

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА ИГЛЕ*

А. Д. БРЮНО, Т. В. ШАДРИНА

в сноске:
грант?

Методами степенной геометрии изучается пограничный слой на полубесконечной игле в стационарном потоке вязкой жидкости или газа, направленном параллельно игле. Ищутся асимптотики течения в пограничном слое при стремлении к бесконечности вдоль иглы. Рассматриваются два варианта течения: (а) несжимаемой нетеплопроводной жидкости и (б) сжимаемого теплопроводного газа. Показывается, что вариант (а) не имеет асимптотик решений, удовлетворяющих всем граничным условиям, а вариант (б) имеет несколько семейств асимптотик решений, удовлетворяющих всем граничным условиям. Эти асимптотики вблизи иглы имеют степенные или логарифмические особенности.

Оглавление

Введение

Глава I

§ 1. Пространственная степенная геометрия

§ 2. Плоская степенная геометрия

Глава II

§ 1. Преобразование системы уравнений Навье—Стокса

§ 2. Первые приближения решения в бесконечности

§ 3. Однослойные автомодельные асимптотики решения

§ 4. Однослойные неавтомодельные асимптотики

§ 5. Двуслойные автомодельные асимптотики

§ 6. Двуслойные неавтомодельные асимптотики

Глава III

§ 1. Система уравнений в частных производных

§ 2. Система ОДУ

§ 3. Решения основного уравнения вблизи нуля

§ 4. Решения основного уравнения вблизи бесконечности

§ 5. Решения основного уравнения вблизи точки $\xi^0 > 0$

§ 6. Решения основного уравнения, удовлетворяющие обоим граничным условиям

§ 7. Возвращение к исходной задаче

Заключение

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 05-01-00050.

Введение

Примерно 100 лет назад Прандтль [1] и Блазиус [2] создали теорию погранслоя на полубесконечной пластине в стационарном потоке вязкой несжимаемой жидкости. Впоследствии оказалось, что решение Блазиуса применимо также к толстым пластинам с закругленной передней кромкой, к заостренным пластинам и к конечной пластине (кроме обеих ее кромок). Гольдштейном [3] (1933) было рассмотрено течение за пластиной, эти результаты позднее уточнил Стюартсон [4] (1957). В 1970 г. Ван де Воореном и Дикстрой [5] был изучен погранслоем на всей длине пластины, в том числе вблизи передней кромки. Маклахлан [6] (1991) построил математическую модель обтекания тонкой конечной пластины, в которой погранслоем является трехслойным.

Также во многих работах изучался погранслоем при осесимметричном обтекании цилиндра. В начальной части цилиндра, где толщина слоя мала по сравнению с радиусом, влиянием поперечной кривизны можно пренебречь. Тогда погранслоем ничем не отличается от погранслоя на пластине и описывается решением Блазиуса. Чем ближе к носику цилиндра, тем менее точное приближение дает решение Блазиуса. Себан и Бонд [7] (1951) и чуть позднее Келли [8] (1954) получили решение, продолжающее решение Блазиуса при приближении к носику цилиндра. Для изучения погранслоя при удалении от начала цилиндра сперва использовался метод лорда Рэлея [9] (1911), который давал грубое приближение. Полученные этим методом решения давали качественное описание погранслоя, но не количественное. Польхаузен [10] (1921) был предложен метод, с помощью которого Глауэрт и Лайтхилл [11] (1955) дали приближенное решение задачи обтекания длинного тонкого цилиндра, справедливое при любых значениях величины $\nu x/u_\infty a^2$ (где ν — динамический коэффициент вязкости, u_∞ — скорость внешнего потока, a — радиус цилиндра, независимая переменная x направлена вдоль цилиндра). И, кроме того, они нашли асимптотическое решение, соответствующее большим значениям этого параметра. Тогда же Стюартсон [12] изучил более общий случай погранслоя на длинном тонком цилиндре, когда скорость внешнего потока задается степенной функцией $u_\infty = cx^m$.

Однако, полученные на цилиндре результаты не дают предела при стремлении радиуса цилиндра к нулю. И до настоящего времени теория погранслоя на полубесконечной игле не была создана.

Степенная геометрия, которая используется в данной работе, была разработана А. Д. Брюно как универсальный набор алгоритмов для анализа сингулярностей, пригодный для всех типов уравнений. Уравнения могут быть алгебраическими, обыкновенными дифференциальными и в частных производных, системы могут состоять из уравнений одного типа или содержать уравнения разных типов. В [13, гл. VI, § 6] с помощью степенной геометрии изучено обтекание полубесконечной пластины стационарным потоком вязкой несжимаемой жидкости и получено решение Блазиуса. При этом впервые было дано чисто математическое обоснование теории погранслоя на пластине, не использующее какие-либо механические или физические соображения.

В этой работе рассматривается стационарный осесимметричный поток вязкой жидкости или газа, набегающий на полубесконечную иглу (рис. 1), для двух вариантов: (а) несжимаемой жидкости и (б) сжимаемого теплопроводного газа. Такой поток описывается системой уравнений Навье—Стокса, которая сводится к системе уравнений в частных производных для двух независимых переменных: x — вдоль оси симметрии и r — расстояние от оси x ; зависимые переменные в варианте (а):

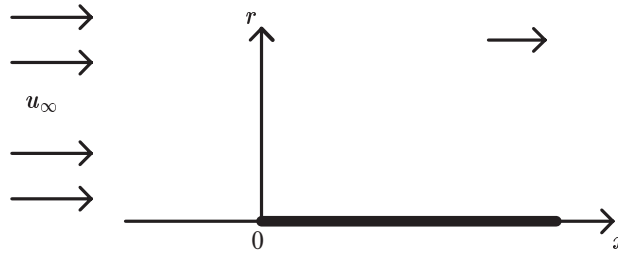


Рис. 1. Схема осесимметричного обтекания иглы

функция тока ψ и давление p . В случае обтекания иглы вязким сжимаемым теплопроводным газом добавляется еще одна зависимая переменная. Вместо давления p используются две зависимые переменные: h — энтальпия (аналог температуры) и ρ — плотность. В обоих вариантах игла задается как $x \geq 0, r = 0$.

Цель работы — найти при $x \rightarrow +\infty$ асимптотики решений для зависимых переменных, удовлетворяющие всем граничным условиям (если такие решения существуют).

Для этого используются методы степенной геометрии. Из полной системы методами пространственной степенной геометрии выделяется укороченная система, которая является первым приближением полной системы при $x \rightarrow +\infty$. И, кроме того, решения этой укороченной системы удовлетворяют граничным условиям в бесконечности. После этого, методами плоской степенной геометрии анализируется полученная укороченная система, которая в ряде случаев сводится к одному уравнению. В случае обтекания иглы вязким сжимаемым теплопроводным газом, после получения асимптотик решений вблизи иглы и на внешней границе погранслоя, решения укороченной системы просчитываются численно методом Рунге—Кутты.

Работа содержит три главы. В первой главе описываются понятия и методы степенной геометрии, которые используются в главах II и III. Пространственная степенная геометрия, описанная в § 1 первой главы, позволяет выделить и упростить укороченную систему уравнений, решения которой дают сильные асимптотики для решений исходной системы. Плоская степенная геометрия, понятия и методы которой излагаются в § 2 первой главы, позволяет получать не только асимптотики решений, но и асимптотические разложения решений. В ряде случаев эти разложения сходятся и дают сами решения.

Во второй главе исследуется погранслоя при осесимметричном обтекании полубесконечной иглы вязкой несжимаемой жидкостью. В § 1 показано, что такое обтекание описывается системой двух уравнений в частных производных для функции тока ψ и давления p с двумя независимыми переменными: x — вдоль оси симметрии и r — расстояние от оси x . Игла задается как $x \geq 0, r = 0$. Граничные условия задаются в бесконечности

$$\psi = \frac{u_\infty r^2}{2}, \quad p = p_0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow -\infty, \quad u_\infty, p_0 = \text{const} \neq 0,$$

что можно заменить на

$$\psi = r^2, \quad p = p_0 \quad \text{при} \quad r \rightarrow +\infty, \quad p_0 = \text{const} \neq 0, \quad (1)$$

и на игле (условие прилипания)

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial r} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = 0 \quad \text{при} \quad x \geq 0, \quad r = 0. \quad (2)$$

В § 2, используя методы пространственной степенной геометрии, изложенные в § 1 первой главы, выделяется укороченная система уравнений, описывающая поток вблизи иглы при $x \rightarrow +\infty$. После введения автомодельных переменных

$$\xi = \frac{r^2}{x}, \quad h(\xi) = \frac{\psi}{x}, \quad p(\xi) = p \quad (3)$$

укороченная система переходит в систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений, которая сводится к одному обыкновенному дифференциальному уравнению для $h(\xi)$ третьего порядка. В § 3 асимптотический анализ его решений методами плоской степенной геометрии, которые изложены в § 2 первой главы, показывает, что это уравнение не имеет решений, удовлетворяющих граничным условиям прилипания на игле (2). В § 4 второй главы доказывается, что полученная укороченная система, соответствующая погранслою вблизи иглы при $x \rightarrow +\infty$, не имеет также неавтомодельных решений, удовлетворяющих граничному условию (2). Для этого делается замена переменных

$$x = x, \quad \xi = \frac{r^2}{x}, \quad h(x, \xi) = \frac{\psi}{x}, \quad p(x, \xi) = p,$$

т. е. в качестве независимых переменных берутся x и ξ . Полученная система сводится к одному дифференциальному уравнению в частных производных для $h(x, \xi)$, в котором x присутствует только в виде $\ln x$. При $\ln x \rightarrow +\infty$ первым приближением этого уравнения является уравнение, которое в точности совпадает с обыкновенным дифференциальным уравнением, полученным в автомодельных координатах. Несмотря на то, что h зависит в этом случае еще и от $\ln x$, решения получившегося уравнения все равно не удовлетворяют граничным условиям прилипания на игле.

В §§ 5 и 6 второй главы рассматривается возможность существования двуслойного решения исходной системы, удовлетворяющего граничным условиям (1) и (2). Для этого в § 5 методами пространственной степенной геометрии из исходной системы выделяется укороченная система, описывающая поток жидкости в слое, который непосредственно примыкает к слою вблизи иглы. После введения автомодельных координат

$$\eta = \frac{r^2}{x^2}, \quad g(\eta) = \frac{\psi}{x^2}, \quad p(\eta) = p \quad (4)$$

эта укороченная система переходит в систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений, которая сводится к одному уравнению для $g(\eta)$ второго порядка. Асимптотический анализ его решений методами плоской степенной геометрии показал, что это уравнение имеет решения, которые при $\eta \rightarrow 0$ имеют асимптотики двух видов

$$\text{a) } g \sim \text{const}, \quad p \sim -\frac{a}{\eta}, \quad a = \text{const} > 0,$$

$$\text{b) } g = \eta, \quad p = p_0 = \text{const}.$$

Следовательно, в случае а) при $\eta \rightarrow 0$ давление $p \rightarrow -\infty$, что не имеет физического смысла. В случае б) на всем внешнем слое

$$\psi = r^2, \quad p = p_0 = \text{const}, \quad (5)$$

т. е. получается однослойный вариант, разобранный в § 3.

Далее в § 6 второй главы рассматривается возможность существования двуслойного неавтомодельного решения. Для этого, аналогично случаю однослойного

сделать
русск. а и б?
(всюду)

решения, в укороченной системе, соответствующей внешнему слою, делается замена переменных

$$x = x, \quad \eta = \frac{r^2}{x^2}, \quad g(x, \eta) = \frac{\psi}{x^2}, \quad p(x, \eta) = p.$$

В получившуюся систему x входит только в виде $\ln x$. При $\ln x \rightarrow +\infty$ первым приближением полученной системы является система, которая в точности совпадает с системой обыкновенных дифференциальных уравнений, полученной на внешнем слое после введения автомодельных координат (4), т. е. при $\eta \rightarrow 0$ имеются два вида асимптотик решения

$$\text{a) } g \sim \text{const}, \quad p \sim -\frac{a}{\eta}, \quad a = \text{const} > 0,$$

$$\text{b) } g \sim \eta, \quad p \sim p_0 = \text{const}.$$

Следовательно, в случае а) при $\eta \rightarrow +0$ давление $p \rightarrow -\infty$, что не имеет физического смысла. В случае б) $p \rightarrow \text{const}$ и на внешней границе внутреннего слоя получаем граничное условие

$$\psi \sim r^2, \quad p \sim \text{const}. \quad (6)$$

С точки зрения пространственной степенной геометрии, при выделении укороченных систем, описывающих поток во внутреннем слое, вариант граничных условий (6) аналогичен варианту граничных условий (5). Следовательно, в случае (6) укороченная система, описывающая поток во внутреннем слое, будет совпадать с системой для однослойного решения, неавтомодельные решения которой рассматриваются в § 4 второй главы и которая не имеет решений, удовлетворяющих граничному условию (2).

Основными результатами второй главы являются теоремы, в которых доказывается, что для задачи стационарного осесимметричного обтекания полубесконечной иглы вязкой несжимаемой жидкостью при $x \rightarrow +\infty$ не существует решений, удовлетворяющих всем граничным условиям (1), (2).

В третьей главе рассматривается задача с большим количеством зависимых переменных. Это задача стационарного осесимметричного обтекания полубесконечной иглы вязким сжимаемым теплопроводным газом. Такой поток описывается системой трех дифференциальных уравнений в частных производных для функции тока ψ , плотности ρ и энтальпии h (аналог температуры) с двумя независимыми переменными: x (вдоль оси симметрии) и r (расстояние от оси x). Игла задается, как и во второй главе, как $x \geq 0$, $r = 0$. Граничные условия задаются в бесконечности

$$\psi = \psi_0 r^2, \quad \rho = \rho_0, \quad h = h_0 \quad \text{при} \quad x = -\infty, \quad \psi_0, \rho_0, h_0 = \text{const} \neq 0, \quad (7)$$

и на игле (2). В § 1 методами пространственной степенной геометрии выделяется укороченная система, описывающая поток в пограничном слое вблизи иглы при $x \rightarrow +\infty$. Оказывается, что для ее автомодельных решений $\rho h = \text{const}$. Поэтому, после введения автомодельных координат

$$\xi = \frac{r^2}{x}, \quad G(\xi) = \frac{\psi}{x}, \quad P(\xi) = \rho, \quad H(\xi) = h \quad (8)$$

укороченная система сводится к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений для $G(\xi)$ и $H(\xi)$. В § 2 у этой системы выделяется инвариантное многообразие $G'H = 1$, на котором система сводится к одному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка для $H(\xi)$.

В §§ 3–5 асимптотический анализ его решений методами плоской степенной геометрии показывает, что это уравнение имеет решения, которые удовлетворяют граничным условиям на игле и в бесконечности: при $\xi \rightarrow 0$ они имеют асимптотики

$$H \sim \text{const } \xi^\lambda, \quad \lambda < 0 \quad \text{при } n = 0$$

$$(\text{т. е. } \psi \sim \text{const } x \xi^{1-\lambda}, \quad \rho \sim \text{const } \xi^{1-\lambda}), \quad (9)$$

$$H \sim \text{const } |\ln \xi|^{1/n} \quad \text{при } n \in (0, 1]$$

$$(\text{т. е. } \psi \sim \text{const } \frac{r^2}{|\ln \xi|^{1/n}}, \quad \rho \sim \text{const } |\ln \xi|^{-1/n}), \quad (10)$$

а при $\xi \rightarrow +\infty$ имеют асимптотику

$$H - 1 \sim \text{const} \int \xi^s e^{-\xi/2} d\xi, \quad (11)$$

где постоянная $n \in [0, 1]$ — показатель степени в степенном законе связи $\mu/\mu_0 = (T/T_0)^n$ между динамическим коэффициентом вязкости μ и абсолютной температурой T . Решения с асимптотиками (9)–(11) находятся теоретически.

В § 6 третьей главы описывается численный метод, с помощью которого для $n = 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1$ находятся зависимости между постоянными в асимптотиках (9)–(11). Результаты вычислений даны в табл. 3–6.

В § 7 описано возвращение к исходной задаче и формулируется основной результат третьей главы, который заключается в том, что задача осесимметричного обтекания полубесконечной иглы вязким сжимаемым теплопроводным газом в пограничном слое при $x \rightarrow +\infty$ имеет семейства решений, которые вблизи иглы имеют асимптотики (9), (10).

В заключении отражена дискуссия, вызванная этой работой.

Результаты, полученные во второй и третьей главах анонсированы в работах [14–23]. Первый вариант подробного изложения — препринты [24, 25], второй подробный вариант, сильно отличающийся от первого — препринты [26–28]. Настоящее подробное изложение — это третий вариант, который сильно отличается от обоих предыдущих.

Нумерация параграфов, лемм, теорем, следствий, замечаний и формул в каждой главе своя. Первое число в номере формулы — это номер параграфа. Нумерация таблиц и рисунков сквозная по всей работе.

Авторы благодарят В. А. Кондратьева и М. М. Васильева за полезные замечания.

ГЛАВА I. ЭЛЕМЕНТЫ СТЕПЕННОЙ ГЕОМЕТРИИ

В этой главе кратко излагаются некоторые понятия и результаты степенной геометрии, которые используются в главах II и III. При этом пространственная степенная геометрия позволяет выделить и упростить укороченную систему уравнений, решения которой дают сильные асимптотики для решений исходной системы. Плоская степенная геометрия позволяет получать не только асимптотики решений, но и асимптотические разложения решений. В ряде случаев эти разложения сходятся и дают сами решения.

§ 1. Пространственная степенная геометрия

Здесь кратко объясняются некоторые понятия степенной геометрии [13], которые используются в § 2 главы II и в §§ 1 и 7 главы III. Для новых результатов даются краткие доказательства.

Обозначим через $X' = (x_1, \dots, x_l)$ вектор независимых переменных и через $X'' = (x_{l+1}, \dots, x_{l+m})$ — вектор зависимых переменных. Положим $n = l + m$ и объединим все переменные в один вектор $X = (X', X'') = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Дифференциальным мономом $a(X)$ называется произведение обычного монома $c X^R \stackrel{\text{def}}{=} c x_1^{r_1} \dots x_n^{r_n}$, где $c = \text{const} \in \mathbb{R}$ и $R = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n$, и конечного числа частных производных вида

$$\frac{\partial^k x_j}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_l^{k_l}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^{\|K'\|} x_j}{\partial X'^{K'}}, \quad l < j \leq n,$$

где $k = |k_1| + \dots + |k_l| \stackrel{\text{def}}{=} \|K'\|$, $K' = (k_1, \dots, k_l)$. Каждому дифференциальному моному $a(X)$ ставится в соответствие его *векторный показатель степени* $Q(a) \in \mathbb{R}^n$ по следующим правилам:

$$Q(cX^R) = R; \quad Q\left(\frac{\partial^{\|K'\|} x_j}{\partial X'^{K'}}\right) = (-K', E_j),$$

где $j > l$ и E_j обозначает j -й единичный вектор; при умножении мономов их векторные показатели степени складываются: $Q(a_1 a_2) = Q(a_1) + Q(a_2)$, где a_1 и a_2 — дифференциальные мономы.

Конечная сумма дифференциальных мономов

$$f(X) = \sum a_k(X), \quad (1.1)$$

называется *дифференциальной суммой*. В \mathbb{R}^n ей ставится в соответствие множество векторных показателей степени ее мономов $\mathbf{S}(f) = \{Q(a_k)\}$ — *носитель суммы* (1.1). Выпуклая оболочка $\Gamma(f)$ носителя $\mathbf{S}(f)$ называется *многогранником суммы* (1.1). Ее граница $\partial\Gamma(f)$ состоит из граней $\Gamma_j^{(d)}$, где $d = \dim(\Gamma_j^{(d)})$ — размерность и j — номер грани.

Пусть \mathbb{R}_*^n обозначает пространство, двойственное к пространству \mathbb{R}^n так, что определено скалярное произведение

$$\langle P, Q \rangle \stackrel{\text{def}}{=} p_1 q_1 + \dots + p_n q_n$$

для $P = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}_*^n$ и $Q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n$.

На семействе кривых

$$x_i = b_i \tau^{p_i}, \quad b_i \neq 0, \quad p_i \in \mathbb{R}, \quad \tau \rightarrow \infty, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.2)$$

где b_i — произвольные постоянные из \mathbb{R} , дифференциальный моном ведет себя как $\text{const} \tau^{\langle P, Q \rangle}$, где $Q = Q(a)$, $P = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}_*^n$. Поэтому на этом семействе кривых ведущими мономами суммы $f(X)$ являются те, для которых скалярное произведение $\langle P, Q \rangle$ является наибольшим среди точек носителя суммы $f(X)$, т. е. $\langle P, Q \rangle = \max$ по $Q \in \mathbf{S}(f)$. Для выделения этих точек максимумов рассмотрим выпуклую оболочку $\Gamma(f)$ носителя $\mathbf{S}(f)$, т. е. многогранник суммы (1.1). Каждому вектору $P \neq 0$, $P \in \mathbb{R}_*^n$

соответствует *опорная грань* $\Gamma_j^{(d)}$, на которой

$$\begin{aligned} \langle P, Q_1 \rangle &= \langle P, Q_2 \rangle, \quad Q_1, Q_2 \in \Gamma_j^{(d)}, \\ \langle P, Q_1 \rangle &> \langle P, Q \rangle, \quad Q \in \mathbf{S}(f) \setminus \Gamma_j^{(d)}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Вектор P это *вектор внешней нормали к грани* $\Gamma_j^{(d)}$, т. е. от нее он направлен наружу многогранника $\Gamma(f)$. Множество $\mathbf{U}_j^{(d)}$ всех векторов P с фиксированной опорной гранью $\Gamma_j^{(d)}$ называется *нормальным конусом грани* $\Gamma_j^{(d)}$ и описывается системой равенств и неравенств (1.3), т. е. множество $\mathbf{U}_j^{(d)}$ описывается формулой

$$\mathbf{U}_j^{(d)} = \{P : \langle P, Q_1 \rangle = \langle P, Q_2 \rangle, \quad Q_1, Q_2 \in \Gamma_j^{(d)}; \langle P, Q_1 \rangle > \langle P, Q \rangle, \quad Q \in \mathbf{S} \setminus \Gamma_j^{(d)}\}.$$

Каждой грани $\Gamma_j^{(d)}$ соответствует *укороченная сумма*

$$\widehat{f}_j^{(d)}(X) = \sum a_k(X) \quad \text{по} \quad k : Q(a_k) \in \Gamma_j^{(d)}.$$

Согласно [13, гл. VI] каждая укороченная сумма $\widehat{f}_j^{(d)}(X)$ является первым приближением суммы $f(X)$, когда вектор $\ln |X| = (\ln |x_1|, \dots, \ln |x_n|)$ стремится к бесконечности вблизи нормального конуса $\mathbf{U}_j^{(d)}$. В частности, движение $\tau \rightarrow \infty$ по кривой семейства (1.2) соответствует стремлению вектора $\ln |X| = (\ln |x_1|, \dots, \ln |x_n|)$ к бесконечности вдоль луча λP при $\lambda \rightarrow +\infty$, т. е. все отличные от нуля компоненты вектора $\ln |X|$ стремятся к бесконечности.

Расширенным нормальным конусом грани $\Gamma_j^{(d)}$ называется объединение нормального конуса $\mathbf{U}_j^{(d)}$ и нормальных конусов граней, входящих в грань $\Gamma_j^{(d)}$. Обозначим его $\check{\mathbf{U}}_j^{(d)}$. Смысл этого понятия заключается в том, что укорочение $\widehat{f}_j^{(d)}(X)$, соответствующее грани $\Gamma_j^{(d)}$, содержит все слагаемые, которые являются ведущими, когда вектор $\ln |X| \rightarrow \infty$ вблизи расширенного нормального конуса $\check{\mathbf{U}}_j^{(d)}$.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$f_i(X) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \tag{1.4}$$

где $f_i(X)$ — дифференциальные суммы. Каждой из них соответствует ее носитель $\mathbf{S}(f_i)$, многогранник $\Gamma(f_i)$, набор граней $\Gamma_{i j_i}^{(d_i)}$ и набор *укороченных уравнений* $\widehat{f}_{i j_i}^{(d_i)}(X) = 0$. Пусть вектору $P \neq 0$ соответствуют опорные грани $\Gamma_{i j_i}^{(d_i)}$, $i = 1, \dots, m$. Тогда ему соответствует *укороченная система уравнений*

$$\widehat{f}_{i j_i}^{(d_i)}(X) = 0, \quad i = 1, \dots, m. \tag{1.5}$$

Согласно [13, гл. III, § 1] при $\tau \rightarrow \infty$ *порядок функции* $\varphi(\tau)$ это

$$p(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \lim \frac{\ln |\varphi(\tau)|}{\ln \tau},$$

если предел существует. Функции $\varphi(\tau)$ и $\psi(\tau)$ *сильно асимптотически эквивалентны*, если

$$\frac{\varphi(\tau) - \psi(\tau)}{\varphi(\tau)} = O(\tau^{-\varepsilon}),$$

где $\varepsilon > 0$ и $\tau \rightarrow \infty$.

