i}(1-x)^2$, где

$$c_{2i} = (-1)^i \sqrt{\frac{1-2d}{2c} \frac{2(a+b) + 1 - (\sqrt{2c} + (-1)^i \sqrt{1-2d})^2}{2 - 2(\sqrt{2c} + (-1)^i \sqrt{1-2d})^2}}. \quad (5.1.19)$$

Положим $k_i = 1 + \theta_i$, если $\operatorname{Re} \theta_i > 0$, и $k_i = 1 - \theta_i$, если $\operatorname{Re} \theta_i < 0$.

Случай 2. $\operatorname{Re} \theta_i \neq 0$, $\theta_i \notin \mathbb{Z}$. Имеем семейство степенных разложений решений

$$\mathcal{J}_i: \quad y = 1 + c_{1i}(1-x) + \sum_s c_{si}(1-x)^s, \quad (5.1.20)$$

где $s \in \{1 + l + mk_i; l, m \geq 0; l + m > 0; l, m \in \mathbb{Z}\}$, комплексные коэффициенты таковы: c_{1i} определен формулой (5.1.18), $c_{k_i i}$ — произвольный, остальные c_{si} постоянны и однозначно определены.

Второе приближение разложения решения (5.1.20) зависит от расположения числа $\operatorname{Re} k_i$. Если $\operatorname{Re} k_i > 2$, тогда второе приближение решения имеет вид $y = 1 + c_{1i}(1-x) + c_{2i}(1-x)^2$, что аналогично случаю $\operatorname{Re} \theta_i = 0$. Если $1 < \operatorname{Re} k_i < 2$, то второе приближение решения будет иметь вид $y = 1 + c_{1i}(1-x) + c_{k_i i}(1-x)^{k_i}$, где коэффициент $c_{k_i i}$ — произвольный. Если $\operatorname{Re} k_i = 2$, то второе приближение решения будет иметь вид $y = 1 + c_{1i}(1-x) + c_{2i}(1-x)^2 + c_{k_i i}(1-x)^{k_i}$, где коэффициенты: $c_{k_i i}$ — произвольный, c_{2i} определен формулой (5.1.19).

Случай 3. $\operatorname{Re} \theta_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Имеем семейство степенно-логарифмических разложений решений

$$\mathcal{J}_i: \quad y = 1 + c_{1i}(1-x) + \sum_{s=2}^{\infty} c_{si}(\ln(1-x))(1-x)^s, \quad (5.1.21)$$

где комплексные коэффициенты таковы: c_{1i} определен формулой (5.1.18), $c_{k_i i} = \alpha_{k_i i} + \beta_{k_i i} \ln(1-x)$, где $\alpha_{k_i i}$ — произвольная постоянная, остальные c_{si} и $\beta_{k_i i}$ постоянны и однозначно определены.

Второе приближение разложения решения (5.1.21) зависит от расположения числа k_i . Если $k_i = 2$, тогда второе приближение решения имеет вид $y = 1 + c_{1i}(1-x) + c_{2i}(1-x)^2$, где коэффициент

$$c_{2i} = \alpha_{2i} + (-1)^i \sqrt{\frac{1-2d}{2c}} \frac{2(a+b) + 1 - (\sqrt{2c} + (-1)^i \sqrt{1-2d})^2}{4} \ln(1-x), \quad (5.1.22)$$

где α_{2i} — произвольная постоянная.

Здесь имеем семейство сложных разложений

$$\mathcal{J}_3: \quad y = 1 + \varphi_1(1-x) + \sum_{\sigma=2}^{\infty} \varphi_{\sigma}(1-x)^{\sigma}, \quad (5.1.23)$$

где

$$\varphi_1 = -\frac{1-2c-2d}{4} \ln^2(1-x) + c_1 \ln(1-x) + \sum_{s=0}^{\infty} c_{-s} \ln^{-s}(1-x), \quad (5.1.24)$$

комплексные коэффициенты таковы: c_1 — произвольная постоянная, остальные c_{-s} постоянны и однозначно определены; φ_{σ} — ряды по убывающим степеням логарифмов.

1.6. Разложения решений при $-c = d - 1/2 \neq 0$. Имеем два семейства сложных разложений

$$\mathcal{J}_{3+j}: \quad y = 1 + \varphi_{1j}(1-x) + \sum_{\sigma=2}^{\infty} \varphi_{\sigma j}(1-x)^{\sigma}, \quad (5.1.25)$$

где

$$\varphi_{1j} = (-1)^j \sqrt{2c} \ln(1-x) + c_{0j} + \sum_{s=1}^{\infty} c_{-sj} \ln^{-s}(1-x), \quad j = 1, 2, \quad (5.1.26)$$

комплексные коэффициенты таковы: c_{0j} — произвольная постоянная, остальные c_{-sj} постоянны и однозначно определены; $\varphi_{\sigma j}$ — ряды по убывающим степеням логарифмов.

