

ОДУ: экзамен 27 июня 2013; первый поток; часть I

На экзамене не разрешается: пользоваться электронными приборами, конспектами, книгами и другими печатными или рукописными материалами; разговаривать и пользоваться помощью соседей.

Оценки: за ответ на каждый вопрос/задачу начисляются очки, максимальное количество очков указано в скобках перед вопросом/задачей; результаты оцениваются по системе 5 из 6, т.е. учитываются очки, набранные за лучшие ответы на 5 групп вопросов (всего предлагается 6 групп, наихудший результат по одной из 6 групп вопросов отбрасывается); также учитываются очки, полученные в течение семестра за контрольные и домашние задания; 9–12 очков — «удовл.», 13–16 очков — «хор.», 17 очков и более — «отл.».

1. (1) Какое решение неявного дифференциального уравнения называется особым? Привести пример особого решения.
- (1) Доказать лемму об эквивалентности дифференциального уравнения в нормальной форме интегральному уравнению.
- (3) Сколько решений имеет задача $(1 - a^2)(ay''' - y'') = ay' + y^2$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 4$ в зависимости от параметра a ?
2. (3) Найдите все особые точки системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x^2 - 5x + 4y \end{cases} ,$$

исследуйте их на устойчивость, укажите их тип. При исследовании на устойчивость для каждой особой точки нужно указать (и обосновать!), является ли она: а) асимптотически устойчивой; б) устойчивой, но не асимптотически; в) неустойчивой.

- (2) Нарисуйте фазовый портрет системы.
3. (1) Найти общее решение $u(x, y)$ уравнения в частных производных

$$y \frac{\partial u}{\partial x} + (x^2 - 5x) \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

- (4) Найдите производную $\frac{\partial x}{\partial \mu}$ по параметру μ при $\mu = 0$ решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x^2 - 5x + 4y \end{cases} ,$$

с начальными условиями $x(0) = 5 + \mu$, $y(0) = -\sin \mu$.

ОДУ: экзамен 27 июня 2013; первый поток; часть II

4. (4) Найдите фазовый поток системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y - z \\ \dot{y} = -3y + 4z \\ \dot{z} = -y + z \end{cases} .$$

(1) Найдите объём образа единичного куба при действии этого фазового потока за время $t = 1$.

5. (1) Дайте определение устойчивого предельного цикла.

(4) Исследуйте на устойчивость предельный $x^2 + y^2 = 1$ цикл системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y + (2x + 3y)(x^2 + y^2 - 1) \\ \dot{y} = -x + (3x - y)(x^2 + y^2 - 1) \end{cases} .$$

6. (1) Пусть на отрезке $[a, b]$ непрерывная функция $q(t)$ обладает свойством $0 < m^2 \leq q(t) \leq M^2$. Оценить сверху и снизу расстояние между нулями произвольного решения уравнения $y'' + q(t)y = 0$.

(1) Заменой аргумента свести уравнение $a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0$ к виду $y'' + q(t)y = 0$.

(3) Пусть $q(t) > 0$ — непрерывная неубывающая функция. Доказать, что расстояние между нулями решения уравнения $y'' + q(t)y = 0$ не возрастает. Что будет происходить с расстоянием между нулями в случае когда существует предел $\lim_{t \rightarrow +\infty} q(t)$?