Вектор-функции $\Phi(X) = (\varphi_1(X), \dots, \varphi_m(X))$ и $\Psi(X) = (\psi_1(X), \dots, \psi_m(X))$ сильно асимптотически эквивалентны на семействе кривых (1.2), если на нем

$$\frac{\varphi_j(X) - \psi_j(X)}{\varphi_j(X)} = O(\tau^{-\varepsilon}), \quad j = 1, \dots, m, \quad (1.6)$$

где $\varepsilon > 0$ и $\tau \rightarrow \infty$.

Теперь мы хотим сформулировать и доказать утверждение следующего типа.

Утверждение. Пусть система уравнений (1.4) имеет решение

$$x_j = \varphi_j(X'), \quad j = l + 1, \dots, n, \quad (1.7)$$

которое определено на семействе (1.2) (т. е. на этом семействе все $\varphi_j(X')$ имеют определенные порядки p_j , когда

$$x_i = b_i \tau^{p_i}, \quad i = 1, \dots, l, \quad (1.8)$$

тогда укороченная система (1.5), соответствующая вектору $P = (p_1, \dots, p_n)$, имеет решение

$$x_j = \psi_j(X'), \quad j = l + 1, \dots, n, \quad (1.9)$$

которое на семействе (1.8) сильно асимптотически эквивалентно решению (1.7).

Для случая, когда все $\varphi_j(X')$ в (1.7) разлагаются в ряды по степеням X' , это утверждение следует из теоремы 1.1 главы VI в [13]. Однако для наших целей этого недостаточно. Поэтому ниже сформулируем и кратко докажем более общий вариант этого утверждения, которым и будем пользоваться.

Определения. В 1–4 рассматриваются функции $\varphi(\tau)$, которые определены при $\tau > \tau_0 = \text{const}$.

1. Через $\mathcal{R}(p)$ обозначим множество функций $\varphi(\tau)$, для которых

$$\overline{\lim}_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\ln |\varphi(\tau)|}{\ln \tau} \leq p. \quad (1.10)$$

2. Через $\mathcal{P}(0)$ обозначим такой класс функций $\varphi(\tau)$ с порядком $p(\varphi) \leq 0$, который замкнут относительно умножения на вещественную константу, возведения в вещественную степень, сложения, умножения и обладает свойством: если порядок $p(\varphi) < 0$, то $\varphi(\tau) \equiv 0$.

Например, в класс $\mathcal{P}(0)$ входят все функции, порожденные из $\varphi(\tau) \equiv 1$ и $\varphi(\tau) = \ln \tau$ операциями, указанными в определении, а также логарифмированием и сходящимися суммами асимптотических рядов.

3. Через $\mathcal{P}(p)$ обозначим класс функций $\varphi(\tau)$ вида $\varphi(\tau) = \psi(\tau)\tau^p$, где $\psi(\tau) \in \mathcal{P}(0)$.
4. Через $\mathcal{P}^*(p)$ обозначим класс таких функций $\varphi(\tau)$, которые имеют вид $\varphi(\tau) = \widehat{\varphi}(\tau) + \widetilde{\varphi}(\tau)$, где $\widehat{\varphi}(\tau) \in \mathcal{P}(p)$ и $\widetilde{\varphi}(\tau) \in \mathcal{R}(p - \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$.
5. Через $\mathcal{P}(P', p)$ обозначим класс таких функций $\varphi(X')$, которые на семействе (1.8) являются функциями класса $\mathcal{P}(p)$ и все частные производные

$$\frac{\partial^k \varphi(X')}{\partial X'^{K'}} \in \mathcal{P}(p - \langle P', K' \rangle),$$

где $P' = (p_1, \dots, p_l)$.

Это значит, что при каждом однократном дифференцировании функции $\varphi(X')$ порядок понижается на единицу. Следовательно, функции типа $\sin x$, $\cos x$ исключаются.

6. Через $\mathcal{R}(P', p)$ обозначим класс таких функций $\varphi(X')$, у которых на семействе (1.8) выполнено свойство (1.10) и для всех производных $\partial^k \varphi(X') / \partial X'^{K'}$ аналогичный (1.10) верхний предел $\leq p - \langle P', K' \rangle$.
7. Через $\mathcal{P}^*(P', p)$ обозначим класс таких функций $\varphi(X')$, которые имеют вид $\varphi(X') = \widehat{\varphi}(X') + \widetilde{\varphi}(X')$, где $\widehat{\varphi}(X') \in \mathcal{P}(P', p)$, $\widetilde{\varphi}(X') \in \mathcal{R}(P', p - \varepsilon)$ и $\varepsilon > 0$.
8. Через $\mathcal{P}(P', P'')$ обозначим класс таких векторных функций

$$\Phi''(X') = (\varphi_{l+1}(X'), \dots, \varphi_n(X')),$$

у которых

$$\varphi_j(X') \in \mathcal{P}(P', p_j), \quad j = l + 1, \dots, n, \quad (1.11)$$

и $P'' = (p_{l+1}, \dots, p_n)$, где p_j из (1.11).

9. Через $\mathcal{P}^*(P', P'')$ обозначим класс таких векторных функций

$$\Phi''(X') = (\varphi_{l+1}(X'), \dots, \varphi_n(X')),$$

которые имеют вид

$$\Phi''(X') = \widehat{\Phi}''(X') + \widetilde{\Phi}''(X'),$$

где

$$\widehat{\Phi}''(X') \in \mathcal{P}(P', P'')$$

и

$$\widetilde{\varphi}_j(X') \in \mathcal{R}(P', p_j - \varepsilon), \quad j = l + 1, \dots, n, \quad \varepsilon > 0,$$

и

$$\widetilde{\Phi}''(X') = (\widetilde{\varphi}_{l+1}(X'), \dots, \widetilde{\varphi}_n(X')).$$

Теорема 1. Пусть система уравнений (1.4) имеет решение (1.7), принадлежащее классу $\mathcal{P}^*(P', P'')$, тогда укороченная система (1.5), соответствующая вектору $P = (P', P'')$, имеет решение

$$X'' = \widehat{\Phi}''(X'). \quad (1.12)$$

Доказательство. Сначала сформулируем вспомогательные свойства а) и б), которые непосредственно следуют из определений (везде $\varepsilon > 0$).

а) Пусть $a(X', X'')$ — дифференциальный моном и его векторная степень $Q(a) = Q$.

Если $\Phi''(X') \in \mathcal{P}(P', P'')$ и $P = (P', P'')$, то $a(X', \Phi''(X')) \in \mathcal{P}(\langle P, Q \rangle)$.

Если $\Phi''(X') \in \mathcal{P}^*(P', P'')$, то

$$a(X', \Phi''(X')) = a(X', \widehat{\Phi}''(X')) + b(X') \in \mathcal{P}^*(P', \langle P, Q \rangle),$$

где $a(X', \widehat{\Phi}''(X')) \in \mathcal{P}(P', \langle P, Q \rangle)$ и $b(X') \in \mathcal{R}(P', \langle P, Q \rangle - \varepsilon)$.

б) Пусть $f(X', X'')$ — дифференциальная сумма и $\widehat{f}(X', X'')$ — ее укороченная сумма, соответствующая вектору $P = (P', P'')$ и содержащая моном $a(X', X'')$ с векторным показателем степени $Q(a) = Q$.

Если $\Phi''(X') \in \mathcal{P}(P', P'')$, то

$$f(X', \Phi''(X')) = \widehat{f}(X', \widehat{\Phi}''(X')) + g(X') \in \mathcal{P}^*(P', \langle P, Q \rangle),$$

где $\widehat{f}(X', \widehat{\Phi}''(X')) \in \mathcal{P}(P', \langle P, Q \rangle)$ и $g(X') \in \mathcal{R}(P', \langle P, Q \rangle - \varepsilon)$.

Теперь переходим к доказательству теоремы. Если $X'' = \Phi''(X')$ — решение системы (1.4), то каждое из уравнений (1.4) превращается в тождество

$$f_i(X', \Phi''(X')) \equiv 0.$$

Пусть $\widehat{f}_i(X)$ содержит моном $a_i(X)$ с показателем $Q(a_i) = Q_i$. Согласно свойству б) имеем

$$f_i(X', \Phi''(X')) = \widehat{f}_i(X', \widehat{\Phi}''(X')) + h_i(X') \in \mathcal{P}^*(P', \langle P, Q_i \rangle), \quad (1.13)$$

где на семействе (1.8)

$$\widehat{f}_i(X', \widehat{\Phi}''(X')) = g_i(B', \tau) \tau^{(P, Q_i)} \in \mathcal{P}(\langle P, Q_i \rangle) \quad (1.14)$$

и $h_i \in \mathcal{R}(\langle P, Q \rangle - \varepsilon)$. Следовательно, $g_i(B', \tau) \equiv 0$. Но это означает, что

$$\widehat{f}_i(X', \Phi''(X')) = 0.$$

Поскольку это справедливо для каждого $i = 1, \dots, m$, то укороченная система (1.5) имеет решение (1.12). ■

Пример. Укороченная система (1.5) является квазиоднородной, т. е. она переходит в себя при замене

$$x_i = \mu^{p_i} \widetilde{x}_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.15)$$

где $\mu \in \mathbb{R}$. Согласно [29], ее решение (1.12) является также квазиоднородным (или автомодельным), если оно переходит в себя при замене (1.15). Покажем, что для квазиоднородной подстановки (1.12) в выражении (1.14) функция $g_i(B', \tau)$ не зависит от τ . Действительно, сделаем в (1.13) замену (1.15). Тогда по (1.15) и затем по (1.14) получаем два равенства

$$\widehat{f}_i(\mu^{p_i} \widetilde{X}', \mu^{p''} \widetilde{\Phi}''(\mu^{p_i} \widetilde{X}')) = \mu^{(P, Q_i)} \widehat{f}_i(\widetilde{X}', \widehat{\Phi}''(\widetilde{X}')) = g_i(B', \mu) \mu^{(P, Q_i)}.$$

Но здесь $\mu = \tau$ и $\widetilde{X}' = B'$. Следовательно, $g_i(B', \tau) \equiv \widehat{f}_i(B', \widehat{\Phi}''(B'))$, т. е. не зависит от τ . Поэтому для случаев, когда рассматриваются решения (1.7) системы (1.4) с автомодельными первыми приближениями (1.12), достаточно в качестве класса $\mathcal{P}(0)$ взять множество постоянных, т. е. $\mathcal{P}(0) = \mathbb{R}$.

Это означает, что теорема 1 справедлива для всех тех решений, у которых первое приближение автомодельно и добавки регулярны при дифференцировании.

Замечание 1. Используя теорему 3.3 [30] можно оценить величину ε в формуле (1.6), т. е. оценить точность асимптотики, даваемой формулой (1.12) согласно (1.9). Если в качестве τ взять одну из независимых переменных x_k , которая стремится к бесконечности, $0 < k \leq l$, то у вектора P координата $p_k = 1$. Тогда

$$0 < \varepsilon < \varepsilon_0 = \min_{1 \leq i \leq m} |\alpha_i - \beta_i|,$$

где

$$\alpha_i = \langle P, Q \rangle, \quad Q \in \Gamma_{ij_i}^{(d_i)}, \quad \beta_i = \langle P, Q_1 \rangle, \quad Q_1 \in \mathbf{S}(f_i) \setminus \Gamma_{ij_i}^{(d_i)},$$

а $\Gamma_{ij_i}^{(d_i)}$ — грани, соответствующие уравнениям укороченной системы (1.5), вектор P — из теоремы 1, $i = 1, \dots, m$.

Следовательно, выделяя укороченные системы и решая их, можно получить асимптотики решений исходной системы. Носители уравнений укороченной системы расположены на опорных плоскостях с общим нормальным вектором P , т. е. укороченные системы являются квазиоднородными и имеют автомодельные решения [29]. В автомодельных переменных каждая укороченная система сводится к системе с меньшим количеством независимых переменных (см. ниже теорему 3).

Нормальным конусом укороченной системы (1.5) называется множество

$$U_J^{(D)} = U_{1j_1}^{(d_1)} \cap U_{2j_2}^{(d_2)} \cap \dots \cap U_{mj_m}^{(d_m)},$$

где $D = (d_1, \dots, d_m)$, $J = (j_1, \dots, j_m)$, т. е. это пересечение нормальных конусов всех укороченных уравнений, входящих в укороченную систему. *Расширенным нормальным конусом укороченной системы (1.5) называется пересечение расширенных нормальных конусов всех укороченных уравнений, входящих в укороченную систему*

$$\check{U}_J^{(D)} = \check{U}_{1j_1}^{(d_1)} \cap \check{U}_{2j_2}^{(d_2)} \cap \dots \cap \check{U}_{mj_m}^{(d_m)},$$

где $D = (d_1, \dots, d_m)$, $J = (j_1, \dots, j_m)$.

Пусть кроме системы уравнений (1.4) в задаче имеются граничные условия вида

$$f_j \stackrel{\text{def}}{=} x_{j+l-m} - c_j X^{R'_j} = 0, \quad R'_j = (r_{1j}, \dots, r_{lj}), \quad c_j = \text{const} \neq 0, \quad (1.16)$$

при $x_k \rightarrow \infty$, $j = m + 1, \dots, m + m'$, $m' \leq m$.

Эти уравнения можно рассматривать как дополнительные к системе (1.4). Им соответствуют векторные показатели степени и все остальные элементы степенной геометрии. Перед нами стоит задача выделить такую укороченную систему, чтобы ее решение удовлетворяло граничным условиям (1.16). К уравнениям (1.16) можно применить технику выделения укорочения. Но они сами являются квазиоднородными, поэтому единственные содержательные укорочения совпадают с самими уравнениями. Это возможно только при определенных значениях вектора P , которые гарантируют, что для каждого из уравнений (1.16) укорочение совпадает с самим уравнением. Используя эти условия на вектор P , можно понизить размерность пространства показателей степеней Q и решать задачу нахождения укорочений в этом пространстве меньшей размерности.

Вектор $P = (p_1, \dots, p_n) = (P', P'')$ должен удовлетворять условиям

$$\langle P, Q_1 \rangle = \langle P, Q_2 \rangle, \quad Q_1, Q_2 \in S(f_j), \quad j = m + 1, \dots, m + m'. \quad (1.17)$$

Систему уравнений (1.17) можно разрешить и выразить явно $p_{l+1}, \dots, p_{l+m'}$ через $P' = (p_1, \dots, p_l)$, т. е.

$$p_{j+l-m} = \langle P', R'_j \rangle, \quad R'_j = (r_{1j}, \dots, r_{lj}), \quad j = m + 1, \dots, m + m'. \quad (1.18)$$

Согласно этим условиям можно спроектировать носители уравнений системы (1.4) на пространство меньшей размерности. Тогда в пространствах \mathbb{R}_+^n и \mathbb{R}^n векторов P и Q мы получаем проекции $P \rightarrow \tilde{P}$ и $Q \rightarrow \tilde{Q}$ по следующему правилу

$$\langle P, Q \rangle = \langle \tilde{P}, \tilde{Q} \rangle, \quad (1.19)$$

где векторы

$$\begin{aligned}\tilde{P} &= (p_1, \dots, p_l, p_{l+m'+1}, \dots, p_n), \\ \tilde{Q} &= (\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_l, q_{l+m'+1}, \dots, q_n), \\ \tilde{q}_i &= q_i + \sum_{j=m+1}^{m+m'} q_{j+l-m} r_{ij}, \quad i = 1, \dots, l.\end{aligned}\tag{1.20}$$

Теорема 2. *Граничным условиям (1.16) соответствуют проекции в пространствах $\mathbb{R}^n : Q \rightarrow \tilde{Q}$ и $\mathbb{R}^n : P \rightarrow \tilde{P}$ по правилам (1.19), (1.20).*

Доказательство. Граничным условиям (1.16) соответствуют равенства (1.18). Непосредственной проверкой убеждаемся, что из (1.20) и (1.18) следует (1.19). ■

Получившейся таким образом проекции с точками $\tilde{Q} \in \mathbb{R}^{n-m'}$ соответствуют нормальные конусы в пространстве $\mathbb{R}_*^{n-m'}$.

Кроме граничных условий вида (1.16) обычно еще бывают дополнительные граничные условия в виде равенства нулю функций и производных на некоторых подмножествах пространства X' . Этим условиям в пространстве \mathbb{R}_*^n или в его проекции $\mathbb{R}_*^{n-m'}$ соответствуют некоторые множества векторов P или \tilde{P} . Нас интересуют те укороченные системы, расширенный нормальный конус которых включает эти множества. Стремлению $x_i \rightarrow 0$ соответствует $p_i \leq 0$; стремлению $x_i \rightarrow \infty$ соответствует $p_i \geq 0$. И это надо использовать при описании дополнительных граничных условий.

Поскольку нас интересуют асимптотики решения системы (1.4) при $x_j \rightarrow \infty$ (или $x_j \rightarrow 0$), то этому в пространстве \mathbb{R}_*^n соответствует $p_j \geq 0$ (или $p_j \leq 0$), $j = 1, \dots, l$. Исходя из этих условий, находим укороченные системы вида (1.5), расширенные нормальные конуса которых содержат указанные выше множества (соответствующие дополнительным граничным условиям) и обладают свойствами положительности или отрицательности координаты p_i , в зависимости от стремления координаты x_i к бесконечности или нулю. Каждой из этих укороченных систем соответствует свой вектор P , нормальный к носителям укороченных уравнений и носителям граничных условий (1.16).

Теорема 3 [29, § 10]. *Пусть имеется укороченная система (1.5) и граничные условия вида (1.16) с вектором $\tilde{P} = (P', P'') = (p_1, \dots, p_n)$, нормальным к носителям всех этих уравнений, т. е. выполнено условие (1.18). Пусть B'_1, \dots, B'_{l-1} — базис в линейном подпространстве векторов Q' , удовлетворяющих уравнению $\langle P', Q' \rangle = 0$. Тогда система уравнений (1.5), (1.16) имеет автомодельные координаты ξ_i, y_j :*

$$\begin{aligned}\xi_i &= X^{B'_i}, \quad i = 1, \dots, l-1, \\ x_j &= y_j X^{T'_j}, \quad j = l+1, \dots, n,\end{aligned}$$

где $\langle P', T'_j \rangle = p_j$, в которых она сводится к системе t уравнений относительно t зависимых переменных y_{l+1}, \dots, y_n с независимыми переменными ξ_1, \dots, ξ_{l-1} . При $l = 2$ — это система обыкновенных дифференциальных уравнений, при $l = 1$ — алгебраических.

Этот метод позволяет выбирать укороченные системы (1.5) и находить их автомодельные решения, которые удовлетворяют заданным граничным условиям и дают асимптотики решений исходной системы (1.4).

§ 2. Плоская степенная геометрия

2.1. Постановка задачи о нахождении степенных асимптотик решений [31; 32 и 33, § 1]. Пусть задано обыкновенное дифференциальное уравнение

$$f(X) = 0, \quad (2.1)$$

где $f(X)$ — дифференциальная сумма, $X = (x, y)$, x — независимая переменная, зависимая переменная y входит в $f(X)$ в целых степенях. Положим

$$\omega = \begin{cases} -1, & \text{если } x \rightarrow 0, \\ 1, & \text{если } x \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (2.2)$$

Пусть x стремится к нулю или к бесконечности и решение уравнения (2.1) имеет вид

$$y = c_r x^r + o(|x|^{r+\varepsilon}), \quad (2.3)$$

где коэффициент $c_r = \text{const} \in \mathbb{R}$, $c_r \neq 0$, показатели степени $r, \varepsilon \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon\omega < 0$. Тогда выражение

$$y = c_r x^r, \quad c_r \neq 0 \quad (2.4)$$

является *степенной асимптотикой* решения (2.3).

Задача 1. При $x \rightarrow 0$ и при $x \rightarrow \infty$ для решений $y = \varphi(x)$ уравнения (2.1) найти все степенные асимптотики (2.4).

Повторим некоторые определения § 1 применительно к плоской степенной геометрии. Каждому дифференциальному моному $a(X)$ ставится в соответствие его (векторный) *показатель степени* $Q(a) = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$ по следующим правилам. Для монома: $Q(cx^{r_1}y^{r_2}) = (r_1, r_2)$; для производной: $Q(d^l y/dx^l) = (-l, 1)$; при умножении дифференциальных мономов их показатели степени складываются как векторы $Q(a_1 a_2) = Q(a_1) + Q(a_2)$. Множество $\mathbf{S}(f)$ показателей степеней $Q(a_i)$ всех дифференциальных мономов $a_i(X)$, входящих в дифференциальную сумму $f(X) \stackrel{\text{def}}{=} \sum a_i(X)$, называется *носителем суммы*. Очевидно, $\mathbf{S}(f) \in \mathbb{R}^2$. Через $f_Q(X)$ обозначим сумму тех мономов $a_i(X)$ из $f(X)$, у которых $Q(a_i) = Q$. Тогда дифференциальную сумму можно записать в виде

$$f(X) = \sum f_Q(X) \quad \text{по } Q \in \mathbf{S}(f). \quad (2.5)$$

Выпуклая оболочка $\Gamma(f)$ носителя $\mathbf{S}(f)$ называется *многоугольником суммы* $f(X)$. Граница $\partial\Gamma(f)$ многоугольника $\Gamma(f)$ состоит из вершин $\Gamma_j^{(0)}$ и ребер $\Gamma_j^{(1)}$. Их называют (обобщенными) *гранями* $\Gamma_j^{(d)}$, где верхний индекс указывает размерность грани, а нижний — ее номер. Каждой грани $\Gamma_j^{(d)}$ соответствует *укороченная сумма*

$$\tilde{f}_j^{(d)}(X) = \sum a_i(X) \quad \text{по } Q(a_i) \in \mathbf{S}(f) \cap \Gamma_j^{(d)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{S}_j^{(d)}. \quad (2.6)$$

Пусть плоскость \mathbb{R}_*^2 сопряжена плоскости \mathbb{R}^2 так, что для $P = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}_*^2$ и $Q = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$ определено скалярное произведение

$$\langle P, Q \rangle \stackrel{\text{def}}{=} p_1 q_1 + p_2 q_2. \quad (2.7)$$

Каждой грани $\Gamma_j^{(d)}$ в \mathbb{R}_*^2 соответствует также свой *нормальный конус*

$$\mathbf{U}_j^{(d)} = \left\{ \begin{array}{l} P : \langle P, Q \rangle = \langle P, Q' \rangle, \quad Q, Q' \in \mathbf{S}_j^{(d)}, \\ \langle P, Q \rangle > \langle P, Q'' \rangle, \quad Q'' \in \mathbf{S}(f) \setminus \mathbf{S}_j^{(d)} \end{array} \right\}.$$

Для ребра $\Gamma_j^{(1)}$ нормальный конус $\mathbf{U}_j^{(d)}$ — это тот луч прямой, ортогональной ребру $\Gamma_j^{(1)}$ и проходящей через начало координат $P = 0$, который направлен от ребра $\Gamma_j^{(1)}$ наружу многоугольника $\Gamma(f)$. Для вершины $\Gamma_j^{(0)}$ нормальный конус $\mathbf{U}_j^{(0)}$ это открытый сектор (угол) на плоскости \mathbb{R}_*^2 с вершиной в нуле $P = 0$ и ограниченный лучами, являющимися нормальными конусами ребер, примыкающих к вершине $\Gamma_j^{(0)}$.

Итак, каждой грани $\Gamma_j^{(d)}$ носителя $\mathbf{S}(f)$ уравнения (2.1) соответствуют: нормальный конус $\mathbf{U}_j^{(d)}$ в \mathbb{R}_*^2 и укороченное уравнение

$$\tilde{f}_j^{(d)}(X) = 0. \quad (2.8)$$

Носитель степенной асимптотики (2.4) состоит из двух точек $E_2 \stackrel{\text{def}}{=} (0, 1)$ и $(r, 0)$. Их выпуклая оболочка является ребром, которое обозначим $\gamma_1^{(1)}$. Нормальным к нему является вектор $(1, r)$. *Нормальным конусом* \mathbf{u} решения вида (2.3) является луч $\lambda\omega(1, r)$, где ω определено по (2.2) и $\lambda > 0$.

Теорема 4 [13, гл. VI, теорема 1.1]. *Если уравнение (2.1) имеет решение вида (2.3), для которого $\mathbf{u} = \lambda\omega(1, r) \subset \mathbf{U}_j^{(d)}$, то укорочение (2.4) решения (2.3) является решением укороченного уравнения (2.8), соответствующего грани $\Gamma_j^{(d)}$.*

Это частный случай теоремы 1 для $n = 2$ и степенной асимптотики.