Семейства разложений \mathcal{J}_2 , \mathcal{J}_2^τ сохраняются из случая $c \neq 1/2 - d \neq 0$. В качестве θ_2 берем $2\sqrt{2c}$ с $\operatorname{Re} \theta_2 \geq 0$. В зависимости от его значения возможны три случая. А именно: случай 1 ($\operatorname{Re} \theta_2 = 0$, однопараметрические семейства экзотических разложений \mathcal{J}_2^τ определяются формулой (5.1.17)), случай 2 ($\operatorname{Re} \theta_2 \neq 0$, $\theta_2 \notin \mathbb{Z}$, однопараметрическое семейство степенных разложений \mathcal{J}_2 определяется формулой (5.1.20)), случай 3 ($\theta_2 \notin \mathbb{Z}$, однопараметрическое семейство степенно-логарифмических разложений \mathcal{J}_2 определяется формулой (5.1.21)).

1.7. Разложения решений при $d = 1/2$. Имеем одно семейство степенных разложений

$$\mathcal{J}_6: \quad y = x + c_\rho(1-x)^\rho + \sum_s c_s(1-x)^s, \quad (5.1.27)$$

где $c_\rho \neq 0$, c_ρ — произвольная постоянная, $\rho = 1 + \sqrt{2c}$, $\operatorname{Re} \sqrt{2c} > 0$, s пробегает множество $\{\rho + l(\rho - 1) + m; l, m \geq 0; l + m > 0; l, m \in \mathbb{Z}\}$, остальные комплексные коэффициенты c_s постоянны и однозначно определены.

В случае $\operatorname{Re} \rho > 2$ третье приближение разложения (5.1.27) имеет вид $y = x + c_\rho(1-x)^\rho + c_{\rho+1}(1-x)^{\rho+1}$. Коэффициент

$$c_{\rho+1} = -c_\rho \frac{-2c + 2a + 2b + 1}{2\rho}. \quad (5.1.28)$$

В случае $1 < \operatorname{Re} \rho < 2$ третье приближение разложения (5.1.27) имеет вид $y = x + c_\rho(1-x)^\rho + c_{2\rho-1}(1-x)^{2\rho-1}$. Коэффициент

$$c_{2\rho-1} = c_\rho^2. \quad (5.1.29)$$

В случае $\operatorname{Re} \rho = 2$, $\operatorname{Im} \rho \neq 0$ третье приближение разложения (5.1.27) имеет вид $y = x + c_\rho(1-x)^\rho + c_{\rho+1}(1-x)^{\rho+1} + c_{2\rho-1}(1-x)^{2\rho-1}$, где коэффициенты $c_{\rho+1}$ и $c_{2\rho-1}$ определены формулами (5.1.28) и (5.1.29) соответственно. В случае $\rho = 2$ третье приближение разложения (5.1.27) имеет вид $y = x + c_2(1-x)^2 + c_3(1-x)^3$. Коэффициенты: c_2 — ненулевая произвольная постоянная, $c_3 = -c_2(-2c + 2a + 2b + 1 - 4c_2)/4$ есть сумма выражений (5.1.28) и (5.1.29).

Имеем два однопараметрических семейства экзотических разложений

$$\mathcal{J}_6^\tau: \quad y = x + c_\rho(1-x)^\rho + \sum_s c_s(1-x)^s, \quad (5.1.30)$$

где $\rho = 1 \pm \sqrt{2c}$, $\operatorname{Re} \rho = 1$, s пробегает множество $\{\rho + l(\rho - 1) + m; l, m \geq 0; l + m > 0; l, m \in \mathbb{Z}\}$, $\tau = \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} \rho)$, комплексные коэффициенты: c_ρ — ненулевая произвольная постоянная, все c_s постоянны и однозначно определены.

Исключительное решение согласно теореме (2.1.4):

$$\mathcal{I}_3: \quad y = x.$$

Также имеется однопараметрическое семейство сложных разложений \mathcal{J}_3 , которое определяется формулами (5.1.22), (5.1.24).

§ 2. Разложения вблизи единицы при $a \cdot c = 0$

Здесь в случае $x \rightarrow 1$ и $a = 0, c \neq 0$ из случая $a \cdot c \neq 0$ сохраняются семейства $\mathcal{A}_1, \mathcal{J}_i, i = 1, \dots, 6, \mathcal{J}_0, \mathcal{J}_1^\tau, \mathcal{J}_2^\tau$ и $\mathcal{J}_6^\tau, \tau = \pm 1$ и \mathcal{E}_3 . В случае $a \neq 0, c = 0$ из случая $a \cdot c \neq 0$ сохраняются семейства $\mathcal{A}_1, \mathcal{E}_i, i = 1, \dots, 6, \mathcal{E}_0^\tau, \mathcal{E}_1^\tau, \mathcal{E}_2^\tau, \mathcal{E}_6^\tau$ и \mathcal{J}_3 .

