ОДУ: экзамен 6 июня 2013; первый поток

На экзамене не разрешается: пользоваться электронными приборами, конспектами, книгами и другими печатными или рукописными материалами; разговаривать и пользоваться помощью соседей.

Оценки: за ответ на каждый вопрос/задачу начисляются очки, максимальное количество очков указано в скобках перед вопросом/задачей; результаты оцениваются по системе 5 из 6, т. е учитываются очки, набранные за лучшие ответы на 5 групп вопросов (всего предлагается 6 групп, наихудший результат по одной из 6 групп вопросов отбрасывается); также учитываются очки, полученные в течение семестра за контрольные и домашние задания; 9–12 очков — «удовл.», 13–16 очков — «хор.», 17 очков и более — «отл.».

1. **(5)** Не используя теорему о непрерывной зависимости решения от параметра, докажите, что значение $\varphi(1,\mu)$ решения $x=\varphi(t,\mu)$ уравнения

$$\dot{x} = \cos x + t + \sqrt{|\mu|}$$

с начальным условием $\varphi(0,\mu)=0$ непрерывно по μ при $\mu=0$. (Указание: воспользуйтесь леммой Гронуолла и вспомните доказательство теоремы о непрерывной зависимости решения от параметра.)

2. **(3)** Найдите все особые точки системы

$$\begin{cases} \dot{x} &= y - x^2 + 2x \\ \dot{y} &= 2y(x-1) \end{cases},$$

исследуйте их на устойчивость, укажите их тип. При исследовании на устойчивость для каждой особой точки нужно указать (и обосновать!), является ли она: а) асимптотически устойчивой; б) устойчивой, но не асимптотически; в) неустойчивой.

(2) Нарисуйте фазовый портрет системы.

3. **(1)** Сформулировать эргодическую теорему Биркгофа–Хинчина.

(1) Привести пример неэргодического отображения отрезка в себя без неподвижных точек.

(3) Доказать, что произвольную всюду плотную последовательность из $[0,1]$ можно перенумеровать так, чтобы она стала равномерно распределенной.

4. **(2)** Пусть $g^t x$ — фазовый поток векторного поля $\dot{x} = \sqrt[3]{x}\sin^3 x$, на вещественной прямой. Найдите наибольшее k, при котором производная $\frac{\partial^k}{\partial x^k} g^t x$ непрерывна по (t, x) в окрестности точки $t = x = 0$. Ответ обосновать.

   (3) Найдите фазовый поток системы

$$\left\{ \begin{array}{rcr} \dot{x} & = & 4x - 2y - 2z \\ \dot{y} & = & x + 2y - 9z \\ \dot{z} & = & -2z \end{array} \right. .$$

5. **(5)** Найдите производную $\frac{\partial y}{\partial \mu}$ по параметру μ при $\mu = 0$ решения системы

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & e^{4x} - \sin 2y - 2\ln z - 1 + \mu z e^{3t} \\ \dot{y} & = & x + xy + 2y - 3z^3 + 3 \\ \dot{z} & = & 1/z^2 - \cos y \end{array} \right.$$

   с начальными условиями $x(0) = \mu^3$, $y(0) = \operatorname{tg}\mu$, $z(0) = 1 + \mu^2$.

6. **(3)** Найдите площадь образа множества $|x| + |y| \leqslant 1$ при действии оператора монодромии системы

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & x\sin^2 t + y\cos^2 t \\ \dot{y} & = & x\sin t + y\cos t \end{array} \right. .$$

   (2) Имеются ли у этой системы устойчивые решения? Ответ обосновать.