Поэтому для нахождения всех укороченных решений (2.4) уравнения (2.1) надо вычислить: носитель $\mathbf{S}(f)$, многоугольник $\Gamma(f)$, все его грани $\Gamma_j^{(d)}$ и их нормальные конусы $\mathbf{U}_j^{(d)}$. Затем для каждого укороченного уравнения (2.8) надо найти все его решения (2.4), у которых один из векторов $\pm(1, r)$ лежит в нормальном конусе $\mathbf{U}_j^{(d)}$. Если $d = 0$, то это означает, что один из векторов $\pm(1, r) = \omega R$ лежит в $\mathbf{U}_j^{(d)}$. Если $d = 1$, то это свойство всегда выполнено. При этом определяется также значение ω .

2.2. Решение укороченного уравнения [31, 32] и [33, § 1]. Здесь рассмотрим по отдельности два случая: вершины $\Gamma_j^{(0)}$ и ребра $\Gamma_j^{(1)}$.

Вершине $\Gamma_j^{(0)} = \{Q\}$ соответствует укороченное уравнение (2.8) с точечным носителем Q и с $d = 0$. Положим $g(X) \stackrel{\text{def}}{=} X^{-Q} \tilde{f}_j^{(0)}(X)$, тогда решение (2.4) уравнения (2.8) удовлетворяет уравнению $g(X) = 0$. Подставляя $y = cx^r$ в $g(X)$, получаем, что $g(x, cx^r)$ не зависит от x и c и является многочленом от r , т. е. $g(x, cx^r) \equiv \chi(r)$, где $\chi(r)$ — *характеристический многочлен* дифференциальной суммы $\tilde{f}_j^{(0)}(X)$. Следовательно, для решения (2.4) уравнения (2.8) показатель r является корнем характеристического уравнения

$$\chi(r) \stackrel{\text{def}}{=} g(x, x^r) = 0, \quad (2.9)$$

а коэффициент c_r — произвольный. Из корней r_i уравнения (2.9) надо отобрать только те, для которых один из векторов $\omega(1, r)$, где $\omega = \pm 1$, лежит в нормальном конусе $U_j^{(0)}$ вершины $\Gamma_j^{(0)}$. Соответствующие выражения (2.4) с произвольной константой c_r являются кандидатами на роль укороченных решений уравнения (2.1). При этом согласно (2.2), если $\omega = -1$, то $x \rightarrow 0$, а если $\omega = 1$, то $x \rightarrow \infty$.

Ребру $\Gamma_j^{(1)}$ соответствует укороченное уравнение (2.8) с $d = 1$, нормальный конус $U_j^{(1)}$ которого является лучом $\{\lambda N_j, \lambda > 0\}$, где N_j — внешний нормальный вектор к ребру $\Gamma_j^{(1)}$. Нормальный конус u укороченного решения (2.4) пересекается с $U_j^{(1)}$, только если вектор $\omega(1, r) \in U_j^{(1)}$. Этим однозначно определяются показатель степени r укороченного решения (2.4) и значение $\omega = \pm 1$ в (2.2). Для определения коэффициента c_r надо выражение (2.4) подставить в укороченное уравнение (2.8). После сокращения на некоторую степень x получаем алгебраическое *определяющее уравнение* для коэффициента c_r

$$\tilde{f}(c_r) \stackrel{\text{def}}{=} x^{-s} \hat{f}_j^{(1)}(x, c_r x^r) = 0. \tag{2.10}$$

Каждому его корню $c_r = c_r^{(i)} \neq 0$ соответствует свое выражение (2.4), которое является кандидатом на роль укороченного решения уравнения (2.1).

Итак, каждое укороченное уравнение (2.8) имеет несколько подходящих решений (2.4) с $u \subset U_j^{(d)}$. Объединим их в непрерывные по ω , r , c_r и параметрам уравнения (2.1) семейства, которые обозначим $\mathcal{F}_j^{(d)} k$, где $k = 1, 2, \dots$.

Если нас интересуют не все решения (2.3) уравнения (2.1), а только те, у которых нормальный конус u лежит в некотором заданном конусе \mathcal{K} , то \mathcal{K} называется *конусом задачи*.

2.3. Критические числа укороченного решения [31, 32] и [33, § 1]. Если найдено укороченное решение (2.4), то замена

$$y = c_r x^r + z, \tag{2.11}$$

приводит уравнение (2.1) к виду

$$\tilde{f}(x, z) \stackrel{\text{def}}{=} f(x, c_r x^r + z) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}(x)z + h(x, z) = 0, \tag{2.12}$$

где $\tilde{f}(x, z)$ — дифференциальная сумма, все точки $Q = (q_1, q_2)$ ее носителя $S(\tilde{f})$ имеют целую неотрицательную координату q_2 . При этом $\mathcal{L}(x)$ — линейный дифференциальный оператор и носитель $S(\mathcal{L}z)$ состоит из одной точки $(v, 1)$, являющейся вершиной $\tilde{\Gamma}_1^{(0)}$ многоугольника $\Gamma(\tilde{f})$, у носителя $S(h)$ для всех точек $Q = (q_1, q_2)$ координата $q_2 \geq 0$ и нет точки $Q = (v, 1)$, нормальный конус вершины $\tilde{\Gamma}_1^{(0)}$ содержит вектор $P = (p_1, p_2)$ с $p_1 \omega > 0$. Для уравнения (2.12) конус задачи можно записать в виде

$$\mathcal{K} = \{s = p_2/p_1 : s\omega < r\omega, p_1 \omega > 0\}. \tag{2.13}$$

т. е. ищем только те решения $z = c_s x^s + o(x^{s-r})$ уравнения (2.12), у которых $s \in \mathcal{K}$.

Напомним, что дифференциальная сумма $f(x, y)$ имеет *первую вариацию* (или *производную Фреше*) $\delta f(x, y)/\delta y$, которая обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \frac{\delta(cx^{q_1}y^{q_2})}{\delta y} &= cq_2x^{q_1}y^{q_2-1}, & \frac{\delta(d^l y/dx^l)}{\delta y} &= d^l/dx^l, \\ \frac{\delta(f+g)}{\delta y} &= \frac{\delta f}{\delta y} + \frac{\delta g}{\delta y}, & \frac{\delta(fg)}{\delta y} &= \left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)g + f\left(\frac{\delta g}{\delta y}\right). \end{aligned}$$

Теорема 5 [34]. Пусть (2.4) — решение укороченного уравнения (2.8) с $\mathbf{u} \in \mathbf{U}_j^{(d)}$. Тогда в уравнении (2.12) оператор

$$\mathcal{L}(x) = \frac{\delta \tilde{f}_j^{(d)}(x, y)}{\delta y} \quad \text{на } y = c_r x^r, \quad (2.14)$$

т. е. равен первой вариации, вычисленной на решении (2.4). При этом $\mathbf{S}(\mathcal{L}z) = (v, 1)$, где $v = \langle Q_1, (1, r) \rangle - r$ с $Q_1 \in \Gamma_j^{(d)}$.

Пусть $\nu(k)$ — характеристический многочлен дифференциальной суммы $\mathcal{L}(x)z$, т. е.

$$\nu(k) = x^{-v-k} \mathcal{L}(x)x^k. \quad (2.15)$$

Если $\nu(k) \not\equiv 0$, то корни k_1, \dots, k_s многочлена $\nu(k)$ называются *собственными значениями укороченного решения* (2.4). Те из вещественных собственных чисел k_i , которые лежат в конусе задачи (2.13), называются *критическими числами*.

2.4. Постановка задачи о степенно-логарифмических разложениях решений [32, 35] и [33, § 1]. Если для уравнения (2.12) с $\nu(k) \not\equiv 0$ искать решения в виде степенного ряда

$$z = \sum c_s x^s, \quad \omega s < \omega r, \quad (2.16)$$

где $c_s = \text{const} \in \mathbb{R}$, то такое разложение решений существует только при определенных условиях. При этом основное условие — это отсутствие критических значений. Если же не накладывать этих условий, то получаются разложения вида (2.16), где c_s суть многочлены от $\ln x$.

Задача 2. Для решений уравнения (2.12) найти разложения

$$z = \sum \beta_s (\ln x) x^s, \quad (2.17)$$

где β_s суть многочлены от $\ln x$ и показатели s лежат в конусе задачи (2.13).

2.5. Носитель разложения решения [32, 35] и [33, § 3]. Рассмотрим уравнение (2.12) в невырожденном случае, когда $\mathcal{L} \not\equiv 0$ и $\nu(k) \not\equiv 0$. Тогда члену $\mathcal{L}(x)z$ соответствует только одна вершина $(v, 1)$ многоугольника $\Gamma(\tilde{f})$. Параллельно сдвинем носитель $\mathbf{S}(\tilde{f})$ на вектор $-(v, 1)$. Тогда вершина $(v, 1)$ сдвинется в начало координат. Пусть \mathbf{S}'_+ — множество конечных сумм векторов $Q \in \mathbf{S}' \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{S}(\tilde{f}) - (v, 1)$ и пусть

$$\mathbf{K} = \mathbf{S}'_+ \cap \{q_2 = -1\}. \quad (2.18)$$

Пусть \varkappa — число критических значений k_i укороченного решения (2.4). Рассмотрим по отдельности случаи с $\varkappa = 0$ и $\varkappa = 1$.

Случай $\varkappa = 0$.

Теорема 6. В случае $\varkappa = 0$ имеется разложение (2.16) решения уравнения (2.12), в котором все показатели s лежат в множестве \mathbf{K} и все коэффициенты c_s определяются однозначно.

Лемма 1. Пусть $\Gamma_j^{(0)}$ — такая вершина многоугольника $\Gamma(f)$ уравнения (2.1), что укороченное уравнение $\tilde{f}_j^{(0)}(X) = 0$ имеет решение (2.4), вектор $\omega(1, r) \in \mathbf{U}_j^{(0)}$ и все точки сдвинутого носителя $\mathbf{S}(f) - \Gamma_j^{(0)}$ представляются в виде $lR_1 + mR_2$, где целые $l, m \geq 0$, R_1 и R_2 — некоторые векторы. Тогда для множества (2.18) уравнения (2.12) справедливо включение

$$\mathbf{K} \subset \{s = r + l_1 r_1 + l_2 r_2, \text{ целые } l_1, l_2 \geq 0, l_1 + l_2 > 0\},$$

где $r_1 = \langle (1, r), R_1 \rangle$, $r_2 = \langle (1, r), R_2 \rangle$.

Точечное множество \mathbf{Z} плоскости \mathbb{R}^2 называется *решеткой*, если для любых двух векторов $Q, Q' \in \mathbf{Z}$ их сумма $Q + Q'$ и разность $Q - Q'$ принадлежат \mathbf{Z} . Векторы B_1 и B_2 образуют *базис решетки* \mathbf{Z} , если любая точка Q решетки \mathbf{Z} представляется в виде $Q = n_1 B_1 + n_2 B_2$, где n_1 и $n_2 \in \mathbb{Z}$, т. е. целые числа. Пусть \mathbf{S} — некоторое множество в \mathbb{R}^2 и точка $Q \in \mathbf{S}$. Множество точек $\mathbf{S}' \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{S} - Q$ будем называть *сдвинутым множеством* \mathbf{S} . Для укороченного решения (2.4) носитель s состоит из двух точек $Q_1 = (0, 1)$ и $Q_2 = (r, 0)$. Поэтому сдвинутый носитель s' состоит из точек 0 и $Q_2 - Q_1 = (r, -1)$.

Замечание 2. АЕсли сдвинутые носители $\mathbf{S}'(f)$ уравнения (2.1) и s' укороченного решения (2.4) лежат в некоторой решетке \mathbf{Z} , то множество

$$\mathbf{K} \subset \mathbf{Z} \cap \{q_2 = -1\} \cap \mathcal{K}. \quad (2.19)$$

Случай $\varkappa = 1$. Пусть k_1 — единственное критическое значение. Обозначим через $\mathbf{S}'_+(k_1)$ множество конечных сумм векторов $Q \in \mathbf{S}' \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{S}(\tilde{f}) - (v, 1)$ и вектора $(k_1, -1)$, и положим

$$\mathbf{K}(k_1) = \mathbf{S}'_+(k_1) \cap \{q_2 = -1\}. \quad (2.20)$$

Теорема 7. Если в случае $\varkappa = 1$ единственное критическое значение k_1 не лежит в множестве \mathbf{K} , то имеется разложение (2.16) решения уравнения (2.12), где показатели s лежат в множестве $\mathbf{K}(k_1)$, при этом коэффициент c_{k_1} произволен, а остальные коэффициенты c_s определяются однозначно.

Лемма 2. Если множество (2.18) имеет вид

$$\mathbf{K} = \{k = r + l\tilde{r}, \text{ целые } l > 0\},$$

то множество (2.20) имеет вид

$$\mathbf{K}(k_1) = \{k = r + l\tilde{r} + m(k_1 - r), \text{ целые } l, m \geq 0, l + m > 0\}.$$

Замечание 3. Если множество $\mathbf{S}' = \mathbf{S}(\tilde{f}) - (v, 1)$ и точка $(k_1, -1)$ лежат в некоторой решетке $\mathbf{Z}(k_1)$, то

$$\mathbf{K}(k_1) \subset \mathbf{Z}(k_1) \cap \{q_2 = -1\} \cap \mathcal{K}. \quad (2.21)$$

Теорема 8. Множества (2.18) и (2.20) не имеют точек накопления на прямой \mathbb{R} , если множество $\mathbf{S}(\tilde{f})$ не имеет точек накопления на плоскости \mathbb{R}^2 .

Теорема 9. Если в случае $\varkappa = 1$ единственное критическое значение $k_1 \in \mathbf{K}$, то уравнение (2.12) имеет формальное решение вида (2.17)

$$z = z^*(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum \beta_s x^s, \quad s \in \mathbf{K}, \quad (2.22)$$

где β_s — постоянные, если $\omega s < \omega k_1$, β_s суть многочлены от $\ln x$, если $\omega s \geq \omega k_1$, и β_{k_1} является линейным многочленом от $\ln x$ с произвольным свободным членом.

Максимум порядков l всех производных $d^l y/dx^l$, входящих в дифференциальный моном $a(X)$, называется его *порядком дифференцирования* и обозначается $\pi(a)$. *Порядком дифференцирования $\pi(f)$ суммы (1.1)* называется наибольший из порядков дифференцирования $\pi(a_i)$ ее мономов $a_i(X)$.

Теорема 10 [34]. Пусть в ситуациях теорем 6, 7 в сумме (2.12) $\pi(\mathcal{L}z) = \pi(\tilde{f})$, тогда разложение (2.16) абсолютно сходится для достаточно малых $|x| \neq 0$, если $x \rightarrow 0$, и $|x|^{-1} \neq 0$, если $x \rightarrow \infty$ (т. е. для $|x|^{-\omega} \neq 0$).

2.6. Постановка задачи о нестепенных асимптотиках решений [32, 36] и [33, § 5].

Пусть $x \rightarrow 0$ или $x \rightarrow \infty$. Две функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ называются *слабо (асимптотически) эквивалентными*, если

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} \rightarrow 1.$$

При этом функция $\varphi(x)$ является *слабой асимптотикой* функции $\psi(x)$ и наоборот. Обозначим k -кратные экспоненту и логарифм через $\exp^{(k)} x$ и $\ln^{(k)} x$ соответственно, т. е.

$$\exp^{(k)}\{x\} \stackrel{\text{def}}{=} \exp\{\exp\{\dots(\exp\{x\})\dots\}\} \quad \text{и} \quad \ln^{(k)} x \stackrel{\text{def}}{=} \ln(\ln(\dots(\ln x)\dots)).$$

Задача 3. Для решений уравнения (2.1), где $f(x, y)$ — дифференциальная сумма, найти все (слабые) асимптотики вида

$$y = cx^r (\exp\{x\})^{s_1} \dots (\exp^{(k)}\{x\})^{s_k} (\ln x)^{t_1} \dots (\ln^{(l)} x)^{t_l}, \quad (2.23)$$

где $c = \text{const} \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$; $r, s_i, t_i = \text{const} \in \mathbb{R}$.

В п. 2.2 изложен метод вычисления всех степенных асимптотик, т. е. асимптотик вида (2.4). Поэтому здесь сосредоточимся на вычислении всех *нестепенных асимптотик* решений, т. е. не имеющих вида (2.4).

Пусть $y = \varphi(x)$ — решение уравнения (2.1), и функция $\varphi(x)$ имеет порядок r . Тогда *нормальным конусом \mathbf{u} этого решения* является луч

$$\mathbf{u} = \begin{cases} \lambda(0, -1), & \text{если } r = -\infty; \\ \lambda\omega(1, r), & \text{если } r \in \mathbb{R}; \\ \lambda(0, 1), & \text{если } r = +\infty, \quad \lambda > 0. \end{cases}$$

Понятие *конус задачи* применимо и к решениям с так определенным нормальным конусом \mathbf{u} .

Две функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ *сильно (асимптотически) эквивалентны*, если

$$\varphi(x) = \psi(x) [1 + o(|x|^{\omega\varepsilon} |\psi(x)|^{\omega_2\varepsilon})]$$

для некоторого $\varepsilon < 0$, где

$$\omega_2 = \begin{cases} -1, & \text{если } \psi(x) \rightarrow 0, \\ 0, & \text{если } \psi(x) \rightarrow \text{const} \neq 0, \\ 1, & \text{если } \psi(x) \rightarrow \infty. \end{cases}$$

При этом функция $\varphi(x)$ является *сильной асимптотикой* функции $\psi(x)$ и наоборот. Это частный случай сильной асимптотической эквивалентности, введенной в § 1 этой главы.

Теорема 11 [13, гл. VI, теорема 1.1]. Если решение $y = \varphi(x)$ уравнения (2.1) имеет нормальный конус \mathbf{u} , то укороченное уравнение (2.8), для которого $\mathbf{u} \subset \mathbf{U}_j^{(d)}$, имеет сильно асимптотически эквивалентное решение $y = \psi(x)$.

Это теорема 1 для $n = 2$.

Таким образом, задача 3 сводится к нахождению всех укороченных уравнений и их нормальных конусов и к конечному числу следующих задач.

Задача 4. Для укороченного уравнения (2.8) найти все (слабые) асимптотики его решений $y = \psi(x)$ с $\omega(1, r) \in \mathbf{U}_j^{(d)}$.

Уравнению (2.1) соответствует многоугольник $\Gamma(f)$, а укороченному уравнению (2.8) — его ребро или вершина $\Gamma_j^{(d)}$. Ниже рассмотрим по отдельности 3 способа редукции задачи 4: в зависимости от наклона ребра.

2.7. Случай вертикального ребра $\Gamma_j^{(1)}$ [32, 36] и [33, § 5]. Если ребро $\Gamma_j^{(1)}$ вертикально, то его нормальный конус

$$\mathbf{U}_j^{(1)} = \lambda\omega(1, 0), \quad \lambda > 0, \quad (2.24)$$

и у всех точек $Q = (q_1, q_2) \in \Gamma_j^{(1)}$ координата q_1 одинакова. Положим

$$g(x, y) = x^{-q_1} \widehat{f}_j^{(d)}(x, y), \quad (2.25)$$

тогда носитель $\mathbf{S}(g)$ лежит на координатной оси $q_1 = 0$. Согласно (2.24) все степенные решения (2.4) с $\omega(1, r) \in \mathbf{U}_j^{(1)}$ являются постоянными $y = y^0 = \text{const}$, где y^0 — корень определяющего уравнения

$$\widetilde{g}(y) \stackrel{\text{def}}{=} g(0, y) = 0. \quad (2.26)$$

Корень y^0 уравнения (2.26) называется *кратным*, если в нем производная $d\widetilde{g}(y)/dy$ равна нулю.

Для отыскания нестепенных решений уравнения (2.8) сделаем *логарифмическое преобразование*

$$\xi \stackrel{\text{def}}{=} \ln x. \quad (2.27)$$

Согласно теореме 2.4 из [13, гл. VI] при этом дифференциальная сумма $g(x, y)$ перейдет в дифференциальную сумму $h(\xi, y) \stackrel{\text{def}}{=} g(x, y)$ и уравнение (2.8) примет вид

$$h(\xi, y) = 0. \quad (2.28)$$

Из (2.27) видно, что $\xi \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow 0$ и при $x \rightarrow \infty$, т. е. для уравнения (2.28) получаем задачи 1 и 2 с конусом задачи

$$p_1 \geq 0. \quad (2.29)$$

Теорема 12. Конечные предельные значения $y^0 \neq 0$ непостоянных решений уравнения (2.28) являются кратными решениями уравнения (2.26).

Пусть ребро $\Gamma_j^{(1)}$ соединяет вершины $\Gamma_{j-1}^{(0)} = (q'_1, q'_2)$ и $\Gamma_j^{(0)} = (q'_1, q''_2)$, где целые $q'_2 < q''_2$. Будем говорить, что уравнение (2.26) имеет *бесконечный корень*, если степень многочлена в (2.26) меньше q''_2 , и имеет *нулевой корень*, если у многочлена в (2.26) наименьшая степень по y больше q'_2 .

Теорема 13. Если уравнение (2.26) не имеет бесконечного (нулевого) корня, то уравнение (2.28) не имеет решений, стремящихся к бесконечности (нулю).

Заметим, что укорочение уравнения (2.28) относительно вектора $(1, 0)$ является уравнением (2.26), т. е. $\tilde{g}(y) \equiv \hat{h}(\xi, y)$. Для нахождения решений уравнения (2.28) с бесконечными и нулевыми предельными значениями y надо для уравнения (2.28) выделить укороченные уравнения, соответствующие конусу задачи (2.29). Для нахождения решений уравнения (2.28) с конечными предельными значениями надо найти все кратные корни уравнения (2.26). Пусть y^0 — такой кратный корень. Тогда параллельным сдвигом $y = y^0 + z$ надо поместить его в начало координат. Уравнение (2.28) примет вид

$$\tilde{h}(\xi, z) \stackrel{\text{def}}{=} h(\xi, y^0 + z) = 0. \quad (2.30)$$

Теперь для уравнения (2.30) надо выделять его укороченные уравнения с конусом задачи $p_1 \geq 0, p_2 \leq 0$. Это опять задача 1.

2.8. Случай наклонного ребра $\Gamma_j^{(1)}$ [32, 36] и [33, § 5]. Пусть вектор $(1, r)$ с $r \neq 0$ является нормальным к ребру $\Gamma_j^{(1)}$.

Теорема 14 [13, гл. VI, теорема 2.2]. Степенное преобразование

$$y = zx^r \quad (2.31)$$

приводит уравнение (2.8) к виду

$$\tilde{f}(x, z) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{f}_j^{(1)}(x, zx^r) = 0,$$

где $\tilde{f}(x, z)$ — дифференциальная сумма и ее носитель $S(\tilde{f})$ расположен на вертикали $q_1 = \text{const}$.

Таким образом, степенным преобразованием (2.31) случай наклонного ребра сводится к случаю вертикального ребра. Если в укороченное уравнение (2.8) подставить $y = cx^r$, то для коэффициента c получается определяющее уравнение

$$x^s \tilde{f}(c) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{f}_j^{(1)}(x, cx^r) = 0, \quad (2.32)$$

где $\tilde{f}(c)$ — многочлен от коэффициента c . Здесь он играет ту же роль, что и многочлен $\tilde{g}(y)$ из уравнения (2.26).

Замечание 4. В частности, если этот многочлен не имеет бесконечного, нулевого и кратных корней, то уравнение (2.8) не имеет подходящих нестепенных решений, т. е. преобразование (2.31) и дальнейшее исследование делать не надо.

2.9. Случай горизонтального ребра $\Gamma_j^{(1)}$ [32, 36] и [33, § 5]. В этом случае у всех точек $Q = (q_1, q_2)$ ребра $\Gamma_j^{(1)}$ координата q_2 одинакова. Положим

$$g(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} y^{-q_2} \tilde{f}_j^{(1)}(x, y) \quad (2.33)$$

и сделаем логарифмическое преобразование

$$\eta = \frac{d \ln y}{dx}. \quad (2.34)$$

Согласно теореме 2.4 из [13, гл. VI] при этом преобразовании дифференциальная сумма $g(x, y)$ перейдет в дифференциальную сумму $h(x, \eta) \stackrel{\text{def}}{=} g(x, y)$ и уравнение (2.8) примет вид

$$h(x, \eta) = 0. \quad (2.35)$$

Теперь для уравнения (2.35) получаем задачу 1 с конусом задачи

$$p_1 + p_2 \geq 0.$$

ГЛАВА II. ОБТЕКАНИЕ ИГЛЫ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ

§ 1. Преобразование системы уравнений Навье—Стокса

Рассмотрим систему уравнений Навье—Стокса [37, гл. VIII, § 76]; [38, гл. 3, п. 3.3], описывающую стационарный поток вязкой несжимаемой жидкости в пространстве

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \\ u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь x, y и z — прямоугольные координаты; u, v и w — компоненты вектора скорости потока соответственно по осям x, y и z ; p — давление; ρ — плотность; ν — кинематический коэффициент вязкости; $\rho, \nu = \text{const} \neq 0$.