2.1. Семейства разложений вблизи единицы, симметричные семействам $\mathcal{C}_0^\infty, \mathcal{B}_7^\tau, \mathcal{B}_{8,9}, \mathcal{C}_0^0, \mathcal{H}_7, \mathcal{H}_{8,9}$. При $a = 0$ имеем однопараметрическое семейство разложений решений

$$\mathcal{C}_1^\infty : y = 1 + c_r(1-x)^r + \sum_s c_s(1-x)^s, \quad (5.2.1)$$

где $r = \sqrt{-2b}$ удовлетворяет условию $\operatorname{Re} \sqrt{-2b} < 0, s \in \{r - lr + m, l, m \geq 0, l + m > 0, l, m \in \mathbb{Z}\}$, комплексные коэффициенты: c_r — ненулевая произвольная постоянная, c_s постоянны и однозначно определены.

Если $-1 \leq \operatorname{Re} \sqrt{-2b}$, второе приближение решения имеет вид $y = 1 + c_r(1-x)^r + c_{r+1}(1-x)^{r+1}$, где

$$c_{r+1} = \frac{c_r(c+d-b-r)}{r-1}.$$

Если $0 > \operatorname{Re} \sqrt{-2b} > -1$, то третье приближение решения есть $y = 1 + c_r(1-x)^r + c_0$, где $c_0 = 0$.

При $a = 0$ имеем два двухпараметрических семейства экзотических разложений решений

$$\mathcal{E}_7^\tau : y = 1 + c_r(1-x)^r + \sum_s c_s(1-x)^s, \quad (5.2.2)$$

где r — произвольная чисто мнимая постоянная, $r \neq \sqrt{-2b}, \tau = \operatorname{sgn} \operatorname{Im} r, s$ пробегает множество $\{r + lr + m(1-r); l, m \geq 0; l + m > 0; l, m \in \mathbb{Z}\}$; комплексные коэффициенты: c_r — ненулевая произвольная постоянная, c_s постоянны и однозначно определены.

При $a = 0, b > 0$ имеем два однопараметрических семейства разложений решений

$$\mathcal{E}_{8,9} : y = 1 + c_r(1-x)^r + \sum_s c_s(1-x)^s, \quad (5.2.3)$$

где $r = \sqrt{-2b}, \operatorname{Re} r = 0, \operatorname{Im} r > 0$ для семейства \mathcal{E}_8 и $\operatorname{Im} r < 0$ для семейства \mathcal{E}_9 , показатель степени s пробегает множество $\{r + l(1-r) + m; l, m \geq 0; l + m > 0; l, m \in \mathbb{Z}\}$; комплексные коэффициенты: c_r — ненулевая произвольная постоянная, c_s постоянны и однозначно определены.

При $c = 0$ имеем разложения решений

$$\mathcal{C}_1^1 : y = 1 + c_r(1-x)^r + \sum_s c_s(1-x)^s, \quad (5.2.4)$$

где $r = 1 + \sqrt{1 - 2d}$ удовлетворяет условию $\operatorname{Re} \sqrt{1 - 2d} > 0$, $s \in \{r + l(r - 1) + m; l, m > 0; l + m \geq 0; l, m \in \mathbb{Z}\}$, комплексные коэффициенты: c_r — ненулевая произвольная постоянная, c_s постоянны и однозначно определены.

В случае $\operatorname{Re} \sqrt{1 - 2d} \geq 1$ третье приближение решения $y = 1 + c_r(1 - x)^r + c_{2r-1}(1 - x)^{r+1}$, $c_{r+1} = c_r(a + b - d + r)/r$; в случае $0 < \operatorname{Re} \sqrt{1 - 2d} < 1$ третье приближение решения $y = 1 + c_r(1 - x)^r + c_{2r-1}(1 - x)^{2r-1}$, $c_{2r-1} = 0$.

При $c = 0$ имеем одно двухпараметрическое семейство полуэкзотических разложений решений

$$\mathcal{J}_7: \quad y = 1 + c_r(1 - x)^r + c_1(1 - x) + c_r(1 - x)^{2-r} + \sum_s c_s(1 - x)^s, \quad (5.2.5)$$

где $r - 1$ — произвольная чисто мнимая постоянная, $r \neq 1$, $r \neq \sqrt{2a}$, s пробегает множество $\{l + k(r - 1); l \geq 2; |k| \leq l; l, k \in \mathbb{Z}\}$; комплексные коэффициенты: c_r — ненулевая произвольная постоянная, c_s постоянны и однозначно определены.

При $c = 0$, $d > 1/2$ имеем два однопараметрических семейства разложений решений

$$\mathcal{J}_{8,9}: \quad y = 1 + c_r(1 - x)^r + \sum_s c_s(1 - x)^s, \quad (5.2.6)$$

где $r = 1 + \sqrt{1 - 2d}$ удовлетворяет условию $\operatorname{Re} r = 1$, $\operatorname{Im} r < 0$ для семейства \mathcal{J}_8 , $\operatorname{Im} r > 0$ для семейства \mathcal{J}_9 , показатель степени s пробегает множество $\{r + l(1 - r) + m; l, m \geq 0; l + m > 0; l, m \in \mathbb{Z}\}$; комплексные коэффициенты: c_r — ненулевая произвольная постоянная, c_s постоянны и однозначно определены.

2.2. Разложения решений при $a = b = 0$, $c \neq 0$. Имеем однопараметрическое семейство разложений

$$\mathcal{E}_{10}: \quad y = c_0 + \sum_{s=1}^{\infty} c_s(1 - x)^s, \quad (5.2.7)$$

где комплексный коэффициент $c_0 \neq 0, 1$ — произвольная постоянная, остальные комплексные коэффициенты c_s — постоянные и однозначно определенные.

Третье приближение решения уравнения есть $y = 1 + c_0 + c_1(1 - x)$, где

$$c_1 = -c_0(c + d). \quad (5.2.8)$$

2.3. Разложения решений при $a \neq 0$, $c = 0$, $d = 1/2$. Имеем однопараметрическое семейство разложений

$$\mathcal{J}_{10}: \quad y = 1 + c_1(1 - x) + \sum_{s=2}^{\infty} c_s(1 - x)^s, \quad (5.2.9)$$

где c_1 — комплексная произвольная постоянная, $c_1 \neq 0, 1$, $c_2 = -c_1(c_1 + 1)(1 + 2a + 2b)$, остальные c_s — однозначно определенные комплексные постоянные.

2.4. Разложения решений при $a = c = 0$. В этом случае при $x \rightarrow 1$ уравнение (2.1.1) имеет 14 семейств разложений решений. Из них 3 семейства \mathcal{A}_1 , \mathcal{E}_3 и \mathcal{J}_3 сохраняются из случая $a \cdot c \neq 0$. Еще 11 семейств \mathcal{C}_1^∞ , $\mathcal{E}_8 - \mathcal{E}_{10}$, \mathcal{E}_7^* , \mathcal{C}_1^1 , $\mathcal{J}_8 - \mathcal{J}_{10}$, \mathcal{J}_7 сохраняются из случаев $a = 0$, $c \neq 0$ и $a \neq 0$, $c = 0$.

§ 3. Сводка результатов

Теорема 5.3.1. При $x \rightarrow 1$ уравнение (2.1.1) имеет 21 семейство разложений решений типов 1–3:

$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_0^\circ$, которое определяется формулой (5.1.1) и имеет 2 параметра;

$\mathcal{E}_1 = \mathcal{B}_1^\circ$, которое существует при $a \neq -b \neq 0$, определяется формулами (5.1.5), (5.1.8), (5.1.9) и имеет 1 или 0 параметров;

$\mathcal{E}_2 = \mathcal{B}_2^\circ$, которое существует при $b \neq 0$, определяется формулами (5.1.5), (5.1.8), (5.1.9) и имеет 1 или 0 параметров;

$\mathcal{E}_3 = \mathcal{B}_3^\circ$, которое существует при $a \neq -b$, определяется формулой (5.1.11) и имеет 1 параметр;

$\mathcal{E}_4 = \mathcal{B}_4^\circ$ и $\mathcal{E}_5 = \mathcal{B}_5^\circ$, которые существуют при $a = -b \neq 0$, определяются формулой (5.1.12) и имеют 1 параметр;

$\mathcal{E}_6 = \mathcal{B}_6^\circ$, которое существует при $b = 0$, определяется формулой (5.1.13) и имеет 1 параметр.

$\mathcal{C}_1^\infty = \mathcal{C}_0^{\infty\circ}$, которое существует при $a = 0$, определяется формулой (5.2.1) и имеет 1 параметр.