После перехода к цилиндрическим координатам система приобретает вид [37, гл. VIII, § 76]; [38, приложение 2]

$$\begin{aligned}
V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\varepsilon}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \varepsilon} + V_x \frac{\partial V_r}{\partial x} - \frac{V_\varepsilon^2}{r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= \nu \left(\nabla^2 V_r - \frac{V_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \right), \\
V_r \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial r} + \frac{V_\varepsilon}{r} \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \varepsilon} + V_x \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial x} + \frac{V_r V_\varepsilon}{r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} \frac{1}{r} &= \nu \left(\nabla^2 V_\varepsilon + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \varepsilon} - \frac{V_\varepsilon}{r^2} \right), \\
V_r \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{V_\varepsilon}{r} \frac{\partial V_x}{\partial \varepsilon} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \nu (\nabla^2 V_x), \\
\frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(rV_x)}{\partial x} &= 0,
\end{aligned} \tag{1.2}$$

где

$$\nabla^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2};$$

x , r и ε — цилиндрические координаты $y = r \sin \varepsilon$, $z = r \cos \varepsilon$; V_x , V_r и V_ε — компоненты вектора скорости потока. Для осесимметричного потока можно исключить из системы угловую компоненту ε и соответствующую компоненту вектора скорости потока V_ε . Тогда система (1.2) принимает вид

$$\begin{aligned}
V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_r}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= \nu \left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2} - \frac{V_r}{r^2} \right), \\
V_r \frac{\partial V_x}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \nu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} \right), \\
\frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{\partial(rV_x)}{\partial x} &= 0.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Используя третье уравнение, введем функцию тока ψ по формулам

$$V_x = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad V_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{1.4}$$

Тогда система (1.3) принимает вид

$$\begin{aligned}
f_1 \stackrel{\text{def}}{=} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \\
+ \nu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right] &= 0, \\
f_2 \stackrel{\text{def}}{=} \left[-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \\
- \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right] &= 0.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

В обозначениях § 1 главы I здесь

$$x_1 = x, \quad x_2 = r, \quad x_3 = \psi, \quad x_4 = p.$$

§ 2. Первые приближения решения в бесконечности

Рассмотрим теперь обтекание полубесконечной иглы, занимающей полупрямую $\{x, y, z : x \geq 0, y = z = 0\}$, стационарным потоком вязкой несжимаемой жидкости в положительном направлении оси x . Такое обтекание описывается системой уравнений Навье—Стокса (1.1) с граничными условиями

$$\begin{aligned} u = u_\infty, \quad v = w = 0, \quad p = p_0 \quad \text{при} \quad x = -\infty, \quad u_\infty, p_0 = \text{const} \neq 0; \\ u = v = w = 0 \quad \text{при} \quad x \geq 0, \quad y = z = 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

В цилиндрических координатах это обтекание описывается системой (1.3) с граничными условиями

$$\begin{aligned} V_x = u_\infty, \quad V_r = 0, \quad p = p_0 \quad \text{при} \quad x = -\infty; \\ V_x = V_r = 0 \quad \text{при} \quad x \geq 0, \quad r = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Согласно (1.4) осесимметричное обтекание также описывается системой (1.5) с граничными условиями в бесконечности и на игле

$$\psi = u_\infty \frac{r^2}{2}, \quad p = p_0 \quad \text{при} \quad x = -\infty, \quad u_\infty, p_0 = \text{const} \neq 0; \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial r} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = 0 \quad \text{при} \quad x \geq 0, \quad r = 0. \quad (2.4)$$

Заменой координат

$$x = 2\nu u_\infty^{-1} \tilde{x}, \quad r = 2\nu u_\infty^{-1} \tilde{r}, \quad \psi = 2\nu^2 u_\infty^{-1} \tilde{\psi}, \quad p = \frac{\tilde{p} u_\infty^2}{4}$$

эта задача сводится к задаче с $u_\infty = 2$, $\nu = 1$ и с новым $p_0 = \text{const} \neq 0$, которая рассматривается ниже.

Лемма 1. *Граничные условия*

$$\psi = r^2, \quad p = p_0 \quad \text{при} \quad r \rightarrow +\infty; \quad p_0 = \text{const} \quad (2.5)$$

имеют место для $x \in (-\infty, +\infty)$.

Доказательство. Заметим, что функции $\psi = r^2$, $p = p_0$ аннулируют каждый из членов в уравнениях (1.5). Следовательно, функции (2.5) являются решением любой укороченной системы для системы (1.5). Также как в [13, гл. VI, § 6, п. 2] двигаясь по укороченным системам, имеющимся при $r \rightarrow \infty$ и $-\infty < x < 0$, можно перенести граничное условие (2.3) на случай $x > 0$, $r \rightarrow \infty$, т. е. получить условие (2.5). Для этого для системы (1.5) рассмотрим все ее укороченные системы, соответствующие граничным условиям (2.5).

Носители уравнений системы (1.5) представлены в табл. 1. Ее первый столбец содержит номер i уравнения $f_i = 0$, второй столбец содержит номер k точки Q_k носителя, третий столбец содержит сами точки Q_k носителей $\mathbf{S}(f_i)$. В уравнениях системы (1.5) в квадратные скобки объединены члены с одним и тем же векторным показателем степени.

Из граничного условия (2.5) видно, что при $r \rightarrow +\infty$ имеются граничные условия вида (1.16) главы I

$$f_3 \stackrel{\text{def}}{=} \psi - r^2 = 0, \quad f_4 \stackrel{\text{def}}{=} p - p_0 = 0.$$

Каждому из них соответствует носитель, состоящий из двух точек. А именно: $\mathbf{S}(f_3)$ состоит из точек $Q_9 = (0, 0, 1, 0)$ и $Q_{10} = (0, 2, 0, 0)$; $\mathbf{S}(f_4)$ состоит из точек $Q_{11} = (0, 0, 0, 1)$ и $Q_{12} = (0, 0, 0, 0)$. Согласно теореме 2 главы I вектор $P = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ должен удовлетворять условиям $\langle Q_9, P \rangle = \langle Q_{10}, P \rangle$ и $\langle Q_{11}, P \rangle = \langle Q_{12}, P \rangle$, т. е.

$$p_3 = 2p_2, \quad p_4 = 0. \quad (2.6)$$

В обозначениях главы I здесь $m' = l = 2$ и $R'_3 = (0, 2)$, $R'_4 = (0, 0)$. По теореме 2 главы I, согласно полученным на вектор P условиям (2.6), векторы Q_k можно спроецировать на плоскость $\tilde{Q} = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)$ по формулам $\tilde{q}_1 = q_1$, $\tilde{q}_2 = q_2 + 2q_3$, а значением q_4 мы пренебрегаем. Четвертый столбец табл. 1 содержит проекции $\tilde{Q}_k = (q_1, q_2 + 2q_3)$ векторов Q_k . Проекции $\tilde{\mathbf{S}}(f_1)$ и $\tilde{\mathbf{S}}(f_2)$ носителей уравнений системы (1.5), их выпуклые оболочки $\tilde{\Gamma}_1$, $\tilde{\Gamma}_2$ и их нормальные конусы представлены на рис. 2.

Каждому вектору $\tilde{P} = (p_1, p_2)$ соответствует укороченная система

$$\hat{f}_{i\tilde{P}}(X) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.7)$$

системы (1.5), где $\hat{f}_{i\tilde{P}}(X)$ содержит те члены из $\mathbf{S}(f_i)$, для которых скалярное произведение $\langle \tilde{P}, \tilde{Q} \rangle$ имеет наибольшее значение при этом i . Граничному условию (2.3) с $x \rightarrow -\infty$ отвечают вектор $\tilde{P} = (1, 0)$ и соответствующая укороченная система (2.7). Согласно рис. 2 и 3 эта же укороченная система соответствует векторам $\tilde{P} = (p_1, p_2)$ с $p_1 > p_2/2 > 0$, т. е. значениям $x < 0$ с $\ln|x| > (1/2)\ln r > 0$ при $r \rightarrow \infty$. Следовательно, граничные условия (2.5) выполнены при этих x и r . При $r \rightarrow \infty$ движению по x от $-\infty$ до 0 соответствует поворот вектора \tilde{P} в положительном направлении от $(1, 0)$ до $(0, 1)$. Двигаясь по соответствующим укороченным системам (2.7) переносим условие (2.5) на значения $x \in (-\infty, 0)$. Двигаясь по тем же укороченным системам в обратном направлении, т. е. от вектора $\tilde{P} = (0, 1)$ к вектору $\tilde{P} = (2, 1)$, перенесем условие (2.5) на $x \in [0, +\infty)$. ■

Таблица 1

Выделение укороченной системы. Здесь $\Delta_k \stackrel{\text{def}}{=} \langle \tilde{P}, \tilde{Q}_k \rangle$

i	k	Q_k	\tilde{Q}_k	Δ_k	Γ
1	1	-2, -3, 2, 0	-2, 1	-3	
	2	0, -1, 0, 1	0, -1	-1	+
	3	-1, -3, 1, 0	-1, -1	-3	
	4	-3, -1, 1, 0	-3, 1	-5	
2	5	-1, -4, 2, 0	-1, 0	-2	+
	6	-1, 0, 0, 1	-1, 0	-2	+
	7	0, -4, 1, 0	0, -2	-2	+
	8	-2, -2, 1, 0	-2, 0	-4	

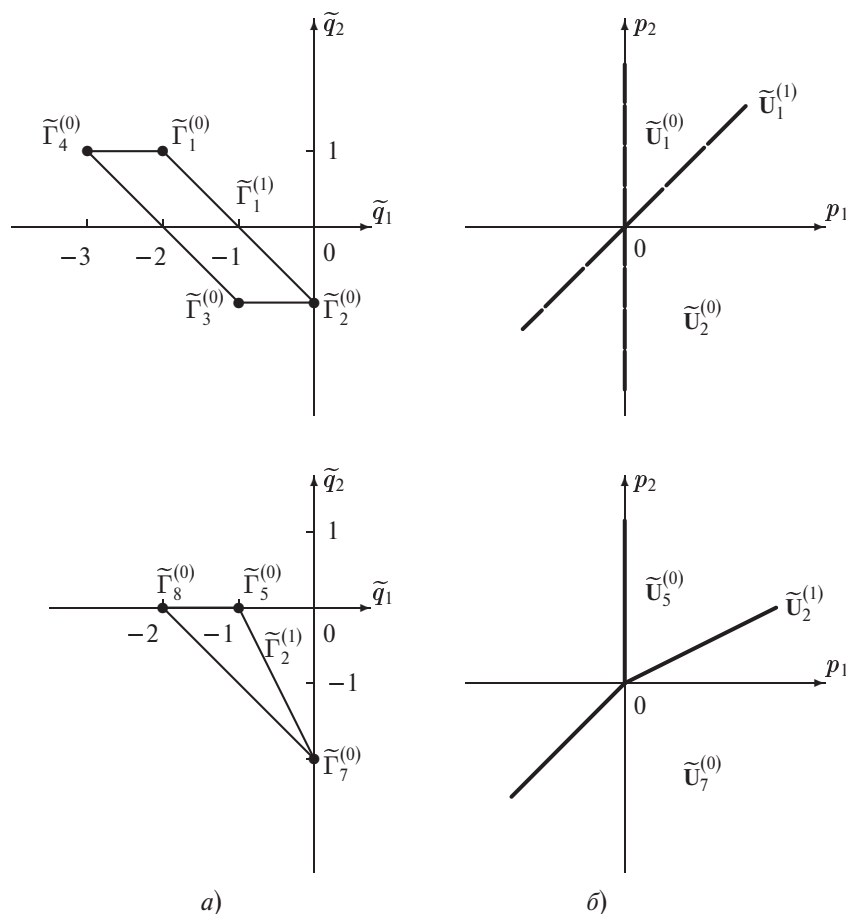


Рис. 2. Проекция носителей уравнений системы (1.5) (а) и нормальные конусы проекций (б)

Традиционно граничные условия на внешней границе пограничного слоя берутся из потока, невозмущенного обтекаемым препятствием (в данном случае иглой). Следовательно, граничные условия (2.3) продлеваются до граничных условий (2.5). Но эта процедура основана на физических соображениях. В лемме 1 это сделано чисто математически.

Лемма 2. Для системы (1.5) укороченная система, соответствующая пограничному слою на игле и граничным условиям (2.5), единственна. Она имеет нормальный вектор $P = (2, 1, 2, 0)$ и есть

$$\hat{f}_{11} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} \hat{f}_{21} \stackrel{\text{def}}{=} & \left[-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right] + \\ & + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right) = 0, \end{aligned} \tag{2.9}$$

||стиль

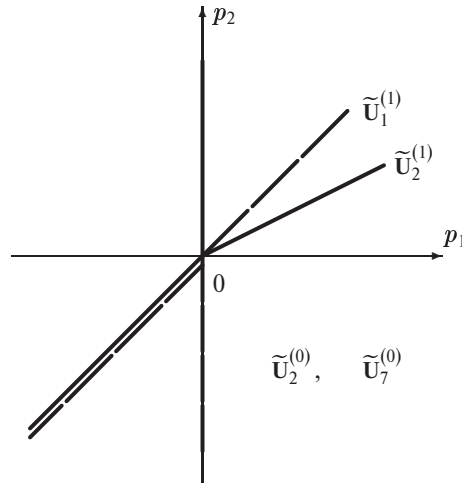


Рис. 3. Совмещенные нормальные конусы проекций носителей уравнений системы (1.5)

а автомодельные координаты ξ , $h(\xi)$ и $p(\xi)$ для задачи (2.4), (2.5), (2.8), (2.9) суть

$$\xi = \frac{r^2}{x}, \quad h(\xi) = \frac{\psi}{x}, \quad p(\xi) = p. \quad (2.10)$$

Доказательство. Игла описывается как $x \geq 0$, $r = 0$. Вблизи иглы, при $x \rightarrow +\infty$ и $r \rightarrow 0$, имеем $p_1 > 0$, $p_2 < 0$. Следовательно, игле соответствует IV квадрант плоскости (p_1, p_2) . Граничные условия (2.5) при $x \rightarrow +\infty$ и $r \rightarrow +\infty$ означают, что $p_1, p_2 > 0$, т. е. им соответствуют точки из I квадранта плоскости (p_1, p_2) . Нас интересуют такие грани проекций $\tilde{\Gamma}_1$ и $\tilde{\Gamma}_2$, расширенный нормальный конус которых содержит как IV квадрант, так и точки из I квадранта плоскости (p_1, p_2) . Совмещение рисунков нормальных конусов проекций показано на рис. 3. Из него видно, что IV квадрант и точки из I квадранта содержатся только в расширенном нормальном конусе системы $\check{U}_J^D = \check{U}_2^{(1)} \cap \check{U}_2^{(0)}$. Направляющий вектор нормального конуса $\tilde{U}_2^{(1)}$ это вектор $\tilde{P} = (2, 1)$. По вектору $\tilde{P} = (p_1, p_2)$ восстанавливаем вектор $P = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ согласно равенствам (2.6) и получаем в исходных координатах (p_1, p_2, p_3, p_4) вектор $P = (2, 1, 2, 0)$. Полученному вектору P соответствуют грани носителей $S(f_1)$ и $S(f_2)$, содержащие точки Q_1, Q_2, Q_3, Q_6 . Этим точкам соответствует укороченная система (2.8), (2.9).

Пятый столбец табл. 1 содержит значения скалярных произведений $\Delta_k = \langle \tilde{P}, \tilde{Q}_k \rangle = \langle P, Q_k \rangle$ для $\tilde{P} = (2, 1)$, $P = (2, 1, 2, 0)$. В шестом столбце (Т) знак «+» отмечает максимальные значения $\langle \tilde{P}, \tilde{Q}_k \rangle$ для данного i , соответствующие им члены суммы f_i включены в укорочение $\hat{f}_{i1}^{(d_i)}$ в (2.8), (2.9).

В обозначениях § 1 главы I имеем $l = 2$ и полученный вектор $P = (P', P'')$, т. е. $P' = (2, 1)$. Кроме того, вектор $B'_1 = (-1, 2)$ составляет базис в пространстве векторов $Q' = (q_1, q_2)$, удовлетворяющих условию $\langle P', Q' \rangle = 0$. Тогда согласно теореме 3 главы I, $T'_3 = (1, 0)$, $T'_4 = (0, 0)$ и автомодельные координаты ξ , h , p имеют вид

$$\xi = \frac{r^2}{x}, \quad x_3 \stackrel{\text{def}}{=} \psi = xh(\xi), \quad x_4 \stackrel{\text{def}}{=} p = p(\xi),$$

что соответствует (2.10). ■

§ 3. Однослойные автомодельные асимптотики решения

В автомодельных координатах (2.10) система уравнений (2.8), (2.9) принимает вид

$$\widehat{f}_{11} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\rho} \xi p' \right) = 0, \quad (3.1)$$

$$\widehat{f}_{21} \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{4}{x} \left(h h'' + 2 \xi h''' + 2 h'' + \frac{1}{\rho} \xi p' \right) = 0, \quad (3.2)$$

где $' = d/d\xi$. Из уравнения (3.1) следует, что

$$\frac{1}{\rho} \xi p' = 0,$$

следовательно, из уравнения (3.2) получаем

$$\varphi(\xi, h) \stackrel{\text{def}}{=} h h'' + 2 \xi h''' + 2 h'' = 0. \quad (3.3)$$

Для полученной системы (3.1), (3.2) граничные условия (2.4), (2.5) в автомодельных координатах (2.10) имеют вид

$$h = \xi, \quad p = p_0 \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow +\infty, \quad (3.4)$$

$$h = h' = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0. \quad (3.5)$$

Из (3.1) и (3.4) следует, что

$$p = \text{const} = p_0 \quad \text{при} \quad \xi \neq 0.$$

Таким образом, получили уравнение (3.3) с граничными условиями (3.5) и

$$h = \xi \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow +\infty. \quad (3.6)$$

Итак, доказана

Лемма 3. В автомодельных координатах (2.10) задача (2.4)–(2.7) сводится к задаче (3.1), (3.2), (3.4), (3.5), которая, после исключения p , сводится к задаче (3.3), (3.5), (3.6).

Лемма 4. Уравнение (3.3) не имеет решений, удовлетворяющих граничному условию (3.5).

Доказательство. Носитель уравнения (3.3) состоит из двух точек $Q_1 = (-2, 2)$ и $Q_2 = (-2, 1)$. Носитель, его выпуклая оболочка и нормальные конусы ее граней показаны на рис. 4. Граничное условие (3.5) накладывается при $\xi \rightarrow 0$, т. е. $p_1 \leq 0$. Из граничного условия (3.5) видно, что ищутся решения $h \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow 0$, т. е. $p_2 \leq 0$. Запишем h и ξ в виде (1.2) главы I, тогда $\xi = b_1 \tau^{p_1}$, $h = b_2 \tau^{p_2}$, т. е. $h = b_3 \xi^{p_2/p_1}$, где b_1, b_2, b_3 — постоянные, тогда $h' = b_4 \xi^{-1+p_2/p_1}$, где b_4 — постоянная. По граничному условию (3.5) $h' \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow 0$, т. е. $-1 + p_2/p_1 \geq 0$, следовательно, $p_2 \leq p_1$. Таким образом, получен конус задачи $\mathcal{K} = \{p_2 \leq p_1 \leq 0\}$. Он заштрихован на рис. 4б, из которого видно, что с конусом задачи пересекается только нормальный конус $U_2^{(0)}$, который соответствует вершине $Q_2 = \Gamma_2^{(0)}$.

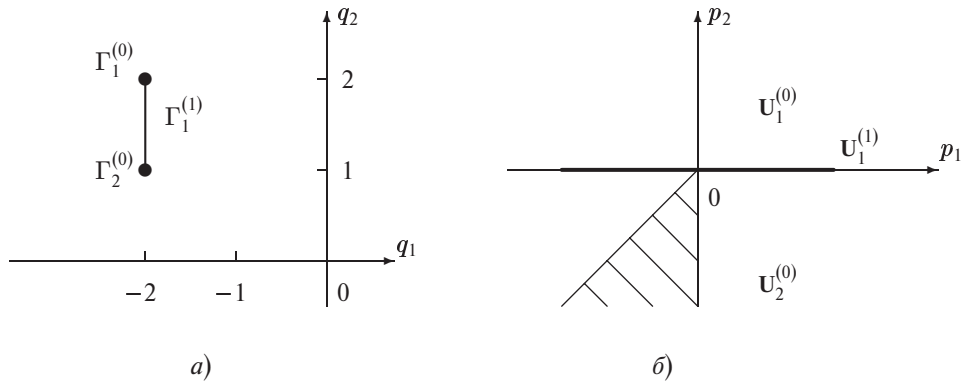


Рис. 4. Носитель уравнения (3.3) и его выпуклая оболочка (а); нормальные конусы ее граней (б)

Вершине $Q_2 = \Gamma_2^{(0)}$ соответствует укороченное уравнение

$$\widehat{\varphi}_2^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} 2h''' \xi + 2h'' = 0, \tag{3.7}$$

которое после умножения на ξ^2 становится уравнением Эйлера с характеристическим уравнением

$$\lambda(\lambda - 1)^2 = 0,$$

его корни $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 1$ (кратный корень). Следовательно, все решения уравнения (3.7) имеют вид $h = c_0 + c_1 \xi + c_2 \xi \ln \xi$, т. е. $h' = c_1 + c_2 + c_2 \ln \xi$, где c_0, c_1, c_2 — произвольные постоянные. Из условия (3.5) на h' получаем, что $c_2 = c_1 = 0$, а из условия на h , получаем, что $c_0 = 0$. Следовательно, $h \equiv 0$. Таким образом, укороченное уравнение, соответствующее вершине Q_2 , не имеет нетривиальных решений, удовлетворяющих граничному условию (3.5). Согласно теореме 1 главы I, уравнение (3.3) не имеет нетривиальных асимптотических решений вблизи иглы.

Следовательно, уравнение (3.3) не имеет нетривиальных решений, удовлетворяющих граничному условию (3.5). ■

Итак, задача (2.4), (2.5), (2.8), (2.9) не имеет автомодельного решения. Этот результат имеется в статье Лайтхилла и Плауэрта [11] (см. также [39, § 35]).

§ 4. Однослойные неавтомодельные асимптотики

В уравнениях (2.8), (2.9) делаем замену переменных

$$x = x, \quad \xi = \frac{r^2}{x}, \quad h(x, \xi) = \frac{\psi}{x}, \quad p(x, \xi) = p, \tag{4.1}$$

т. е. в качестве независимых переменных берем x и ξ . Тогда

$$\widehat{f}_{11} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\rho r} \xi \frac{\partial p}{\partial \xi} = 0, \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned} \widehat{f}_{21} \stackrel{\text{def}}{=} & 4 \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial \xi} \frac{\partial h}{\partial \xi} - 4 \frac{1}{x} h \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} - 4 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} - \\ & - 8 \frac{1}{x} \xi \frac{\partial^3 h}{\partial \xi^3} - 8 \frac{1}{x} \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{x} \xi \frac{\partial p}{\partial \xi} \right) = 0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Граничные условия (2.4), (2.5) принимают вид

$$h = \frac{\partial h}{\partial \xi} = 0 \quad \text{при} \quad x \geq 0, \quad \xi = 0, \quad (4.4)$$

$$h = \xi, \quad p = p_0 \quad \text{при} \quad \xi = \infty, \quad p_0 = \text{const}. \quad (4.5)$$

Лемма 5. Система уравнений (4.2), (4.3) не имеет решений, удовлетворяющих граничным условиям (4.4), (4.5).