$\mathcal{E}_8 = \mathcal{B}_8^\circ$ и $\mathcal{E}_9 = \mathcal{B}_9^\circ$, которые существуют при $b > 0$, $a = 0$, определяются формулой (5.2.3) и имеют 1 параметр;

$\mathcal{E}_{10} = \mathcal{B}_{10}^\circ$, которое существует при $a = b = 0$, определяется формулой (5.2.7) и имеет 1 параметр;

$\mathcal{J}_1 = \mathcal{H}_1^\circ$, которое существует при $a \neq -d + 1/2 \neq 0$, определяется формулами (5.1.17), (5.1.20), (5.1.21) и имеет 1 или 0 параметров;

$\mathcal{J}_2 = \mathcal{H}_2^\circ$, которое существует при $d \neq 1/2$, определяется формулами (5.1.17), (5.1.20), (5.1.21) и имеет 1 или 0 параметров;

$\mathcal{J}_3 = \mathcal{H}_3^\circ$, которое существует при $a \neq -d + 1/2 \neq 0$, определяется формулой (5.1.23) и имеет 1 параметр;

$\mathcal{J}_4 = \mathcal{H}_4^\circ$ и $\mathcal{J}_5 = \mathcal{H}_5^\circ$, которые существуют при $a = -d + 1/2 \neq 0$, определяются формулой (5.1.25) и имеют 1 параметр;

$\mathcal{J}_6 = \mathcal{H}_6^\circ$, которое существует при $d = 1/2$, определяется формулой (5.1.27) и имеет 1 параметр;

$\mathcal{C}_1^1 = \mathcal{C}_0^{0\circ}$, которое существует при $c = 0$, определяется формулой (5.2.4) и имеет 1 параметр;

$\mathcal{J}_8 = \mathcal{H}_8^\circ$ и $\mathcal{J}_9 = \mathcal{H}_9^\circ$, которые существуют при $c = 0$, $d > 1/2$, определяются формулой (5.2.6) и имеют 1 параметр;

$\mathcal{J}_{10} = \mathcal{H}_{10}^\circ$, которое существует при $c = 0$, $d = 1/2$, определяется формулой (5.2.9) и имеет 1 параметр;

два семейства полужзотических разложений:

$\mathcal{J}_0 = \mathcal{H}_0^\circ$, которое определяется формулой (5.1.4) и имеет 2 параметра;

$\mathcal{J}_7 = \mathcal{H}_7^\circ$, которое существует при $c = 0$, определяется формулой (5.2.5) и имеет 2 параметра;

и 8 пар семейств экзотических разложений решений с $\tau = \pm 1$:

$\mathcal{E}_0^\tau = \mathcal{B}_0^{\tau^\circ}$, которые определяются формулой (5.1.4) и имеют 2 параметра;

$\mathcal{E}_1^\tau = \mathcal{B}_1^{\tau^\circ}$, которые существуют при $a \neq -b \neq 0$, $\operatorname{Re}(\sqrt{2a} - \sqrt{-2b}) = 0$, определяются формулой (5.1.5) и имеют 1 параметр;

$\mathcal{E}_2^\tau = \mathcal{B}_2^{\tau^\circ}$, которые существуют при $a \neq 0$, $-b \neq 0$, $\operatorname{Re}(\sqrt{2a} + \sqrt{-2b}) = 0$, определяются формулой (5.1.5) и имеют 1 параметр;

$\mathcal{E}_6^\tau = \mathcal{B}_6^{\tau^\circ}$, которые существуют при $\operatorname{Re} \sqrt{2a} = 0$, $b = 0$, определяются формулой (5.1.16) и имеют 1 параметр;

$\mathcal{E}_7^\tau = \mathcal{B}_7^{\tau^\circ}$, которые существуют при $a = 0$, определяются формулой (5.2.2) и имеют 2 параметра;

$\mathcal{J}_1^\tau = \mathcal{H}_1^{\tau^\circ}$, которые существуют при $-c \neq d - 1/2 \neq 0$, $\operatorname{Re}(\sqrt{1-2d} - \sqrt{2c}) = 0$, определяются формулой (5.1.17) и имеют 1 параметр;

$\mathcal{J}_2^\tau = \mathcal{H}_2^{\tau^\circ}$, которые существуют при $c \neq 0$, $d \neq 1/2$, $\operatorname{Re}(\sqrt{1-2d} + \sqrt{2c}) = 0$, определяются формулой (5.1.17) и имеют 1 параметр;

$\mathcal{J}_6^\tau = \mathcal{H}_6^{\tau^\circ}$, которые существуют при $\operatorname{Re} \sqrt{2c} = 0$, $d = 1/2$, определяются формулой (5.1.30) и имеют 1 параметр.

$\mathcal{A}_0^\circ, \mathcal{B}_i^\circ$ и \mathcal{H}_i° означают семейства, полученные из семейств $\mathcal{A}_0, \mathcal{B}_i$ и \mathcal{H}_i симметрией (2.1.9). Семейства $\mathcal{A}_1, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_8\text{--}\mathcal{E}_{10}, \mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_6, \mathcal{J}_8\text{--}\mathcal{J}_{10}$ — типов 1 и 2, $\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_4, \mathcal{E}_5, \mathcal{J}_3, \mathcal{J}_4, \mathcal{J}_5$ — сложные.

Литература

1. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи рассеяния / Пер. с англ. М.: Мир, 1987.
2. Брюно А. Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979.
3. Брюно А. Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Физматлит, 1998.
4. Брюно А. Д. Степенные разложения решений одного алгебраического или дифференциального уравнения // ДАН. 2001. Т. 380. № 2. С. 155–159.
5. Брюно А. Д. Степенные асимптотики решений обыкновенного дифференциального уравнения // ДАН. 2003. Т. 392. № 3. С. 295–300.
6. Брюно А. Д. Степенно-логарифмические разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // ДАН. 2003. Т. 392. № 4. С. 439–444.
7. Брюно А. Д. Нестепенные асимптотики решений обыкновенного дифференциального уравнения // ДАН. 2003. Т. 392. № 5. С. 586–591.
8. Брюно А. Д. Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // УМН. 2004. Т. 59. № 3. С. 31–80.
9. Брюно А. Д. Сложные разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // ДАН. 2006. Т. 406. № 6. С. 730–733.
10. Брюно А. Д. Экзотические разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // ДАН. 2007. Т. 416. № 6. С. 583–587.
11. Брюно А. Д. Об экзотических разложениях решений обыкновенного дифференциального уравнения. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша. 2010. № 28. 27 с.
12. Брюно А. Д., Горючкина И. В. Разложения решений шестого уравнения Пенлеве // ДАН. 2004. Т. 395. № 6. С. 733–737.

13. Брюно А. Д., Горючкина И. В. Разложения решений шестого уравнения Пенлеве в окрестности неособой точки. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша. 2005. № 4. 19 с.
14. Брюно А. Д., Горючкина И. В. Разложения решений шестого уравнения Пенлеве в случаях $a = 0$ и $b = 0$ // ДАН. 2006. Т. 410. № 3. С. 331–334.
15. Брюно А. Д., Горючкина И. В. Все асимптотические разложения решений шестого уравнения Пенлеве // ДАН. 2007. Т. 417. № 3. С. 298–302.
16. Брюно А. Д., Горючкина И. В. Обзор всех асимптотических разложений решений уравнения Р6. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша. 2007. № 60. 16 с.
17. Брюно А. Д., Горючкина И. В. Методы изучения асимптотических разложений решений уравнения Р6. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша. 2007. № 61. 30 с.
18. Брюно А. Д., Горючкина И. В. Все базовые асимптотические разложения решений уравнения Р6 в случае $a \cdot b \neq 0$. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша. 2007. № 62. 30 с.
19. Брюно А. Д., Горючкина И. В. Все асимптотические разложения решений уравнения Р6 в случае $a \cdot b = 0$. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша. 2007. № 70. 30 с.
20. Брюно А. Д., Горючкина И. В. Все асимптотические разложения решений уравнения Р6, полученные из базовых. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша. 2007. № 77. 28 с.
21. Брюно А. Д., Горючкина И. В. Асимптотики Бутру решений уравнений Пенлеве и степенная геометрия // ДАН. 2008. Т. 422. № 2. С. 157–160.
22. Брюно А. Д., Горючкина И. В. Асимптотики решений третьего уравнения Пенлеве // ДАН. 2008. Т. 422. № 6. С. 729–732.
23. Брюно А. Д., Горючкина И. В. Асимптотики решений четвертого уравнения Пенлеве // ДАН. 2008. Т. 423. № 4. С. 443–448.
24. Брюно А. Д., Горючкина И. В. Все разложения решений шестого уравнения Пенлеве вблизи его неособой точки // ДАН. 2009. Т. 425. № 6. С. 727–732.
25. Брюно А. Д., Горючкина И. В. Базовые разложения решений шестого уравнения Пенлеве в случае общего положения // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 1. С. 19–33.
26. Брюно А. Д., Чухарева И. В. Степенные разложения решений шестого уравнения Пенлеве. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша. 2003. № 49.
27. Брюно А. Д., Шадрин Т. В. Осесимметричный пограничный слой на игле // Труды ММО. 2007. Т. 68. С. 224–287.
28. Горючкина И. В. Разложения решений шестого уравнения Пенлеве в степенные ряды по вещественным степеням x // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 401. № 6. С. 854.
29. Горючкина И. В. О степенных и логарифмических разложениях решений шестого уравнения Пенлеве в окрестностях особых точек // XXVI конференция молодых ученых механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова. Тезисы докладов. М., 2004. С. 39–40.
30. Горючкина И. В. О степенных и логарифмических разложениях решений шестого уравнения Пенлеве в окрестностях особых точек // Труды XXVI Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова. М.: Изд-во МГУ, 2004. С. 63–68.
31. Горючкина И. В. Степенные и логарифмические асимптотические разложения шестого уравнения Пенлеве // Современные методы теории краевых задач. Материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения–XV». Воронеж: ВГУ, 2004. С. 63–64.
32. Горючкина И. В. Разложения решений шестого уравнения Пенлеве вблизи особенностей // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Суздаль. 10–15 июля 2006 г. Тезисы докладов. Владимир: Собор, 2006. С. 75–77.