Доказательство. Из граничного условия (4.5) имеем $p = p_0$, т. е. $\partial p / \partial x = 0$ при $\xi \rightarrow \infty$. Из уравнения (4.2) следует, что $\partial p / \partial \xi = 0$, т. е. давление p не зависит от ξ . Следовательно, свойство $\partial p / \partial x = 0$ можно продолжить на $\xi \in (0, \infty)$. Тогда уравнение (4.3) после сокращения на 4 принимает вид

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial \xi} \frac{\partial h}{\partial \xi} - \frac{1}{x} h \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} - \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} - 2 \frac{1}{x} \xi \frac{\partial^3 h}{\partial \xi^3} - 2 \frac{1}{x} \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} = 0. \quad (4.6)$$

Носитель уравнения (4.6) состоит из двух точек $Q_1 = (-1, -2, 2)$ и $Q_2 = (-1, -2, 1)$. У них совпадает координата q_1 . Следовательно [13, гл. VI, § 3], делаем логарифмическое преобразование $t = \ln x$. Тогда

$$\frac{\partial h}{\partial x} = x^{-1} \frac{\partial h}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial \xi} = x^{-1} \frac{\partial^2 h}{\partial t \partial \xi}$$

и уравнение (4.6) принимает вид

$$\varphi(t, \xi, h) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 h}{\partial t \partial \xi} \frac{\partial h}{\partial \xi} - h \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} - \frac{\partial h}{\partial t} \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} - 2\xi \frac{\partial^3 h}{\partial \xi^3} - 2 \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} = 0. \quad (4.7)$$

Носитель этого уравнения состоит из трех точек $Q'_1 = (-1, -2, 2)$, $Q'_2 = (0, -2, 2)$, $Q'_3 = (0, -2, 1)$. У нас $x \rightarrow \infty$, поэтому $t \rightarrow \infty$, т. е. $p_1 > 0$. Из $\langle P, Q'_1 \rangle = \langle P, Q'_2 \rangle - p_1$ следует, что $\langle P, Q'_2 \rangle > \langle P, Q'_1 \rangle$. Согласно § 1 главы I, при $t \rightarrow \infty$ первым приближением уравнения (4.7) является уравнение

$$-\widehat{\varphi}(\xi, h) \stackrel{\text{def}}{=} h \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} + 2\xi \frac{\partial^3 h}{\partial \xi^3} + 2 \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} = 0. \quad (4.8)$$

При фиксированном $x \geq 0$ из уравнения (4.8) и граничного условия (4.4) следуют уравнение (3.3) с граничным условием (3.5). По лемме 4 уравнение (3.3) не имеет решений, удовлетворяющих граничному условию прилипания на игле (3.5). Следовательно, уравнение (4.8) не имеет решений, удовлетворяющих граничному условию (4.4). Согласно теореме 1 главы I, уравнение (4.7) также не имеет таких решений. Это же относится к уравнению (4.6) и системе (4.2), (4.3). ■

Итак, из лемм 4 и 5 следует

Теорема 1. Задача (2.4), (2.5), (2.8), (2.9) не имеет решений.

§ 5. Двуслойные автомоделльные асимптотики

Рассмотрим возможность существования двуслойного решения системы (1.5), удовлетворяющего граничным условиям (2.4), (2.5). Граничные условия на бесконечности (2.5) дают проекцию носителей системы (1.5), описанную в доказательстве леммы 2 и показанную на рис. 2. Но в этом случае для получения укороченной системы, соответствующей внешнему слою, рассматриваем расширенный конус системы

$\check{U}_J^D = \check{U}_1^{(1)} \cap \check{U}_5^{(0)}$ (рис. 3). Направляющий вектор нормального конуса $\tilde{U}_1^{(1)}$ — это вектор $\tilde{P} = (1, 1)$. Согласно условиям (2.6), восстанавливаем по нему вектор $P = (1, 1, 2, 0)$. Полученному вектору P соответствуют грани носителей $S(f_1)$ и $S(f_2)$, содержащие точки: Q_1, Q_2, Q_5, Q_6 . Этим точкам соответствует укороченная система

$$\begin{aligned} \hat{f}_{12} &\stackrel{\text{def}}{=} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \\ \hat{f}_{22} &\stackrel{\text{def}}{=} \left[-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (5.1)$$

В обозначениях § 1 главы I имеем $P = (P', P'')$, т. е. $P' = (1, 1)$; $B'_1 = (-2, 2)$. Согласно теореме 3 главы I, $T'_3 = (2, 0)$, $T'_4 = (0, 0)$ и автомодельные координаты для задачи (5.1), (2.4), (2.5) имеют вид

$$\eta = \frac{r^2}{x^2}, \quad x_3 \stackrel{\text{def}}{=} \psi = x^2 g(\eta), \quad x_4 \stackrel{\text{def}}{=} p = p(\eta). \quad (5.2)$$

В этих автомодельных координатах система (5.1) становится системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\hat{f}_{12} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2}{r} \left(-2\eta^{-1} g^2 + 2g g' - 4\eta g g'' + \frac{1}{\rho} \eta p' \right) = 0, \quad (5.3)$$

$$\hat{f}_{22} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2}{x} \left(-4g g'' - \frac{1}{\rho} \eta p' \right) = 0. \quad (5.4)$$

Из (5.4) следует равенство

$$\frac{1}{\rho} \eta p' = -4g g''. \quad (5.5)$$

Подставляя его в уравнение (5.3) и сокращая на $4g/r$, получаем линейное однородное уравнение

$$\varphi(\eta, g) \stackrel{\text{def}}{=} -\eta^{-1} g + g' - 2\eta g'' - 2g'' = 0. \quad (5.6)$$

Все решения уравнения (5.6) являются линейными комбинациями $g = b_1 g_1 + b_2 g_2$ двух решений

$$g_1(\eta) = \sqrt{1+\eta} - \frac{\eta}{2} \ln \frac{\sqrt{1+\eta}-1}{\sqrt{1+\eta}+1}, \quad g_2 = \eta,$$

где $b_1, b_2 = \text{const}$. Уравнение (5.6) похоже на уравнение 2.267а из справочника Камке [40], хотя к нему не сводится. Их решения также похожи. Легко видеть, что при $\eta \rightarrow \infty$ решение $g_1(\eta) \sim 2\sqrt{\eta}$, а при малых $|\eta|$ имеем

$$g_1(\eta) = 1 - \frac{\eta}{2} \ln \eta + \frac{1 + \ln 4}{2} \eta + \sum_{k=2}^{\infty} c_k \eta^k, \quad c_k = \text{const}. \quad (5.7)$$

Граничные условия на бесконечности (2.5) в автомодельных координатах (5.2) принимают вид

$$\frac{\partial g}{\partial \eta} = 1, \quad p = p_0 = \text{const} \quad \text{при} \quad \eta \rightarrow \infty. \quad (5.8)$$

Первому условию удовлетворяют только решения $g = b_1 g_1 + b_2 g_2$ с $b_2 = 1$, т. е. вида

$$g = b_1 g_1(\eta) + \eta.$$

Следовательно, при $\eta \rightarrow 0$ эти решения имеют асимптотики двух видов

$$\text{a) } g \sim b_1 = \text{const, \quad если } b_1 \neq 0,$$

$$\text{b) } g = \eta, \quad \text{если } b_1 = 0.$$

В случае а) согласно (5.5) и (5.7) при $\eta \rightarrow 0$ давление $p \sim -2\rho b_1^2/\eta$, т. е. $p \rightarrow -\infty$ при $\eta \rightarrow 0$. Но такое решение не имеет физического смысла.

В случае б) согласно (5.5) давление $p = p_0 = \text{const}$ при всех η , в том числе и при $\eta \rightarrow 0$. В этом случае во внешнем слое

$$\psi = r^2, \quad p = p_0 = \text{const},$$

и эти условия являются граничными при $\xi \rightarrow \infty$ для внутреннего слоя. Но этот случай рассмотрен в § 3, где показано отсутствие решений, удовлетворяющих условию прилипания на игле.

Итак, доказана

Лемма 6. *Задача (1.5), (2.4), (2.5) не имеет двуслойных автомодельных решений.*

§ 6. Двуслойные неавтомодельные асимптотики

В результате замены переменных

$$x = x, \quad \eta = \frac{r^2}{x^2}, \quad g(x, \eta) = \frac{\psi}{x^2}, \quad p(x, \eta) = p \quad (6.1)$$

система (5.1) принимает вид

$$\begin{aligned} \widehat{f}_{12} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2}{r} \left[\left(-2\eta^{-1} g^2 - 2x\eta^{-1} g \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{1}{2} x^2 \eta^{-1} \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 + 2g \frac{\partial g}{\partial \eta} + 2xg \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial \eta} + x^2 \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial \eta} - \right. \right. \\ \left. \left. - 4\eta g \frac{\partial^2 g}{\partial \eta^2} - 2x\eta \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial^2 g}{\partial \eta^2} - 2x \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial \eta} + 2x\eta \frac{\partial g}{\partial \eta} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial \eta} \right) + \frac{1}{\rho} \eta \frac{\partial p}{\partial \eta} \right] = 0, \quad (6.2) \end{aligned}$$

$$\widehat{f}_{22} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2}{x} \left[-4g \frac{\partial^2 g}{\partial \eta^2} + \left(2x \frac{\partial g}{\partial \eta} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial \eta} - x \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial^2 g}{\partial \eta^2} \right) + \frac{x}{2\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \eta \frac{\partial p}{\partial \eta} \right] = 0. \quad (6.3)$$

Граничные условия (2.4), (2.5) принимают вид

$$g = \frac{\partial g}{\partial \eta} = 0 \quad \text{при } x \geq 0, \quad \eta = 0, \quad (6.4)$$

$$g = \eta, \quad p = p_0 \quad \text{при } \eta = \infty, \quad p_0 = \text{const}. \quad (6.5)$$

В уравнениях (6.2) и (6.3) у слагаемых, заключенных в круглые скобки, векторные показатели степени $Q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ имеют $q_1 = 0$ и $q_1 = -1$ соответственно. Делаем логарифмическое преобразование

$$t = \ln x, \quad (6.6)$$

тогда $\partial g / \partial x = x^{-1} \partial g / \partial t$. Получим

$$\begin{aligned} \frac{r}{2} \widehat{f}_{12} \stackrel{\text{def}}{=} & \left(2g \frac{\partial g}{\partial \eta} - 2\eta^{-1} g^2 - 4\eta g \frac{\partial^2 g}{\partial \eta^2} \right) + \\ & + \left(2g \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial \eta} - 2\eta^{-1} g \frac{\partial g}{\partial t} - 2\eta \frac{\partial g}{\partial t} \frac{\partial^2 g}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial g}{\partial t} \frac{\partial g}{\partial \eta} + 2\eta \frac{\partial g}{\partial \eta} \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial \eta} \right) + \\ & + \left(\frac{\partial g}{\partial t} \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial \eta} - \frac{1}{2} \eta^{-1} \left(\frac{\partial g}{\partial t} \right)^2 \right) + \frac{1}{\rho} \eta \frac{\partial p}{\partial \eta} = 0, \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$\frac{x}{2} \widehat{f}_{22} \stackrel{\text{def}}{=} -4g \frac{\partial^2 g}{\partial \eta^2} + \left(2 \frac{\partial g}{\partial \eta} \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial \eta} - \frac{\partial g}{\partial t} \frac{\partial^2 g}{\partial \eta^2} \right) + \frac{1}{2\rho} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \eta \frac{\partial p}{\partial \eta} = 0. \quad (6.8)$$

Носители уравнений (6.7), (6.8) состоят из следующих точек

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\widehat{f}_{12}) &= \{Q'_1 = (0, -1, 2, 0), Q'_2 = (-1, -1, 2, 0), Q'_3 = (-2, -1, 2, 0), Q'_4 = (0, 0, 0, 1)\}; \\ \mathbf{S}(\widehat{f}_{22}) &= \{Q'_5 = (0, -2, 2, 0), Q'_6 = (-1, -2, 2, 0), Q'_7 = (-1, 0, 0, 1), Q'_8 = (0, 0, 0, 1)\}. \end{aligned}$$

Поскольку $t = \ln x$, то $t \rightarrow \infty$ при стремлении x к бесконечности, т. е. $p_1 > 0$. Следовательно, $\langle Q'_1, P \rangle > \langle Q'_2, P \rangle > \langle Q'_3, P \rangle$. Во втором уравнении $\langle Q'_5, P \rangle > \langle Q'_6, P \rangle$ и $\langle Q'_8, P \rangle > \langle Q'_7, P \rangle$. Согласно § 1 главы I, при $t \rightarrow \infty$ первым приближением системы уравнений (6.7), (6.8) является укороченная система, которая в точности совпадает с системой (5.3), (5.4). А граничные условия (6.5) совпадают с условиями (5.8). Будем искать решения системы (6.7), (6.8) в виде разложений по степеням t

$$\begin{aligned} g(t, \eta) &= g^{(0)}(\eta) t^m + \sum_{k=1}^{\infty} g^{(k)}(\eta) t^{m-k}, \\ p(t, \eta) &= p^{(0)}(\eta) t^m + \sum_{k=1}^{\infty} p^{(k)}(\eta) t^{m-k}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Тогда $g = g^{(0)}(\eta)$, $p = p^{(0)}(\eta)$ является решением укороченной системы (5.3), (5.4). Поскольку решения (6.9) должны удовлетворять граничным условиям (6.5), совпадающим с условиями (5.8), то $m = 0$. Следовательно, решения (6.9) системы (6.7), (6.8) имеют вид

$$\begin{aligned} g(t, \eta) &= g^{(0)}(\eta) + \sum_{k=1}^{\infty} g^{(k)}(\eta) t^{-k}, \\ p(t, \eta) &= p^{(0)}(\eta) + \sum_{k=1}^{\infty} p^{(k)}(\eta) t^{-k}, \end{aligned} \quad (6.10)$$

где $g^{(0)}(\eta)$, $p^{(0)}(\eta)$ — решение системы (5.3), (5.4), удовлетворяющее условиям (5.8). При $t \rightarrow \infty$, $\eta \rightarrow 0$ асимптотики решений (6.10) совпадают с асимптотиками для $g^{(0)}(\eta)$, $p^{(0)}(\eta)$ при $\eta \rightarrow 0$, т. е. имеют вид

$$\begin{aligned} \text{a) } g &\sim b_1 = \text{const}, \quad p \sim -\frac{2\rho b_1^2}{\eta}, \\ \text{b) } g &\sim \eta, \quad p \sim p_0 = \text{const}, \quad \text{т. е. } \psi \sim r^2. \end{aligned}$$

Случай а) не имеет физического смысла, а в случае б) получаем однослойную ситуацию, разобранный в § 4, где показано отсутствие решений, удовлетворяющих всем граничным условиям.

Итак, доказана

Лемма 7. *Задача (1.5), (2.4), (2.5) не имеет двуслойных неавтомоделных решений.*

Из лемм 6 и 7 следует

Теорема 2. *Задача (1.5), (2.4), (2.5) не имеет двуслойных решений.*

уточните
номер
теоремы

ГЛАВА III. ОБТЕКАНИЕ ИГЛЫ ВЯЗКИМ СЖИМАЕМЫМ ТЕПЛОПРОВОДНЫМ ГАЗОМ

§ 1. Система уравнений в частных производных

Стационарное движение вязкого теплопроводного газа описывается следующей системой уравнений [37, гл. XI, § 108]; [38, гл. 3, п. 3.3]:

$$\rho(\mathbf{V}, \nabla)\mathbf{V} = -\text{grad} \left(p + \frac{2}{3}\mu \text{div} \mathbf{V} \right) + 2 \text{Div} (\mu \dot{\mathbf{S}}), \quad (1.1)$$

$$\text{div} (\rho \mathbf{V}) = 0, \quad (1.2)$$

$$\rho(\mathbf{V}, \nabla) \left(h + \frac{\mathbf{V}^2}{2} \right) = \text{div} \left(2\mu \mathbf{V} \dot{\mathbf{S}} - \frac{2}{3}\mu \mathbf{V} \text{div} \mathbf{V} + \frac{\mu}{\sigma} \text{grad} h \right), \quad (1.3)$$

где $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$, \mathbf{V} — вектор скорости, p — давление, ρ — плотность, h — энтальпия, μ — динамический коэффициент вязкости, $\sigma = \mu c_p/\lambda$ — число Прандтля, λ — коэффициент теплопроводности газа, c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении, $\dot{\mathbf{S}}$ — тензор скоростей деформации.

Обозначим через V_x, V_r, V_ε компоненты вектора скорости \mathbf{V} в цилиндрической системе координат (x, r, ε) и, полагая $V_\varepsilon = 0$, будем рассматривать течение, симметричное относительно оси Ox . В этом случае все производные по углу ε будут равны нулю, а компоненты тензора $\dot{\mathbf{S}}$ будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{S}_{xx} &= \frac{\partial V_x}{\partial x}, & \dot{S}_{rr} &= \frac{\partial V_r}{\partial r}, & \dot{S}_{\varepsilon\varepsilon} &= \frac{V_r}{r}, & \dot{S}_{r\varepsilon} &= \dot{S}_{\varepsilon r} = 0, \\ \dot{S}_{rx} &= \dot{S}_{xr} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_r}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial r} \right), & \dot{S}_{\varepsilon x} &= \dot{S}_{x\varepsilon} = 0. \end{aligned}$$

Предполагается, что μ и h связаны соотношением

$$\mu = C^n h^n \quad (n = \text{const}), \quad n \in [0, 1], \quad (1.4)$$

а давление p выражается через ρ и h с помощью уравнения Клапейрона:

$$p = A\rho h, \quad (1.5)$$

где постоянные таковы: $C = (\gamma - 1)M_\infty^2$, M_∞ — число Маха, $A = (\gamma - 1)/\gamma$, $\gamma = c_p/c_v = \text{const}$, c_v — удельная теплоемкость газа при постоянном объеме.

Исключим из уравнений (1.1) и (1.3) μ и p с помощью формул (1.4) и (1.5) и введем согласно (1.2) функцию тока $\psi(x, r)$ по формулам

$$r\rho V_r = -\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad r\rho V_x = \frac{\partial\psi}{\partial r}. \quad (1.6)$$

Теперь стационарный осесимметричный поток вязкого сжимаемого теплопроводного газа описывается системой трех уравнений [41, 42]

$$\begin{aligned} f_1 \stackrel{\text{def}}{=} & \left[-\frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\rho r} \frac{\partial\psi}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho r} \frac{\partial\psi}{\partial x} \right) \right] - A \frac{\partial}{\partial r} (\rho h) + \\ & + \left[\frac{2}{3} C^n \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{h^n}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial\psi}{\partial x} \right) \right) - \frac{2}{3} C^n \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{h^n}{r} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) \right) - \right. \\ & - \frac{2C^n}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(h^n r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\rho r} \frac{\partial\psi}{\partial x} \right) \right) + C^n \frac{\partial}{\partial x} \left(h^n \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\rho r} \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) \right) + \frac{2C^n h^n}{\rho r^3} \frac{\partial\psi}{\partial x} \left. \right] - \\ & - C^n \frac{\partial}{\partial x} \left(h^n \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho r} \frac{\partial\psi}{\partial x} \right) \right) = 0, \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} f_2 \stackrel{\text{def}}{=} & \left[\frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\rho r} \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho r} \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) \right] - A \frac{\partial}{\partial x} (\rho h) + \\ & + \left[\frac{2}{3} C^n \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^n}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial\psi}{\partial x} \right) \right) - \frac{2}{3} C^n \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^n}{r} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) \right) - \right. \\ & - \frac{C^n}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(h^n r \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho r} \frac{\partial\psi}{\partial x} \right) \right) + 2C^n \frac{\partial}{\partial x} \left(h^n \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho r} \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) \right) \left. \right] + \\ & + \frac{C^n}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(h^n r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\rho r} \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) \right) = 0, \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} f_3 \stackrel{\text{def}}{=} & \left[\frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{A}{\rho r} \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial(\rho h)}{\partial r} + \frac{A}{\rho r} \frac{\partial\psi}{\partial r} \frac{\partial(\rho h)}{\partial x} \right] + C^n h^n \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho r} \frac{\partial\psi}{\partial x} \right) \right)^2 + \\ & + \left[2C^n h^n \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\rho r} \frac{\partial\psi}{\partial x} \right) \right)^2 + 2C^n h^n \left(\frac{1}{r^2 \rho} \frac{\partial\psi}{\partial x} \right)^2 + 2C^n h^n \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho r} \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) \right)^2 - \right. \\ & - C^n h^n \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho r} \frac{\partial\psi}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\rho r} \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) - \frac{2}{3} C^n h^n \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial\psi}{\partial x} \right) \right)^2 + \\ & + \frac{4C^n h^n}{3r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial\psi}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho r} \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) - \frac{2}{3} C^n h^n \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho r} \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) \right)^2 \left. \right] + \\ & + C^n h^n \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\rho r} \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) \right)^2 + \frac{C^n}{\sigma r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r h^n \frac{\partial h}{\partial r} \right) + \frac{C^n}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x} \left(h^n \frac{\partial h}{\partial x} \right) = 0, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где координата x направлена вдоль оси симметрии, r — расстояние от оси x (это независимые переменные); зависимые переменные: ψ — функция тока, ρ — плотность, h — энтальпия; и константы $A, C, \sigma > 0, n \in [0, 1]$. При этом $r \geq 0, h > 0$ и

$$C^n > 0, \quad h^n > 0. \quad (1.10)$$

Здесь функция тока $\psi = \psi_{III} = \rho\psi_{II}$, где ψ_{II} — это функция тока ψ главы II. Для постоянных h, ρ и $\nu = C^n h^n$ уравнения (1.7) и (1.8) превращаются соответственно

в уравнения $f_1 = 0$ и $f_2 = 0$ из системы (1.5) главы II, если отказаться от уравнения Клапейрона (1.5). Однако, уравнение (1.9) при этом не обращается в тождественное равенство. Это связано с тем, что система (1.7)–(1.9) соответствует газу, а система (1.5) главы II — жидкости. Поэтому систему (1.7)–(1.9) нельзя рассматривать как возмущение системы (1.5) главы II.

Игла задается как $x \geq 0$, $r = 0$. В обозначениях § 1 главы I здесь

$$x_1 = x, \quad x_2 = r, \quad x_3 = \psi, \quad x_4 = \rho, \quad x_5 = h. \quad (1.11)$$

Граничные условия задаются в бесконечности и на игле (ср. формулы (2.2), (2.3) главы II):

$$\psi = \psi_0 r^2, \quad \rho = \rho_0, \quad h = h_0 \quad \text{при} \quad x = -\infty, \quad \psi_0, \rho_0, h_0 = \text{const} \neq 0, \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial r} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = 0 \quad \text{при} \quad x \geq 0, \quad r = 0. \quad (1.13)$$

Условия (1.13) выводятся в § 2 главы II.

Лемма 1. Для задачи (1.7)–(1.9), (1.12), (1.13) имеют место граничные условия

$$\psi = \psi_0 r^2, \quad \rho = \rho_0, \quad h = h_0 \quad \text{при} \quad r = +\infty. \quad (1.14)$$

Доказательство. Эта лемма аналогична лемме 1 главы II. И доказывается совершенно также. Заметим, что функции

$$\psi = \psi_0 r^2, \quad \rho = \rho_0, \quad h = h_0; \quad \psi_0, \rho_0, h_0 = \text{const} \quad (1.15)$$

аннулируют каждый из членов в уравнениях (1.7)–(1.9). Следовательно, функции (1.15) являются решением любой укороченной системы для системы (1.7)–(1.9). Поэтому при $x < 0$ и $r \rightarrow \infty$ выражения (1.15) являются граничными условиями, которые продолжают граничные условия (1.12). Более того, они продолжают и для $x > 0$, $r \rightarrow \infty$. ■

Поэтому в дальнейшем ищем решение граничной задачи (1.7)–(1.9), (1.13), (1.14).

Лемма 2. Для системы (1.7)–(1.9) укороченная система, соответствующая пограничному слою на игле при $x \rightarrow +\infty$ и граничным условиям (1.14), единственна. Она имеет нормальный вектор $P = (2, 1, 2, 0, 0)$ и есть

$$\widehat{f}_{12}^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} -A \frac{\partial(\rho h)}{\partial r} = 0, \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} \widehat{f}_{22}^{(2)} \stackrel{\text{def}}{=} & \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\rho r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right] - A \frac{\partial}{\partial x} (\rho h) + \\ & + \frac{C^n}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(h^n r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\rho r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right) = 0, \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} \widehat{f}_{32}^{(2)} \stackrel{\text{def}}{=} & \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{A}{\rho r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial(\rho h)}{\partial r} + \frac{A}{\rho r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial(\rho h)}{\partial x} \right] + \\ & + C^n h^n \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\rho r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right)^2 + \frac{C^n}{\sigma r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r h^n \frac{\partial h}{\partial r} \right) = 0, \end{aligned} \quad (1.18)$$

а автомодельные координаты ξ , G , P , H для задачи (1.13), (1.14), (1.16)–(1.18) суть

$$\xi = \frac{r^2}{x}, \quad \psi = xG(\xi), \quad \rho = P(\xi), \quad h = H(\xi). \quad (1.19)$$

Таблица 2

Выделение укороченной системы. Здесь $\Delta_k \stackrel{\text{def}}{=} \langle \tilde{P}, \tilde{Q}_k \rangle = \langle P, Q_k \rangle$

i	k	Q_k	\tilde{Q}_k	Δ_k	Γ
1	1	-2, -3, 2, -1, 0	-2, 1	-3	
	2	0, -1, 0, 1, 1	0, -1	-1	+
	3	-1, -3, 1, -1, n	-1, -1	-3	
	4	-3, -1, 1, -1, n	-3, 1	-5	
2	5	-1, -4, 2, -1, 0	-1, 0	-2	+
	6	-1, 0, 0, 1, 1	-1, 0	-2	+
	7	-2, -2, 1, -1, n	-2, 0	-4	
	8	0, -4, 1, -1, n	0, -2	-2	+
3	9	-1, -2, 1, 0, 1	-1, 0	-2	+
	10	-4, -2, 2, -2, n	-4, 2	-6	
	11	-2, -4, 2, -2, n	-2, 0	-4	
	12	0, -6, 2, -2, n	0, -2	-2	+
	13	0, -2, 0, 0, $n+1$	0, -2	-2	+
	14	-2, 0, 0, 0, $n+1$	-2, 0	-4	

Доказательство. Носители уравнений (1.7)–(1.9) представлены в табл. 2. Первый столбец содержит номер i уравнения $f_i = 0$, второй столбец содержит номер k точки Q_k носителя, третий столбец содержит векторы (или точки) Q_k . В уравнениях (1.7)–(1.9) в квадратные скобки объединены члены с одним векторным показателем степени.