33. Горючкина И. В. Экзотические разложения решений шестого уравнения Пенлеве. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша. 2007. № 3. 29 с.
34. Гурса Э. Курс математического анализа. М.; Л.: ГТТИ, 1933. Т. 1. Ч. 1. 368 с.
35. Итс А. Р., Капаев А. А., Новокушенов В. Ю., Фокас А. С. Трансценденты Пенлеве. Метод задачи Римана. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005.
36. Ковалевская С. В. Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe // Acta mathematica. 1889. **12**. P. 177–232. Русский перевод: Задача о вращении твердого тела около неподвижной точки // Сборник «Движение твердого тела вокруг неподвижной точки» / Под ред. С. А. Чаплыгина и Н. И. Мерцалова. М.; Л.: АН СССР, 1940. С. 11–49.
37. Кудряшов Н. А. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.
38. Кузнецов А. Н. О существовании входящих в особую точку решений автономной системы, обладающей формальным решением // Функциональный анализ и его приложения. 1989. **23**. № 4. С. 63–74.
39. Розов Н. Х. Пенлеве уравнение // Математическая энциклопедия. М.: Советская энциклопедия, 1984. Т. 4. С. 233–234.
40. Тихомиров В. М. Фреше производная // Математическая энциклопедия. М.: Советская энциклопедия, 1985. Т. 5. С. 666.
41. Чухарева И. В. Характер особенностей решений VI уравнения Пенлеве // Тезисы докладов Международной молодежной конференции «Гагаринские чтения XXX». М., 2003. С. 72–73.
42. Ablovitz M. J., Ramani A., Segur H. A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type. I // J. Math. Phys. 1980. **21**. № 4. P. 715–721.
43. Ablovitz M. J., Ramani A., Segur H. A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type. II // J. Math. Phys. 1980. **21**. № 5. P. 1006–1015.
44. Bruno A. D. Power Geometry as a new calculus // Analysis and Applications / Eds. H. G. W. Begehr, Gilbert R. P. and M. W. Wong. Dordrecht: Kluwer, 2003. P. 51–71.
45. Chang Y. F., Greene J. M., Tabor M., Weiss J. The analytic structure of dynamical systems and self-similar natural boundaries // Physica D. 1983. **8**. P. 183–207.
46. Dubrovin B., Mazzocco M. Monodromy of certain Painlevé-VI transcendents and reflection groups // Invent. Math. 2000. **141**. P. 55–147.
47. Fuchs L. Über differentialgleichungen deren integrale feste verzweigungspunkte besitzen // Sitz. Acad. Wiss. Berlin, 1884. S. 669–720.
48. Fuchs R. Sur quelques equations differentielles lineaires du second ordres // C. r. Acad. sci. Paris. 1905. **141**. P. 555–558.
49. Gambier B. Sur les équations différentielles du second ordre et du premier degré dont l'intégrale générale est a points critiques fixes // Acta Math. 1910. **33**. P. 1–55.
50. Garnier R. Sur des équations différentielles du troisième ordre dont l'intégrale générale est uniforme et sur une classe d'équations nouvelles d'ordre supérieur dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes // Ann. Sci. De l'Ecole Normale Superieure. 1912. **29**. P. 1–126.
51. Garnier R. Etitude de l'intégrale générale de léquations VI de M. Painlevé // Ann. Ec. Norm. (3). 1917. **34**. P. 243–353.
52. Goruchkina I. V. About power-logarithmic expansions of solutions to the sixth Painlevé equation // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Суздаль. 5–10 июля 2004 г. Тезисы докладов. Владимир, 2004. С. 259–260.
53. Goruchkina I. V. Asymptotical expansions of solutions to the sixth Painlevé equation // ACA 2006. 12th. International Conference on Applications of Computer Algebra. Abstracts of Presentations. Sofia, 2006. P. 50.