Согласно (1.14) при $r \rightarrow +\infty$ имеются три граничных условия вида (1.16) главы I

$$f_4 \stackrel{\text{def}}{=} \psi - \psi_0 r^2 = 0, \quad f_5 \stackrel{\text{def}}{=} \rho - \rho_0 = 0, \quad f_6 \stackrel{\text{def}}{=} h - h_0 = 0.$$

Каждому из них соответствует носитель, состоящий из двух точек, а именно: $S(f_4)$ состоит из точек $Q_{15} = (0, 0, 1, 0, 0)$ и $Q_{16} = (0, 2, 0, 0, 0)$; $S(f_5)$ из точек $Q_{17} = (0, 0, 0, 1, 0)$ и $Q_{18} = (0, 0, 0, 0, 0)$ и $S(f_6)$ из точек $Q_{19} = (0, 0, 0, 0, 1)$ и $Q_{20} = (0, 0, 0, 0, 0)$. Согласно теореме 2 главы I, вектор P должен удовлетворять условиям (1.17) главы I. А именно: $\langle Q_{15}, P \rangle = \langle Q_{16}, P \rangle$, т. е. $p_3 = 2p_2$; $\langle Q_{17}, P \rangle = \langle Q_{18}, P \rangle$, т. е. $p_4 = 0$; $\langle Q_{19}, P \rangle = \langle Q_{20}, P \rangle$, т. е. $p_5 = 0$. Итак, на вектор $P = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$ получены три условия

$$p_3 = 2p_2, \quad p_4 = p_5 = 0. \quad (1.20)$$

В обозначениях (1.17) и (1.18) главы I здесь $m' = l = 2$ и $R'_3 = (0, 2)$, $R'_4 = R'_5 = 0$. По теореме 2 главы I, согласно условиям (1.20), вектора Q_k можно спроецировать на двумерную плоскость $\tilde{Q} = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)$ по формулам (1.18) главы I. Эта проекция

заключается в том, что $\tilde{q}_1 = q_1$, $\tilde{q}_2 = q_2 + 2q_3$, а значениями q_4 и q_5 мы пренебрегаем. Четвертый столбец табл. 2 содержит проекции $\tilde{Q}_k = (q_1, q_2 + 2q_3)$ векторов Q_k . Проекции $\tilde{S}(f_1)$ – $\tilde{S}(f_3)$ носителей уравнений (1.7)–(1.9), их выпуклые оболочки $\tilde{\Gamma}_1$ – $\tilde{\Gamma}_3$ и их нормальные конусы представлены на рис. 5.

Игла описывается как $x \geq 0$, $r = 0$. Вблизи иглы, при $x \rightarrow +\infty$ и $r \rightarrow 0$, имеем $p_1 > 0$, $p_2 < 0$. Следовательно, игле соответствует IV квадрант плоскости (p_1, p_2) . Граничные условия (1.14) при $x \rightarrow +\infty$ и $r \rightarrow +\infty$ означают, что $p_1, p_2 > 0$, т. е. им соответствуют точки из I квадранта плоскости (p_1, p_2) . Нас интересуют такие грани проекций $\tilde{\Gamma}_i$, $i = 1, 2, 3$, расширенный нормальный конус которых содержит как IV квадрант, так и точки из I квадранта плоскости (p_1, p_2) . Совместим рис. 5 б нормальных конусов проекций на одном рис. 6. Из него видно, что IV квадрант и точки из I квадранта содержатся только в расширенном нормальном конусе системы $\check{U}_J^D = \check{U}_5^{(1)} \cap \check{U}_8^{(1)}$. Направляющий вектор нормальных конусов $\tilde{U}_5^{(1)} = \tilde{U}_8^{(1)}$ — это вектор $\tilde{P} = (2, 1)$. По вектору $\tilde{P} = (p_1, p_2)$ восстанавливаем вектор $P = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$ согласно условиям (1.20) и получаем в исходных координатах $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$ вектор $P = (2, 1, 2, 0, 0)$.

Полученным нормальным конусам соответствуют вершины и ребра проекций: \tilde{Q}_2 ; $\tilde{Q}_5 = \tilde{Q}_6, \tilde{Q}_8, \tilde{\Gamma}_5^{(1)}$; $\tilde{Q}_9, \tilde{Q}_{12} = \tilde{Q}_{13}, \tilde{\Gamma}_8^{(1)}$. В исходных координатах $(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5)$ им соответствуют точки $Q_2, Q_5, Q_6, Q_8, Q_9, Q_{12}, Q_{13}$ носителей уравнений (1.7)–(1.9). Этим точкам соответствует укороченная система (1.16)–(1.18).

Пятый столбец табл. 2 содержит значения скалярных произведений $\Delta_k = \langle \tilde{P}, \tilde{Q}_k \rangle = \langle P, Q_k \rangle$ для $P = (2, 1, 2, 0, 0)$, в шестом столбце (Т) знак «+» отмечает максимальные значения $\langle \tilde{P}, \tilde{Q}_k \rangle$ для данного i (соответствующие члены суммы f_i включены в укорочение $\hat{f}_{i2}^{(d_i)}$).

В обозначениях § 1 главы I имеем $l = 2$ и полученный вектор $P = (P', P'')$, т. е. $P' = (2, 1)$. Кроме того, вектор $B'_1 = (-1, 2)$ составляет базис в пространстве векторов $Q' = (q_1, q_2)$, удовлетворяющих условию $\langle P', Q' \rangle = 0$. Тогда, согласно теореме 3 главы I, $T'_3 = (1, 0)$, $T'_4 = T'_5 = 0$ и согласно (1.11) автомодельные координаты ξ, G, P, H имеют вид

$$\xi = \frac{r^2}{x}, \quad x_3 \stackrel{\text{def}}{=} \psi = xG(\xi), \quad x_4 \stackrel{\text{def}}{=} \rho = P(\xi), \quad x_5 \stackrel{\text{def}}{=} h = H(\xi),$$

что соответствует (1.19). ■

§ 2. Система ОДУ

Из (1.16) и (1.19) видно, что $P(\xi)H(\xi) = \text{const} = C_0 \stackrel{\text{def}}{=} \rho_0 h_0 \neq 0$. Поэтому

$$P(\xi) = \frac{C_0}{H(\xi)}. \quad (2.1)$$

После замены (1.19), (2.1) в уравнениях (1.17) и (1.18), получаем систему ОДУ

$$\begin{aligned} F_2 \stackrel{\text{def}}{=} G(G'H)' + 2C^n [H^n(G'H)'\xi]' &= 0, \\ F_3 \stackrel{\text{def}}{=} 2GH' + 16C^n C_0^{-2} \xi H^n ((G'H)')^2 + 4C^n \sigma^{-1} (\xi H^n H')' &= 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

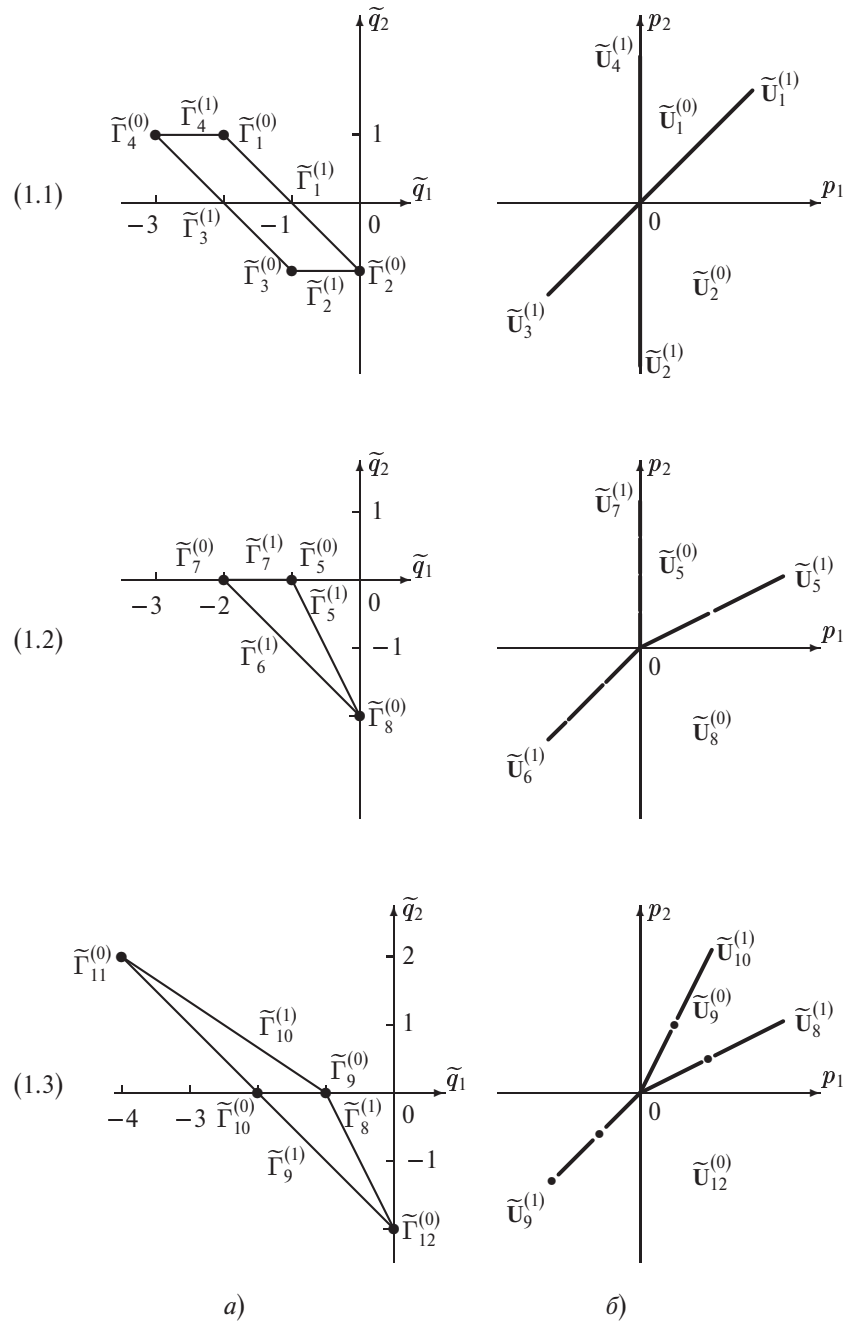


Рис. 5. Проекции носителей уравнений системы (1.7)–(1.9) (а) и нормальные конусы проекций (б)

где $' \stackrel{\text{def}}{=} d/d\xi$, с граничными условиями

$$G = \psi_0 \xi, \quad H = h_0 \neq 0 \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow +\infty, \quad (2.3)$$

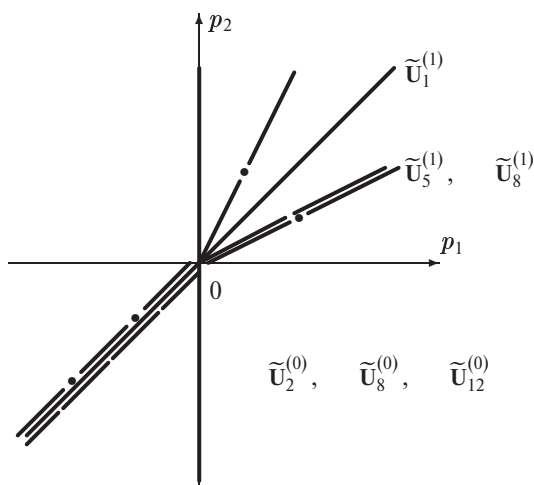


Рис. 6. Совмещенные нормальные конусы проекций носителей уравнений системы (1.7)–(1.9)

$$G = \frac{dG}{d\xi} = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0. \quad (2.4)$$

Теперь заметим, что уравнение

$$(G'H)' = 0 \quad (2.5)$$

или

$$G'H = c_1 = \text{const} \neq 0, \quad (2.6)$$

где c_1 — произвольная постоянная, выделяет инвариантное многообразие полной системы (2.2). На нем первое уравнение системы выполнено тождественно, а второе, после сокращения на 2, принимает вид:

$$GH' + 2C^n \sigma^{-1} (\xi H^n H')' = 0. \quad (2.7)$$

Если $c_1 = 0$, то либо $G' = 0$, либо $H = 0$. В обоих случаях не удовлетворяется граничное условие (2.3).

Итак, получили систему двух уравнений (2.6) и (2.7). Нас интересуют ее решения с граничными условиями (2.3), (2.4). Чтобы нормировать константы, сделаем линейную замену координат

$$\xi = \frac{C^n h_0^n}{\sigma \psi_0} \tilde{\xi}, \quad G = \frac{C^n h_0^n}{\sigma} \tilde{G}, \quad H = h_0 \tilde{H}. \quad (2.8)$$

Тогда, опуская тильды у переменных, получаем систему уравнений

$$G'H = \tilde{c}_1 = \text{const}, \quad (2.9)$$

$$GH' + 2(\xi H^n H')' = 0 \quad (2.10)$$

с граничными условиями (2.4) и

$$G = \xi, \quad H = 1 \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow +\infty. \quad (2.11)$$

Из граничного условия (2.11) следует, что в уравнении (2.9) $\tilde{c}_1 = 1$ и оно имеет вид

$$G'H = 1. \quad (2.12)$$

Итак, получили систему (2.12), (2.10) с граничными условиями (2.11) и (2.4). Сложим уравнения (2.12) и (2.10) и сумму проинтегрируем, получим

$$GH + 2\xi H^n H' = \xi + 2c_2, \quad (2.13)$$

где c_2 — произвольная постоянная. Сведем теперь систему уравнений (2.12), (2.13) к одному уравнению для H , исключив G . Из (2.13) получаем

$$G = -2\xi H^{n-1} H' + (\xi + 2c_2)H^{-1}.$$

Отсюда

$$G' = -\frac{2(\xi H^n H')'}{H} + \frac{2(\xi H^n H')H'}{H^2} + \frac{1}{H} - \frac{(\xi + 2c_2)H'}{H^2}. \quad (2.14)$$

Согласно (2.12) $G' = 1/H$. Поэтому в последнем уравнении члены G' и $1/H$ взаимно уничтожаются. Умножая уравнение (2.14) на $-H^2$, получаем уравнение

$$\Delta(\xi, H) \stackrel{\text{def}}{=} 2(\xi H^n H')' H - 2\xi H^n H'^2 + (\xi + 2c_2)H' = 0 \quad (2.15)$$

с граничными условиями

$$H \rightarrow +\infty \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow +0, \quad (2.16)$$

$$H = 1 \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow +\infty. \quad (2.17)$$

Уравнение (2.15) будем называть *основным*.

Кроме того, согласно § 1, из физического смысла энтальпии имеем $h > 0$; следовательно, нас интересуют только те решения $H(\xi)$ уравнения (2.15), у которых согласно (1.19) и (1.10)

$$H(\xi) > 0 \quad \text{и} \quad H^n > 0 \quad \text{для} \quad \xi \in (0, \infty). \quad (2.18)$$

Итак, получена

Лемма 3. В автомодельных координатах (1.19) задача (1.13), (1.14), (1.16)–(1.18) после замены (2.1) сводится к задаче (2.2)–(2.4). Частные решения этой задачи после нормирования (2.8) являются решениями задачи (2.10)–(2.12). После исключения G согласно (2.12), последняя задача сводится к уравнению (2.15) с граничными условиями (2.16), (2.17) и со свойством (2.18).

Замечание 1. Уравнение (2.15) всегда имеет постоянные решения

$$H = \text{const} \stackrel{\text{def}}{=} H_0. \quad (2.19)$$

Лемма 4. В любой точке $\xi = \xi^0 = \text{const}$, $H = H^0 = \text{const}$ с $\xi^0 \in (0, \infty)$, $H^0 \neq 0$ непостоянное решение $H(\xi)$ уравнения (2.15) монотонно.

Доказательство. Перепишем уравнение (2.15) в виде

$$H'' = \frac{2(1-n)H'^2}{H} - \frac{H'}{\xi} - \frac{(\xi + 2c_2)H'}{2\xi H^{n+1}}. \quad (2.20)$$

Согласно теореме Коши в любой точке $\xi = \xi^0 = \text{const}$, $H = H^0 = \text{const}$, $H' = H'^0 = \text{const}$ с $\xi^0 \in (0, \infty)$, $H^0 \neq 0$ решение $H(\xi)$ уравнения (2.15) аналитично. Следовательно, оно имеет в этой точке экстремум, только если $H'^0 = 0$. Но согласно (2.20) тогда в этой точке $H'' = 0$. Дифференцируя уравнение (2.20), получаем, что в этой точке и все дальнейшие производные $H^{(k)}$ равны нулю. Аналитическая функция $H(\xi)$, у которой в некоторой точке все производные равны нулю, является постоянной. ■

§ 3. Решения основного уравнения вблизи нуля

Теорема 1. У уравнения (2.15) с фиксированными $n \in [0, 1]$ и $c_2 \neq 0$ все решения, удовлетворяющие условию (2.16), образуют два двухпараметрических семейства:

семейство $\mathcal{G}_1^{(0)}$, существующее при $n = 0$, с разложениями

$$H = c_4 \xi^\lambda + \sum_s a_s \xi^s, \quad \text{где } \lambda < 0, \quad (3.1)$$

$$s \in \mathbf{K} = \{s = \lambda - l\lambda + m(1 - \lambda); \text{ целые } l, m \geq 0, l + m > 0\};$$

и семейство $\mathcal{F}_1^{(1)} \mathcal{G}_4^{(0)}$ с нестепенными асимптотиками

$$H \sim \tilde{c} |\ln \xi|^{1/n} + \sum b_s |\ln \xi|^s, \quad s \in \mathbf{K}(k_2) \quad \text{при } n \in (0, 1), \quad (3.2)$$

$$\mathbf{K}(k_2) = \{s = 1/n - l/n - m, \text{ целые } l, m \geq 0, l + m > 0\},$$

$$H \sim \tilde{c} \ln \xi + \sum_{l=0}^{\infty} \beta_l (\ln |\ln \xi|) (\ln \xi)^{-l} \quad \text{при } n = 1; \quad (3.3)$$

а также однопараметрическое семейство $\mathcal{F}_1^{(1)} \mathcal{G}_4^{(1)}$ с нестепенными асимптотиками

$$H \sim [(n+1)(c_2 \ln \xi + c_3)]^{1/(n+1)}, \quad (3.4)$$

которое существует при $n \in [0, 1]$ и $c_2 < 0$ и является границей предыдущих двухпараметрических семейств.

При $c_2 = 0$ в (3.1) множество $\mathbf{K} = \{s = \lambda + m(1 - \lambda), \text{ целые } m > 0\}$, а асимптотики (3.2) и (3.3) имеют вид $H \sim (c_4 \ln \xi + c_5)^{1/n}$ при $n \in (0, 1]$.

Здесь \tilde{c}, c_3, c_4, c_5 и $\lambda < 0$ — произвольные постоянные, постоянные a_s и b_s — однозначно определены, кроме произвольного $b_{-1+1/n}$; а β_l суть многочлены от $\ln |\ln \xi|$ с постоянными коэффициентами; все они однозначно определены, кроме многочлена β_0 , который имеет произвольный свободный член. Разложения в (3.1) и (3.2) сходятся для малых $|\xi|$.

Замечание 2. Согласно [43] асимптотики (3.2)–(3.4) можно продлить в разложения решений по степеням ξ с коэффициентами, зависящими от $\ln \xi$; для продолжения разложения (3.3) коэффициенты зависят также от $\ln |\ln \xi|$. Впрочем, для целей настоящей работы это не нужно.

Доказательство разобьем на два случая: $c_2 \neq 0$ и $c_2 = 0$. Но сначала заметим, что поскольку $\xi \rightarrow 0$ и $H \rightarrow \infty$, то конус задачи есть

$$p_1 \leq 0, \quad p_2 \geq 0. \quad (3.5)$$

Случай $c_2 \neq 0$. В этом случае носитель уравнения (2.15) состоит из трех точек $Q_1 = (-1, 2 + n)$, $Q_2 = (0, 1)$ и $Q_3 = (-1, 1)$. Носитель $\mathbf{S}(\Delta)$, многоугольник $\Gamma(\Delta)$ и его грани $\Gamma_j^{(d)}$ для уравнения (2.15) показаны на рис. 7 а, а их нормальные конусы $\mathbf{U}_j^{(d)}$ — на рис. 7 б, где заштрихован конус задачи (3.5). Согласно рис. 7 б с ним пересекаются только нормальные конусы $\mathbf{U}_1^{(0)}$ и $\mathbf{U}_1^{(1)}$. Рассмотрим соответствующие им грани и укороченные уравнения, учитывая, что согласно п. 2.2 главы I, $\omega = -1$.

Вершине $\Gamma_1^{(0)}$ соответствует укороченное уравнение

$$\widehat{\Delta}_1^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} 2(\xi H^n H')' H - 2\xi H^n H'^2 =$$

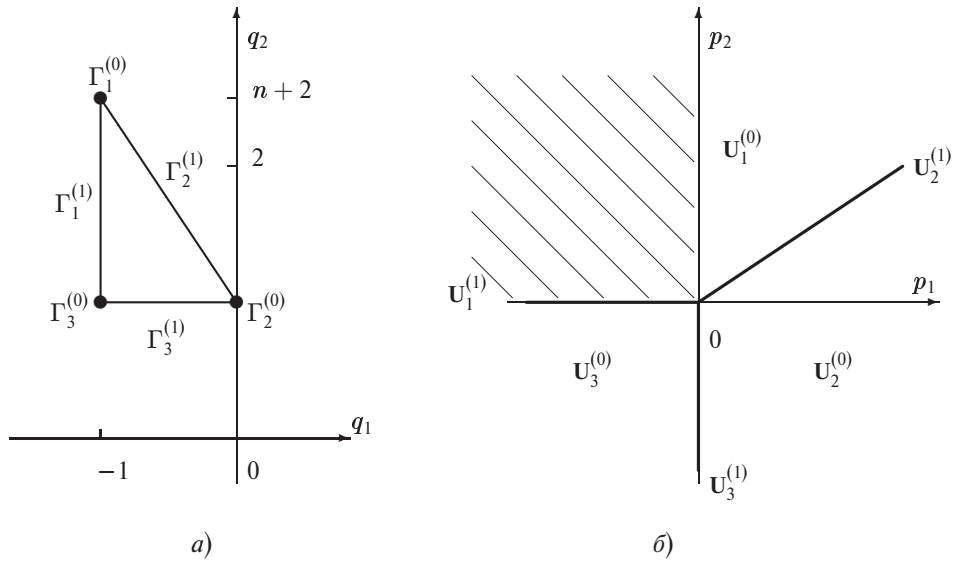


Рис. 7. Носитель $S(\Delta)$, многоугольник $\Gamma(\Delta)$ и его грани $\Gamma_j^{(d)}$ для уравнения (2.15) при $c_2 \neq 0$ (а) и их нормальные конусы (б); заштрихован конус задачи (3.5)

$$= 2H^n [(n - 1)\xi H'^2 + \xi H H'' + H H'] = 0. \tag{3.6}$$

Приравняв нулю квадратные скобки из уравнения (3.6) и разделив их затем на $\xi H H'$, получаем уравнение

$$(n - 1)\frac{H'}{H} + \frac{H''}{H'} + \frac{1}{\xi} = 0.$$

Интегрируя его по ξ , получаем уравнение

$$(n - 1) \ln H + \ln |H'| + \ln \xi = c_0,$$

где c_0 — произвольная постоянная. Это уравнение эквивалентно уравнению

$$H^{n-1} H' = \frac{c_1}{\xi},$$

где $c_1 \neq 0$ — произвольная постоянная. Интегрируя это последнее уравнение, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} H^n &= c_1 \ln \xi + c_3 \quad \text{при } n \neq 0, \\ \ln H &= c_1 \ln \xi + c_3 \quad \text{при } n = 0, \end{aligned}$$

где c_3 — произвольная постоянная. Эти выражения эквивалентны формулам

$$H = (c_4 \ln \xi + c_5)^{1/n} \quad \text{при } n \neq 0, \tag{3.7}$$

$$H = c_4 \xi^\lambda \quad \text{при } n = 0, \tag{3.8}$$

где c_4, c_5 и λ — произвольные постоянные.

Для решений (3.7) при $\xi \rightarrow 0$ порядок $r = 0$ и, согласно п. 2.2 главы I, им соответствует вектор $P = \omega(1, r) = -(1, 0)$, который не лежит в нормальном конусе

$U_1^{(0)}$. Следовательно, при $n \neq 0$ вершине $\Gamma_1^{(0)}$ не соответствует никакое подходящее решение (3.7).

Для решений (3.8) при $\xi \rightarrow 0$ порядок $r = \lambda$. Вектор $P = \omega(1, r) = (-1, -\lambda) \in U_1^{(0)}$, если $\lambda < 0$, что в дальнейшем предполагается. Следовательно, при $n = 0$ выражение (3.8) с $\lambda < 0$ дает степенные асимптотики решений уравнения (2.15). По п. 2.3 главы I найдем степенные разложения этих решений вида

$$H = c_4 \xi^\lambda + \sum_s b_s \xi^s, \quad s > \lambda, \quad s \in \mathbf{K}. \quad (3.9)$$

Первая вариация уравнения (3.6) при $n = 0$ есть

$$\frac{\delta \widehat{\Delta}_1^{(0)}}{\delta H} = -4\xi H' \frac{d}{d\xi} + 2\xi H'' + 2\xi H \frac{d^2}{d\xi^2} + 2H' + 2H \frac{d}{d\xi}.$$

По теореме 5 главы I, на кривой (3.8) она дает оператор

$$\mathcal{L}(\xi) = 2c_4 \xi^{\lambda-1} \left[-2\lambda \xi \frac{d}{d\xi} + \lambda(\lambda-1) + \xi^2 \frac{d^2}{d\xi^2} + \lambda + \xi \frac{d}{d\xi} \right] \neq 0.$$

Тогда характеристический многочлен дифференциальной суммы $\mathcal{L}(\xi)\xi^k$ есть

$$\nu(k) = 2c_4 [-2\lambda k + \lambda(\lambda-1) + k(k-1) + \lambda + k] = 2c_4 (k-\lambda)^2.$$

Он имеет один двукратный корень $k_1 = \lambda = r$, который не является критическим числом, ибо не удовлетворяет неравенству $k_1 > r$.

Для вычисления множества \mathbf{K} воспользуемся леммой 1 из § 2 главы I. Здесь

$$M_1 = (0, -1), \quad M_2 = (1, -1). \quad (3.10)$$

Поэтому

$$r_1 \stackrel{\text{def}}{=} \langle M_1, (1, r) \rangle = -\lambda, \quad r_2 \stackrel{\text{def}}{=} \langle M_2, (1, r) \rangle = 1 - \lambda.$$

Следовательно,

$$\mathbf{K} = \{s = \lambda - l\lambda + m(1 - \lambda); \text{ целые } l, m \geq 0, l + m > 0\}. \quad (3.11)$$

В разложениях (3.9), (3.11) все коэффициенты b_s постоянны и однозначно определены; согласно теореме 10 главы I разложения сходятся для достаточно малых $|\xi| \neq 0$. Их семейство обозначим $\mathcal{G}_1^{(0)}$. Итак, получено разложение (3.1).

Ребру $\Gamma_1^{(1)}$ соответствует укороченное уравнение

$$\widehat{\Delta}_1^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} 2(\xi H^n H')' H - 2\xi H^n H'^2 + 2c_2 H' = 0. \quad (3.12)$$

Это уравнение имеет инвариантное многообразие

$$\xi H^n H' = c_2. \quad (3.13)$$

На нем $H^n H' = c_2/\xi$. Интегрируя по ξ это уравнение, получаем

$$\frac{H^{n+1}}{n+1} = c_2 \ln \xi + c_3,$$

где c_3 — произвольная постоянная. Итак,

$$H = [(n+1)(c_2 \ln \xi + c_3)]^{1/(n+1)}. \quad (3.14)$$

Для вещественности решений (3.14) надо, чтобы $c_2 < 0$, ибо $\ln \xi < 0$ при $\xi \rightarrow 0$. Таким образом, получено разложение (3.4).

Найдем решения уравнения (3.12), удовлетворяющие условию (2.16). Ребро $\Gamma_1^{(1)}$, как видно из рис. 7 а, является вертикальным, следовательно, степенные решения суть $H = \text{const}$, т. е. (2.19), но они не удовлетворяют условию (2.16). Для поиска нестепенных решений, согласно п. 2.7 главы I, делаем логарифмическое преобразование

$$t = \ln \xi \quad (3.15)$$

и производную по t будем обозначать точкой: $\dot{\cdot} \stackrel{\text{def}}{=} d/dt$. Тогда $H' = \dot{H}/\xi$, и уравнение (3.12) принимает вид

$$\Omega(t, H) \stackrel{\text{def}}{=} 2[H \dot{H} \ddot{H}]H - 2H^n \dot{H}^2 + 2c_2 \dot{H} = 0. \quad (3.16)$$

Его носитель $S(\Omega)$ состоит из двух точек $Q_4 = (-2, 2+n)$ и $Q_5 = (-1, 1)$. Многоугольник $\Gamma(\Omega)$ является отрезком, их соединяющим. Его нормальный вектор $N_4 = (1, 1/(n+1))$. Его грани $\Gamma_j^{(d)}$ показаны на рис. 8 а, а их нормальные конусы — на рис. 8 б.

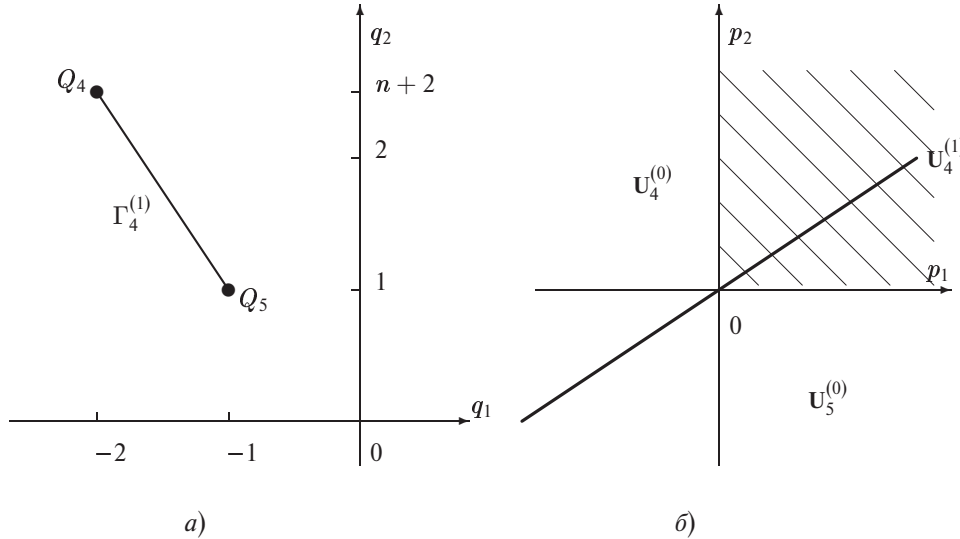


Рис. 8. Грани $\Gamma_j^{(d)}$ многоугольника уравнения (3.16) при $c_2 \neq 0$ (а) и их нормальные конусы (б)

Обозначим $\Gamma_j^{(0)} = Q_j$. Здесь $t \rightarrow -\infty$ т. е. $\omega = 1$, и конус задачи есть $p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0$ (заштрихован на рис. 8 б). С ним пересекаются все три нормальных конуса $U_j^{(d)}$. Рассмотрим решения, соответствующие граням $\Gamma_j^{(d)}$.

Вершине $\Gamma_4^{(0)}$ соответствует укороченное уравнение

$$\widehat{\Omega}_4^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} 2[H \dot{H} \ddot{H}]H - 2H^n \dot{H}^2 = 2[(n-1)H^n \dot{H}^2 + H^{n+1} \ddot{H}] = 0. \quad (3.17)$$

На самом деле, это уравнение (3.6) с независимой переменной $t = \ln \xi$. Его характеристический многочлен есть

$$2r(nr + r - 1) - 2r^2 = 2r(nr - 1).$$

Он имеет два корня $r = 0$ и $r = 1/n$. Соответствующие векторы $\omega(1, r)$ суть $P_1 = (1, 0)$ и $P_2 = (1, 1/n)$. Вектор P_1 не лежит в нормальном конусе $U_4^{(0)}$, а вектор P_2 лежит в $U_4^{(0)}$, ибо $1/n > 1/(n+1)$. Следовательно, при $n \neq 0$ укороченное уравнение (3.17) имеет степенные решения

$$H = \tilde{c} t^{1/n}, \quad (3.18)$$

где $\tilde{c} \neq 0$ — произвольная постоянная (возможно комплексная). Найдем их критические числа. Согласно п. 2.3 главы I первая вариация

$$\frac{\delta \widehat{\Omega}_4^{(0)}}{\delta H} = 2 \left[(n-1)nH^{n-1} \dot{H}^2 + 2(n-1)H^n \dot{H} \frac{d}{dt} + (n+1)H^n \ddot{H} + H^{n+1} \frac{d^2}{dt^2} \right]. \quad (3.19)$$

На кривой (3.18) она дает оператор

$$\mathcal{L}(t) = 2\tilde{c}^{n+1} t^{(1-n)/n} \left[\frac{n-1}{n} + \frac{n+1}{n} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) + 2\frac{n-1}{n} t \frac{d}{dt} + t^2 \frac{d^2}{dt^2} \right].$$

Характеристический многочлен дифференциальной суммы $\mathcal{L}(t)t^k$ есть

$$\nu(k) = 2\tilde{c}^{n+1} \left[k(k-1) + \frac{2(n-1)}{n}k + \frac{1-n}{n^2} \right].$$

Он имеет два корня $k_1 = 1/n$ и $k_2 = (1-n)/n = k_1 - 1$. Здесь конус задачи $k < r = 1/n$. Поскольку корень $k_1 = r$, то он не является критическим числом, но $k_2 = r - 1 < r$, поэтому k_2 — критическое число. Согласно леммам 1 и 2 главы I здесь множества

$$\mathbf{K} = \{s = -l/n, \text{ целые } l \geq 0\},$$

$$\mathbf{K}(k_2) = \{s = 1/n - l/n - m, \text{ целые } l, m \geq 0, l + m > 0\}.$$

Если $n \in (0, 1)$, то $k_2 = 1/n - 1 \notin \mathbf{K}$ и уравнение (3.16) имеет семейство $\mathcal{G}_4^{(0)}$ степенных разложений решений

$$H = \tilde{c} |t|^{1/n} + \sum b_s |t|^s, \quad s \in \mathbf{K}(k_2), \quad (3.20)$$

где b_s — постоянные коэффициенты, \tilde{c} и b_{k_2} — произвольны, а остальные коэффициенты b_s однозначно определены. Согласно теореме 10 главы I разложение (3.20) сходится для достаточно больших $|t|$. Если положить $b_{k_2} = 0$, то разложение (3.20) имеет вид

$$H = \tilde{c} |t|^{1/n} + \sum_{l=0}^{\infty} b_l |t|^{-l/n}, \quad (3.21)$$

где \tilde{c} — произвольная постоянная, а постоянные b_l однозначно определены. Так,

$$b_0 = \frac{nc_2}{\tilde{c}^n(n-1)}, \quad b_1 = \frac{n(n-1)b_0^2}{2(2-n)\tilde{c}} = \frac{n^3 c_2^2}{2(2-n)(n-1)\tilde{c}^{2n+1}}.$$

Согласно (3.14) разложение (3.20) дает двухпараметрическое семейство $\mathcal{F}_1^{(1)}\mathcal{G}_4^{(0)}$ нестепенных асимптотик решений уравнения (2.15)

$$H \sim \tilde{c} |\ln \xi|^{1/n} + \sum b_s |\ln \xi|^s, \quad s \in \mathbf{K}(k_2).$$

Итак, получено разложение (3.2).

Если $n = 1$, то $k_2 = 0 \in \mathbf{K}$ и, согласно п. 2.5 главы I, уравнение (3.16) имеет семейство степенно-логарифмических разложений вида (3.21), где коэффициенты b_l являются многочленами от $\ln |t|$, коэффициент b_0 содержит произвольную постоянную, а остальные коэффициенты b_l однозначно определены. Это семейство также обозначим $\mathcal{G}_4^{(0)}$. Ему также соответствует двухпараметрическое семейство $\mathcal{F}_1^{(1)}\mathcal{G}_4^{(0)}$ нестепенных асимптотических решений уравнения (2.15). Итак, получено разложение (3.3).

Кроме того, можно проинтегрировать уравнение (3.17) явно. Ибо уравнение (3.17) получается из уравнения (3.6) после замены (3.15), а решения уравнения (3.6) суть (3.7) и (3.8).

Вершине $\Gamma_5^{(0)}$ соответствует укороченное уравнение $\widehat{\Omega}_5^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} 2c_2 \dot{H} = 0$. Все его решения суть $H = \text{const}$, т. е. $r = 0$. Вектор $P = \omega(1, r) = (1, 0) \in U_5^{(0)}$ (см. рис. 8 б). Соответствующие степенные укороченные решения (2.19) нам не подходят, ибо для них граничное условие (2.16) не выполнено. Поэтому решения, соответствующие вершине $\Gamma_5^{(0)}$, не подходят.

Ребру $\Gamma_4^{(1)}$ соответствует все уравнение (3.16). Поскольку нормальным к ребру $\Gamma_4^{(1)}$ является вектор $N_4 = (1, 1/(n+1))$, то ищем решения уравнения (3.16) в виде

$$H = \tilde{c}_0 t^{1/(n+1)}. \quad (3.22)$$

Для \tilde{c}_0 получаем определяющее уравнение

$$\tilde{c}_0^{n+2} \frac{1}{n+1} \left(\frac{n}{n+1} + \frac{1}{n+1} - 1 \right) - \tilde{c}_0^{n+2} \frac{1}{(n+1)^2} + c_2 \tilde{c}_0 \frac{1}{n+1} = 0. \quad (3.23)$$

Из него получаем, что $\tilde{c}_0^{n+1} = (n+1)c_2$, т. е.

$$\tilde{c}_0 = [(n+1)c_2]^{1/(n+1)}. \quad (3.24)$$

Следовательно,

$$H = [(n+1)c_2 \ln \xi]^{1/(n+1)}.$$

При $\xi \rightarrow 0$ имеем $\ln \xi < 0$, поэтому эти решения со свойством (2.18) имеются только при $c_2 < 0$ и отсутствуют при $c_2 \geq 0$.

Найдем теперь критические числа укороченного решения (3.22). Согласно (3.16) и (3.19) первая вариация есть

$$\frac{\delta \Omega}{\delta H} = 2 \left[(n-1)nH^{n-1}\dot{H}^2 + 2(n-1)H^n \dot{H} \frac{d}{dt} + (n+1)H^n \ddot{H} + H^{n+1} \frac{d^2}{dt^2} + c_2 \frac{d}{dt} \right].$$

На кривой (3.22) она дает оператор

$$\mathcal{L}(t) = 2 \left\{ \tilde{c}_0^{n+1} \left[\frac{(n-1)n}{(n+1)^2} t^{-1} + \frac{2(n-1)}{n+1} \frac{d}{dt} + \frac{(n+1)}{(n+1)} \left(\frac{1}{n+1} - 1 \right) t^{-1} + t \frac{d^2}{dt^2} \right] + c_2 \frac{d}{dt} \right\}.$$

Согласно (3.24) характеристический многочлен дифференциальной суммы $\mathcal{L}(t)t^k$ есть

$$\begin{aligned} \nu(k) &= 2c_2 \left\{ (n+1) \left[\frac{(n-1)n}{(n+1)^2} - \frac{(n+1)n}{(n+1)^2} + \frac{2(n-1)}{n+1}k + k(k-1) \right] + k \right\} = \\ &= 2c_2(n+1) \left\{ -\frac{2n}{(n+1)^2} + \frac{n-2}{n+1}k + k^2 \right\}. \end{aligned}$$

Его корни суть $k_1 = 2/(n+1)$ и $k_2 = -n/(n+1)$. Здесь конус задачи $s < r = 1/(n+1)$. Корень $k_1 > r$ не является критическим числом. Корень $k_2 < r$ является критическим числом.

Выражение (3.22), (3.24) является точным решением уравнения (3.16). Согласно лемме 1 главы I, множество \mathbf{K} пустое; следовательно, $k_2 \notin \mathbf{K}$. По лемме 2 главы I

$$\mathbf{K}(k_2) = \{r + l(k_2 - r)\} = \left\{ r + l \left(-\frac{n}{n+1} - \frac{1}{n+1} \right) \right\} = \{r - l\},$$

где целое $l > 0$. Следовательно, имеется однопараметрическое семейство $\mathcal{G}_4^{(l)}$ степенных разложений

$$H = \tilde{c}_0 t^{1/(n+1)} \left(1 + \sum_{l=1}^{\infty} b_l t^{-l} \right), \quad (3.25)$$

где коэффициенты b_l постоянны, причем b_1 , соответствующее критическому числу k_2 , является произвольной постоянной, а остальные b_l однозначно определены. Согласно теореме 10 главы I разложение сходится для достаточно больших $|t|$.

С другой стороны, уравнение (3.12) на инвариантном многообразии (3.13) имеет однопараметрическое (по c_3) семейство решений (3.14). Сравнение его с семейством (3.24), (3.25) показывает, что они совпадают. Таким образом, получено семейство $\mathcal{F}_1^{(1)}\mathcal{G}_4^{(1)}$ с асимптотиками (3.4).

Согласно замечанию 4 главы I, поскольку определяющее уравнение (3.23) не имеет кратного, нулевого и бесконечного корня, то решения уравнения (3.16) не имеют нестепенных асимптотик.

Кроме того, можно понизить порядок уравнения (3.16). Для этого сделаем в уравнении (3.16) замену $\dot{H} = p$, $\ddot{H} = p'p$, где $p' = dp/dH$. Тогда, его решения суть

$$p = c_2 H^{-n} + c_0 H^{1-n},$$

где c_0 — произвольная постоянная. Так как $p = \dot{H}$, то получаем

$$\dot{H} = c_2 H^{-n} + c_0 H^{1-n}. \quad (3.26)$$

Полученное уравнение (3.26) имеет порядок ниже, чем исходное уравнение (3.16). При некоторых значениях n и c_0 это уравнение можно проинтегрировать в конечном виде.

При $n = 0$ оно есть $\dot{H} = c_2 + c_0 H$, т. е.

$$H = \frac{c_3 \xi^{c_0} - c_2}{c_0},$$

где c_3 — произвольная постоянная.

При $n = 1$ уравнение (3.26) принимает вид $\dot{H} = c_2 H^{-1} + c_0$, т. е.

$$c_0 H - c_2 \ln |c_0 H + c_2| = c_0^2 t + c_4,$$

где c_4 — произвольная постоянная.

При $c_0 = 0$ уравнение (3.26) принимает вид $\dot{H} = c_2 H^{-n}$, т. е.

$$H = [c_2(n + 1) \ln \xi + c_4]^{1/(n+1)},$$

где c_4 — произвольная постоянная. Это формула (3.4).

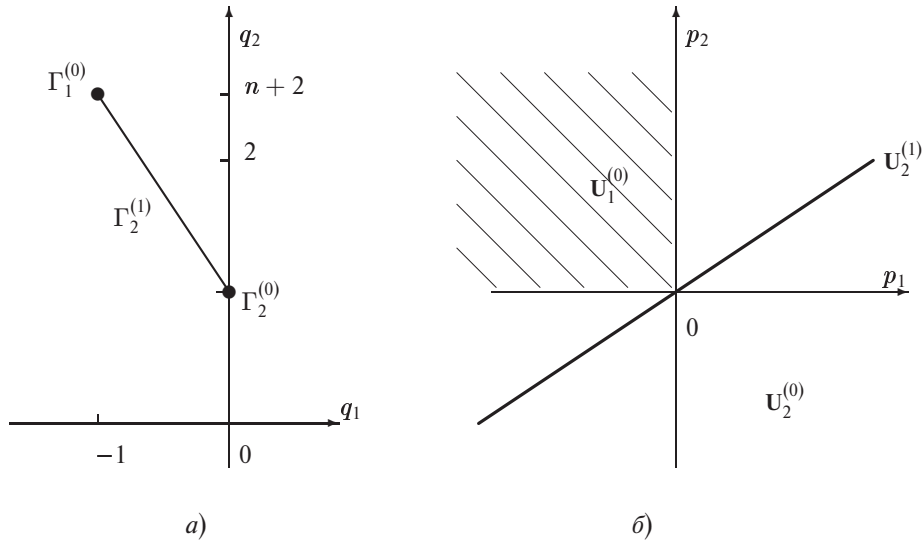


Рис. 9. Носитель и многоугольник уравнения (2.15) при $c_2 = 0$ (а) и нормальные конусы его граней (б)

Случай $c_2 = 0$. В этом случае носитель $S(\Delta)$ уравнения (2.15) состоит из двух точек $Q_1 = (-1, n + 2)$ и $Q_2 = (0, 1)$, многоугольник $\Gamma(\Delta)$ является отрезком. На рис. 9 а показаны носитель и многоугольник уравнения (2.15) при $c_2 = 0$, а на рис. 9 б — нормальные конусы его граней и заштрихован конус задачи (3.5). С ним пересекается только нормальный конус $U_1^{(0)}$. Рассмотрим соответствующую вершину и укороченное уравнение.

Вершине $\Gamma_1^{(0)} = Q_1$ соответствует укороченное уравнение (3.6). Все его решения найдены выше при рассмотрении случая $c_2 \neq 0$ и описываются формулами (3.7), (3.8). Для решений (3.7) вектор $P_1 = \omega(1, 0) = (-1, 0)$ лежит в нормальном конусе $U_1^{(0)}$. Поэтому выражения (3.7) являются нестепенными асимптотиками решений уравнения (2.15) при $\xi \rightarrow 0$. Кроме того, при $c_4 = 0$, выражения (3.7) дают также степенные асимптотики решений вблизи $\xi = 0$, $H = H_0 = \text{const}$.

Для решений (3.8) вектор $P_2 = \omega(1, \lambda) = (-1, -\lambda) \in U_1^{(0)}$, если $\lambda < 1$. Нахождение степенных разложений вида (3.9) справедливо до формулы (3.10), использовавшейся для вычисления множества \mathbf{K} . В данном случае векторы $M_1 = M_2 = (1, -1)$. Поэтому $r_1 = r_2 = 1 - \lambda$. Следовательно,

$$\mathbf{K} = \{s = \lambda + m(1 - \lambda), \text{ целые } m > 0\}. \tag{3.27}$$

При $\lambda \geq 0$ разложение (3.1) с множеством (3.27) не удовлетворяет граничному условию (2.16), т. е. остаются лишь значения $\lambda < 0$.

Таким образом, решения образуют двухпараметрическое семейство, которое при $n = 0$ представляется разложениями (3.9), (3.27) с $c_4 \neq 0$, $\lambda < 0$, а при $n \neq 0$ представлено асимптотиками вида (3.7) с $c_4 \neq 0$.

Теорема 1 доказана. ■

Лемма 5. При $c_2 \geq 0$ уравнение (2.15) имеет однопараметрическое семейство решений (2.19), а при $c_2 < 0$ оно имеет двухпараметрическое семейство решений, которые при $\xi \rightarrow 0$ стремятся к постоянным $H_0 \neq 0$. Это семейство обозначим $\mathcal{F}_1^{(1)}$.

Доказательство. Укороченное уравнение (3.12) имеет также постоянные решения (2.19), которые при $H_0 \neq 0$ можно рассматривать как степенную асимптотику. Найдем решения уравнения (2.15) вблизи решения (2.19) при $\xi \rightarrow 0$. Согласно п. 2.2 главы I, $r = 0$ и c_r — произвольная постоянная. Согласно (3.6) первая вариация уравнения (3.12) есть

$$\begin{aligned} \frac{\delta \widehat{\Delta}_1^{(1)}}{\delta H} &= 2n(n-1)\xi H^{n-1} H'^2 + 4(n-1)\xi H^n H' \frac{d}{d\xi} + 2(n+1)\xi H^n H'' + \\ &+ 2\xi H^{n+1} \frac{d^2}{d\xi^2} + 2(n+1)H^n H' + 2H^{n+1} \frac{d}{d\xi} + 2c_2 \frac{d}{d\xi}. \end{aligned}$$

На решении (2.19) с $H_0 \neq 0$, по теореме 5 главы I, она дает оператор

$$\mathcal{L}(\xi) = 2\xi H_0^{n+1} \frac{d^2}{d\xi^2} + 2H_0^{n+1} \frac{d}{d\xi} + 2c_2 \frac{d}{d\xi}.$$

Характеристический многочлен дифференциальной суммы $\mathcal{L}(\xi)\xi^k$ есть

$$\nu(k) = 2H_0^{n+1} k \left(k + \frac{c_2}{H_0^{n+1}} \right).$$

Он имеет два корня $k_1 = 0$ и $k_2 = -c_2/H_0^{n+1}$. Собственное значение $k_1 = r = 0$ не является критическим числом. Поскольку конус задачи $\mathcal{K} = \{s > r = 0\}$, то корень k_2 является критическим числом только при $-c_2/H_0^{n+1} > 0$. Поскольку H_0 и $H_0^{n+1} > 0$, то это означает, что $c_2 < 0$.