54. *Gromak I. V., Laine I., Shimomura S.* Painlevé Differential Equations in the Complex Plain. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 2002.
55. *Guzzetti D.* On the critical behavior, the connection problem and elliptic representation of a Painlevé 6 equation // *Mathematical Physics, Analysis and Geometry*. 2001. **4**. P. 293–377.
56. *Guzzetti D.* The elliptic representation of the general Painlevé 6 equation // *Communications in Pure and Applied Mathematics*. 2002. **55**. P. 1280–1363.
57. *Guzzetti D.* The elliptic representation of the sixth Painlevé equation // *Séminaires and Congrès*. 2006. **14**. P. 39–57.
58. *Guzzetti D.* Matching procedure for the sixth Painlevé equation // *J. Phys. A.: Math. gen.* 2006. **39**. P. 11973–12031.
59. *Guzzetti D.* The logarithmic asymptotics of the sixth Painlevé equation // *Journal of Physics A.: Mathematical and Theoretical*. 2008. **41**. 205201 (46 p.).
60. *Iwasaki K., Kimura H., Shimomura S., Yoshida M.* From Gauss to Painlevé. A modern theory of special functions. Aspects of Mathematics E16. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn, 1991.
61. *Jimbo M.* Monodromy problem and the boundary condition for some Painlevé transcendents // *Publ. RIMS. Kyoto Univ.*, 1982. **18**. P. 1137–1161.
62. *Kimura H.* The construction of a general solution of a Hamiltonian system with the singularity and its application to Painlevé equation // *Ann. Mat. Pura Appl.* 1983. **134**. P. 363–392.
63. *Mazzocco M.* Picard and Chazy solutions to the Painlevé VI equation // *Math. Ann.* 2001. **321**. P. 157–195.
64. *Okamoto K.* Studies on the Painlevé equations, I. The sixth Painlevé equation P_{VI} // *Ann. Mat. Pura Appl.* 1987. **146**. P. 337–381.
65. *Painlevé P.* Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles, professées à Stockholm. Paris, 1897.
66. *Painlevé P.* Mémoire sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme // *Bull. Soc. Math. France*. 1900. **28**. P. 201–261.
67. *Painlevé P.* Sur les équations différentielles du second ordre et d'ordre supérieur, dont l'intégrale générale est uniforme // *Acta Math.* 1902. **25**. P. 1–86.
68. *Picard E.* Démonstration d'un théorème générale sur les fonctions uniformes liées par une relation algébrique // *Acta Math.* 1887. **11**. P. 1–12.
69. *Picard E.* Mémoire sur la Théorie des Fonctions Algébriques de deux Variables // *Journal de Liouville*. 1889. **5**. P. 135–319.
70. *Poincaré A.* Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires // *C. r. Acad. sci.* 1885. **101**. P. 939–941. *Oeuvres*. **IV**. 611–613.
71. *Poincaré A.* Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires // *C. r. Acad. sci.* 1885. **101**. P. 990–991. *Oeuvres*. **IV**. P. 614–615.
72. *Poincaré A.* Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires // *Acta Math.* 1886. **8**. 295–344. *Oeuvres*. **I**. P. 290–332.
73. *Shimomura S.* Painlevé transcendents in the neighbourhood of fix singular points // *Funkcial. Ekvac.* 1982. **25**. P. 163–184.
74. *Shimomura S.* Series expansions of Painlevé transcendents in the neighbourhood of fix singular point // *Funkcial. Ekvac.* 1982. **25**. P. 185–197.
75. *Shimomura S.* Supplement to «Series expansions of Painlevé transcendents in the neighbourhood of fix singular point» // *Funkcial. Ekvac.* 1982. **25**. P. 363–371.
76. *Shimomura S.* A family of solutions of a nonlinear ordinary differential equation and its application to Painlevé equations (III), (V), (VI) // *J. Math. Soc. Japan*. 1987. **39**. P. 649–662.

77. *Takano K.* Reduction for Painlevé equations at the fixed singular points of the first kind // Funkcial. Ekvac. 1986. **29**. P. 99–119.
78. *Watanabe H.* Birational canonical transformations and classical solutions of the sixth Painlevé equations // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 1999. **27**. P. 379–425.

Брюно А. Д.:

д-р. физ.-мат. наук, профессор, заведующий сектором
Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН
Россия, 125047, Москва, Миусская пл., 4
Тел.: (495)250–78–84 (раб.)
Факс: (499)972–07–37
E-mail: abruno@keldysh.ru

Горючкина И. В.:

канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник
Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН
Россия, 125047, Москва, Миусская пл., 4
Факс: (499)972–07–37
E-mail: chukhareva@yandex.ru