Если нет критических чисел (т. е. $c_2 \geq 0$), то из точки $\xi = 0$, $H = H_0 \neq 0$ выходит единственное решение уравнения (2.15) вида

$$H = H_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi^k, \tag{3.28}$$

где все c_k однозначно определены. По замечанию 1 перед леммой 4 из этой точки выходит решение $H = H_0 \stackrel{\text{def}}{=} \text{const}$. Следовательно, в формуле (3.28) все $c_k = 0$.

Если есть одно критическое число k_2 (т. е. $c_2 < 0$), то имеются два подслучая: целого и нецелого k_2 . Если критическое число k_2 — не целое, т. е. $k_2 \notin \mathbf{K} = \{k = l, \text{целые } l > 0\}$, то из точки $\xi = 0$, $H = H_0 \neq 0$ выходит однопараметрическое семейство решений уравнения (2.15) с разложением

$$H = H_0 + \sum_s c_s \xi^s, \quad s \in \mathbf{K}(k_2),$$

где, согласно лемме 2 главы I, $\mathbf{K}(k_2) = \{l + mk_2, \text{целые } l, m \geq 0, l + m > 0\}$ и постоянные c_s однозначно определены, кроме $s = k_2$, для которого c_s произвольно.

Если критическое число k_2 — целое, тогда $k_2 \in \mathbf{K}$. Следовательно, из точки $\xi = 0$, $H = H_0 \neq 0$ выходит однопараметрическое семейство решений уравнения (2.15) с разложением

$$H = H_0 + \sum_s \gamma_s \xi^s, \quad s \in \mathbf{K},$$

где коэффициенты γ_s при $s < k_2$ — постоянные, которые однозначно определены; γ_s при $s \geq k_2$ — многочлены от $\ln \xi$, коэффициент γ_{k_2} содержит произвольную постоянную, а остальные γ_s однозначно определены. ■

§ 4. Решения основного уравнения вблизи бесконечности

Теорема 2. При фиксированных n и c_2 , и при $\xi \rightarrow \infty$ уравнение (2.15) имеет однопараметрическое семейство M решений с $H \rightarrow 1$. Их асимптотики даются формулами

$$H' \sim c_{10} \xi^s e^{-\xi/2}, \quad H - 1 \sim c_{10} \int \xi^s e^{-\xi/2} d\xi, \quad (4.1)$$

где $s = -c_2 - 1$ и c_{10} — произвольная постоянная. Для интеграла в (4.1) справедливо асимптотическое разложение

$$H - 1 \sim -2c_{10} e^{-\xi/2} \left[\xi^s + \sum_{l=1}^{\infty} 2^l s(s-1) \dots (s-l+1) \xi^{s-l} \right]. \quad (4.2)$$

Доказательство. Заметим, что $H = 1$ является решением уравнения (2.15). В уравнении (2.15) положим $H = 1 + y$ и рассмотрим уравнение

$$\Sigma(\xi, y) \stackrel{\text{def}}{=} \Delta(\xi, 1 + y) \stackrel{\text{def}}{=} 2[\xi(1 + y)^n y']'(1 + y) - 2\xi(1 + y)^n y'^2 + (\xi + 2c_2)y' = 0. \quad (4.3)$$

Оно имеет тривиальное решение $y = 0$. Многоугольник $\Gamma(\Sigma)$ и нормальные конусы его граней показаны на рис. 10. Нас интересуют решения при $\xi \rightarrow \infty$, $y \rightarrow 0$. Следовательно, конус задачи $\mathcal{K} = \{p_1 \geq 0, p_2 \leq 0\}$ (заштрихован на рис. 10 б). Многоугольник $\Gamma(\Sigma)$ имеет горизонтальное ребро $\Gamma_1^{(1)}$ и вершину $\Gamma_1^{(0)}$ с $q_2 = 1$ (рис. 10 а). Вертикальное же ребро с $q_1 = 0$ несобственное, т. е. ему не соответствуют свои укороченное уравнение и нормальный конус. С конусом задачи пересекаются нормальные конусы $U_1^{(0)}$ и $U_1^{(1)}$. Рассмотрим укороченные уравнения, соответствующие вершине $\Gamma_1^{(0)}$ и ребру $\Gamma_1^{(1)}$.

Вершине $\Gamma_1^{(0)}$ соответствует укороченное уравнение $\xi y' = 0$. Все его решения суть $y = c_0 = \text{const}$. Поскольку нас интересуют решения $y \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$, то эти решения с $c_0 \neq 0$ нам не подходит.

Ребру $\Gamma_1^{(1)}$ соответствует укороченное уравнение

$$\widehat{\Sigma}_1^{(1)}(\xi, y) \stackrel{\text{def}}{=} 2[\xi y']' + (\xi + 2c_2)y' = 0,$$

т. е.

$$\widehat{\Sigma}_1^{(1)}(\xi, y) \stackrel{\text{def}}{=} 2\xi y'' + (\xi + 2(c_2 + 1))y' = 0. \quad (4.4)$$

Согласно п. 2.9 главы I, после замены $\eta = d \ln y' / d\xi$ уравнение (4.4) принимает вид $2\xi \eta + 2(c_2 + 1) + \xi = 0$. Его решение $\eta = -1/2 + (-c_2 - 1)/\xi$, т. е. $y' = c_{10} \xi^s e^{-\xi/2}$, где $s = -c_2 - 1$, c_{10} — произвольная постоянная. Это решение эквивалентно

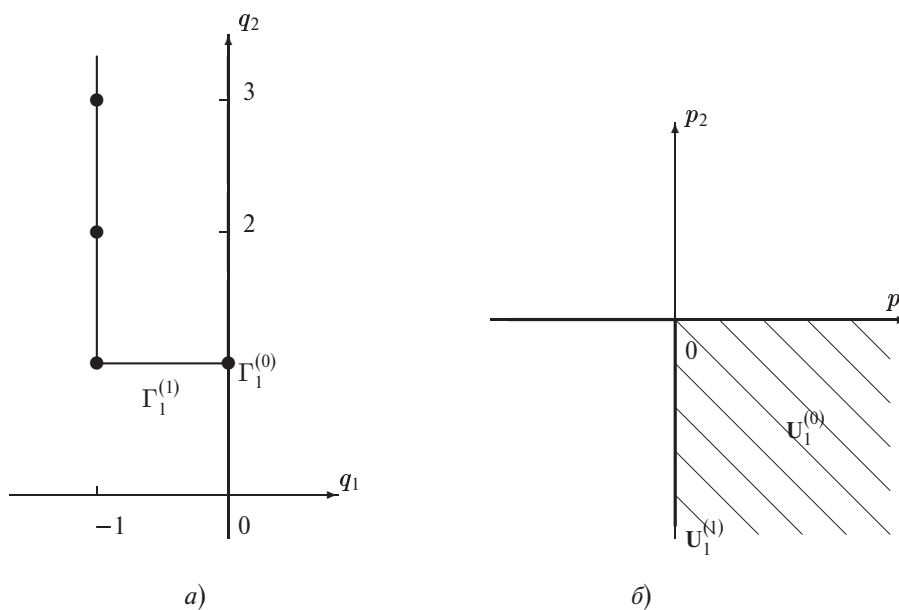


Рис. 10. Носитель и многоугольник уравнения (4.3) (а), нормальные конусы его граней и конус задачи (б)

формулам (4.1). Для второй из них справедливо асимптотическое разложение (4.2). Действительно, вычисляя интеграл в (4.1) по частям, получаем

$$\int \xi^s e^{-\xi/2} d\xi = -2e^{-\xi/2}\xi^s + 2s \int \xi^{s-1} e^{-\xi/2} d\xi.$$

Полученный интеграл опять вычисляем по частям, получаем первый член суммы в (4.2) и интеграл

$$\int \xi^s e^{-\xi/2} d\xi = -2e^{-\xi/2}[\xi^s + 2s\xi^{s-1}] + 4s(s-1) \int \xi^{s-2} e^{-\xi/2} d\xi.$$

Продолжая вычислять интегралы по частям, получаем асимптотическое разложение (4.2). ■

При целых неотрицательных s , т. е. для

$$c_2 = -1, -2, \dots \tag{4.5}$$

сумма в квадратных скобках в (4.2) является конечной, т. е. это многочлен степени s .

При фиксированном n на плоскости c_2, c_{10} семейству \mathcal{M} соответствуют все точки, кроме прямой $c_{10} = 0$.

§ 5. Решения основного уравнения вблизи точки $\xi^0 > 0$

Лемма 6. Решения уравнения (2.15) не уходят в бесконечность и не приходят из бесконечности при любом конечном $\xi^0 > 0$.

Доказательство. Сделаем в уравнении (2.15) подстановку

$$\xi = \xi^0 + \tilde{\xi}, \quad (5.1)$$

где $\xi^0 = \text{const} > 0$. Тогда уравнение (2.15) примет вид

$$\begin{aligned} f(\tilde{\xi}, H) &\stackrel{\text{def}}{=} \Delta(\xi^0 + \tilde{\xi}, H) = 2[(\xi^0 + \tilde{\xi})H^n H']' H - 2(\xi^0 + \tilde{\xi})H^n H'^2 + (\xi^0 + \tilde{\xi} + 2c_2)H' = \\ &= 2(n-1)(\xi^0 + \tilde{\xi})H^n H'^2 + 2(\xi^0 + \tilde{\xi})H^{n+1}H'' + 2H^{n+1}H' + (\xi^0 + \tilde{\xi} + 2c_2)H' = 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Если $\xi^0 + 2c_2 \neq 0$, то его носитель состоит из точек Q_1, Q_2, Q_3 и точки $Q_6 = (-2, 2+n)$, многоугольник $\Gamma(f)$ является параллелограммом (рис. 11 а). Нас интересуют решения уравнения (5.2), у которых $\tilde{\xi} \rightarrow 0$ и $H \rightarrow \infty$, т. е. конус задачи есть $p_1 \leq 0, p_2 \geq 0$. С ним пересекаются только два нормальных конуса $U_6^{(0)}$ и $U_6^{(1)}$ (рис. 11 б). Рассмотрим соответствующие грани и укороченные уравнения.

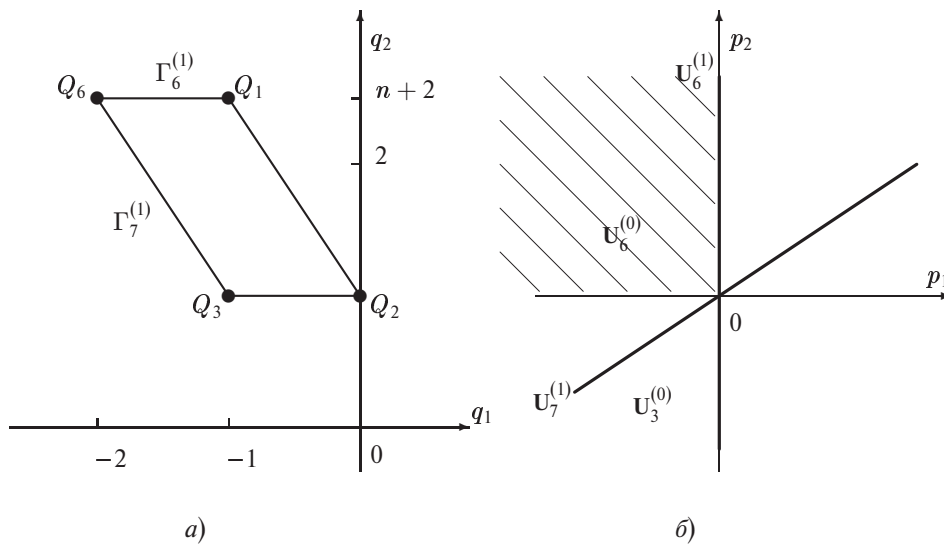


Рис. 11. Носитель и многоугольник уравнения (5.2) (а), нормальные конусы его граней и конус задачи (б)

Вершине $\Gamma_6^{(0)} = Q_6$ соответствует укороченное уравнение

$$\tilde{f}_6^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} 2(n-1)\xi^0 H^n H'^2 + 2\xi^0 H^{n+1} H'' = 0. \quad (5.3)$$

Все его решения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} H^n &= c_{30} \tilde{\xi} + c_{31} \quad \text{при } n \neq 0, \\ \ln H &= c_{30} \tilde{\xi} + c_{31} \quad \text{при } n = 0, \end{aligned} \quad (5.4)$$

где c_{30} и c_{31} — произвольные постоянные. При $\tilde{\xi} \rightarrow 0$ эти решения не уходят в бесконечность.

Ребру $\Gamma_6^{(1)}$ соответствует укороченное уравнение (3.6). Все его решения имеют вид (3.7) и (3.8). При $\tilde{\xi} \rightarrow 0$ они стремятся к конечным значениям $H = (c_4 \ln \xi^0 + c_5)^{1/n}$ и $H = c_4(\xi^0)^\lambda$, т. е. не уходят в бесконечность.

Если $\xi^0 + 2c_2 = 0$, то из носителя уравнения (5.2) пропадает вершина Q_3 , но с конусом задачи по прежнему пересекаются только нормальные конусы $U_6^{(0)}$ и $U_6^{(1)}$, и укороченные уравнения, соответствующие граням $\Gamma_6^{(0)}$ и $\Gamma_6^{(1)}$, не меняются. ■

§ 6. Решения основного уравнения, удовлетворяющие обоим граничным условиям

Здесь изучаются те решения уравнения (2.15), которые удовлетворяют условиям (2.16), (2.17) и обладают свойством (2.18). Для этого рассматриваются отдельно два случая: $c_2 \geq 0$ и $c_2 < 0$.

Случай $c_2 \geq 0$.

Лемма 7. При фиксированных $c_2 \geq 0$ и $n \in [0, 1]$ уравнение (2.15) имеет однопараметрическое семейство решений со свойствами (2.16)–(2.18), и с асимптотиками при $\xi \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} H &\sim \text{const } \xi^\lambda, \quad \lambda < 0 \quad \text{для } n = 0, \\ H &\sim \text{const } |\ln \xi|^{1/n} \quad \text{для } n \neq 0. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Доказательство. У уравнения (2.15) согласно теореме 2 имеется однопараметрическое (по c_{10}) семейство решений с асимптотикой (4.1). При $c_{10} < 0$ эти решения отличны от постоянных и убывают при $\xi \rightarrow \infty$. Согласно лемме 4 они монотонно убывают при $\xi > 0$ к значению $H = 1$. Согласно лемме 6 эти решения не приходят из бесконечности при любом $\xi > 0$. Согласно лемме 5 ни одно из этих решений не стремится к конечному значению при $\xi \rightarrow 0$. Следовательно, согласно теореме 1, при $\xi \rightarrow 0$ все эти решения уходят в бесконечность с асимптотиками (6.1). ■

Введем семейства

$$M_0 = \mathcal{M} \cap (\mathcal{G}_1^{(0)} \cup \mathcal{F}_1^{(1)} \mathcal{G}_4^{(0)} \cup \mathcal{F}_1^{(0)}); \quad M_1 = \mathcal{M} \cap \mathcal{F}_1^{(1)} \mathcal{G}_4^{(1)}. \quad (6.2)$$

Согласно теоремам 1 и 2 к ним относятся все решения уравнения (2.15), обладающие свойствами (2.16), (2.18), которые уходят в бесконечность при $\xi \rightarrow 0$. При этом семейство M_1 имеется только при $c_2 < 0$ и является границей семейства M_0 . Теорема 2 означает, что при $c_2 \geq 0$ семейству M_0 соответствует четверть $\{c_2 \geq 0, c_{10} < 0\}$ плоскости c_2, c_{10} .

Случай $c_2 < 0$. При $c_2 < 0$ решения с асимптотикой (4.1) и с $c_{10} < 0$ при уменьшении ξ от бесконечности также монотонно возрастают и не уходят в бесконечность при конечных ξ согласно леммам 4 и 7. Но теперь, согласно лемме 5, они могут иметь конечный предел при $\xi \rightarrow 0$. Для анализа решений уравнения (2.15) при $c_2 < 0$ использовались две схемы численного счета.

Схема 1. Уравнение (2.15) записывается в виде

$$2[H^n \dot{H}]H - 2H^n \dot{H}^2 + (e^t + 2c_2)\dot{H} = 0, \quad (6.3)$$

где $t = \ln \xi$, $\dot{} \stackrel{\text{def}}{=} d/dt$. При больших отрицательных значениях t_0 задаются начальные значения H_0 и \dot{H}_0 и решение считается методом Рунге—Кутты до больших положительных значений t_N .

Таблица 3

Значения c_3 на семействе \mathcal{M}_1

c_2	$n = 0$	$n = 1/4$	$n = 1/2$	$n = 3/4$	$n = 1$
-1	2,05931	1,923155	1,847601	1,80526	1,78265
-2	3,93106	3,87528	3,87168	3,89454	3,93164
-3	6,21466	6,2403	6,30959	6,3998505	6,49607
-4	8,78254	8,88927	9,03119	9,18598	9,34386
-5	11,56874	11,755944	11,96998	12,19021	12,40807
-6	14,53258	14,7996	15,08518	15,37037	15,6478
-7	17,64631	17,9925	18,34908	18,69877	19,03536
-8	20,8898	21,31453	21,74162	22,15536	22,55071
-9	24,24772	24,755045	25,74162	25,72491	26,17866
-10	27,70802	28,28825	28,8549	29,3955	29,90729

Таблица 4

Значения c_{10} на семействе \mathcal{M}_1

c_2	$n = 0$	$n = 1/4$	$n = 1/2$	$n = 3/4$	$n = 1$
-1	-0,73231	-0,80337	-0,88023	-0,96351	-1,05338
-2	-0,41359	-0,47024	-0,53505	-0,60844	-0,69183
-3	-0,11085	-0,12877	-0,15048	-0,17571	-0,20536
-4	$-1,94 \cdot 10^{-2}$	$-2,29 \cdot 10^{-2}$	$-2,73 \cdot 10^{-2}$	$-3,25 \cdot 10^{-2}$	$-3,88 \cdot 10^{-2}$
-5	$-2,51 \cdot 10^{-3}$	$-3,01 \cdot 10^{-3}$	$-3,63 \cdot 10^{-3}$	$-4,41 \cdot 10^{-3}$	$-4,36 \cdot 10^{-3}$
-6	$-2,57 \cdot 10^{-4}$	$-1,29 \cdot 10^{-4}$	$-3,83 \cdot 10^{-4}$	$-4,71 \cdot 10^{-4}$	$-5,82 \cdot 10^{-4}$
-7	$-2,19 \cdot 10^{-5}$	$-2,69 \cdot 10^{-5}$	$-3,33 \cdot 10^{-5}$	$-4,15 \cdot 10^{-5}$	$-5,21 \cdot 10^{-5}$
-8	$-1,59 \cdot 10^{-6}$	$-1,98 \cdot 10^{-6}$	$-2,47 \cdot 10^{-6}$	$-3,11 \cdot 10^{-6}$	$-3,95 \cdot 10^{-6}$
-9	$-1,01 \cdot 10^{-7}$	$-1,27 \cdot 10^{-7}$	$-1,59 \cdot 10^{-7}$	$-2,03 \cdot 10^{-7}$	$-2,61 \cdot 10^{-7}$
-10	$-0,57 \cdot 10^{-8}$	$-0,72 \cdot 10^{-8}$	$-0,91 \cdot 10^{-8}$	$-1,17 \cdot 10^{-8}$	$-1,52 \cdot 10^{-8}$

Схема 2. Для большого $\xi = \xi_0$ вблизи бесконечности берем начальные значения $H = 1 + y$, $H' = y'$ согласно формулам (4.1)–(4.2). При этом бесконечная сумма в формуле (4.2) заменяется ее начальным отрезком, а значения постоянной $c_{10} < 0$ берутся из некоторой сетки в \mathbb{R} . Методом Рунге—Кутты просчитывается решение уравнения (2.15) до малого $\xi_N > 0$.

Для значений

$$n = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1 \quad (6.4)$$

и фиксированных значений $c_2 < 0$ сначала вычислялись решения семейства \mathcal{M}_1 . Для схемы 1 брались начальные данные по формуле (3.4) и постоянная c_3 менялась так, чтобы при $t \rightarrow +\infty$ решение вышло на $H = 1$. Для полученного решения по первой формуле (4.1) находилось значение постоянной c_{10} . Затем для контроля по второй схеме просчитывалось решение с этими значениями постоянных c_2 и c_{10} и получались соответствующие начальные данные первой схемы. Результаты этих вычислений по сетке $c_2 = -1(-1)-10$ представлены в табл. 3 и 4, а на рис. 12 показаны графики функций $c_3 = \alpha_3(c_2)$ и $c_{10} = \alpha_{10}(c_2)$ для значений (6.4). Оказалось, что на семействе \mathcal{M}_1 при убывании c_2 значения постоянной c_3 монотонно возрастают, а значения постоянной c_{10} имеют минимум. В табл. 5 приведены значения c_2, c_3, c_{10} в точках минимума c_{10} на семействе \mathcal{M}_1 . На рис. 13 показаны графики решений

Таблица 5

Минимумы c_{10} на семействе M_1

n	c_2	c_3	c_{10}
0	-1,034	2,11366	-0,733023
1/4	-1,059	2,0226	-0,805886
1/2	-1,088	2,003022	-0,88612
3/4	-1,117	2,02054	-0,974637
1	-1,15	2,06913	-1,07229

Таблица 6

Значения $-\lambda$ при $n = 0$ на семействе M_0

$c_2 \backslash c_{10}$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
-1	11,4	7,22	3,69	1,23	0,337	0,591	1,35	2,27	3,24	4,23	5,23
-2	11,6	8,33	4,77	2,15	0,894	0,899	1,54	2,41	3,35	4,33	5,31
-3	12,2	8,98	5,38	2,69	1,27	1,12	1,67	2,50	3,43	4,39	5,37
-4	13,7	9,43	5,82	3,08	1,56	1,28	1,77	2,57	3,48	4,43	5,40
-6	14,3	10,1	6,43	3,63	1,97	1,54	1,92	2,67	3,56	4,50	5,46
-8	14,8	10,5	6,86	4,02	2,27	1,73	2,04	2,75	3,62	4,55	5,51
-10	15,1	10,9	7,19	4,31	2,51	1,89	2,14	2,82	3,67	4,59	5,54

$H(\xi)$ и $G(\xi)$ системы (2.12), (2.10) для $n = 0$ и $n = 1$ при значениях c_2, c_3 и c_{10} , соответствующих минимуму c_{10} , т.е. из табл. 5.

Поскольку семейство M_1 является границей семейства M_0 , то при значениях постоянной c_{10} меньших, чем ее значения на семействе M_1 , решение принадлежит семейству M_0 и при $\xi \rightarrow 0$ имеет асимптотику (3.7), (3.8). С асимптотикой (3.7) все ясно, но для асимптотики (3.8) интересно знать значения показателя λ . При $n = 0$ для разных значений c_2 и $c_{10} < 0$, соответствующих семейству M_0 , вычислялись решения по второй схеме и при $\xi \rightarrow 0$ вычислялся предел отношения $\ln H / \ln \xi = \lambda$. Результаты представлены в табл. 6. На рис. 14 показаны графики решения $H(\xi)$ для $n = 0$ и 1, $c_2 = 0$ и 10, $c_{10} = -1$.

Итак, при фиксированных $n \in [0, 1]$ на семействе M_1 зависимости c_3 в (3.4) и c_{10} в (4.1) от $c_2 < 0$ даются кривыми

$$c_3 = \alpha_3(c_2, n) \quad \text{и} \quad c_{10} = \alpha_{10}(c_2, n). \tag{6.5}$$

Таким образом, получена

Лемма 8. При фиксированных $n \in [0, 1]$ к семейству M_0 относятся все те решения семейства M , у которых $c_{10} < \alpha_{10}(c_2)$.

Объединением лемм 7 и 8 получается

Теорема 3. При фиксированных $n \in [0, 1]$ к семейству M_0 относятся все те решения семейства M , у которых

$$c_{10} < \begin{cases} \alpha_{10}(c_2), & \text{если } c_2 < 0; \\ 0, & \text{если } c_2 \geq 0. \end{cases}$$

При $\xi \rightarrow 0$ они имеют асимптотики (6.1).

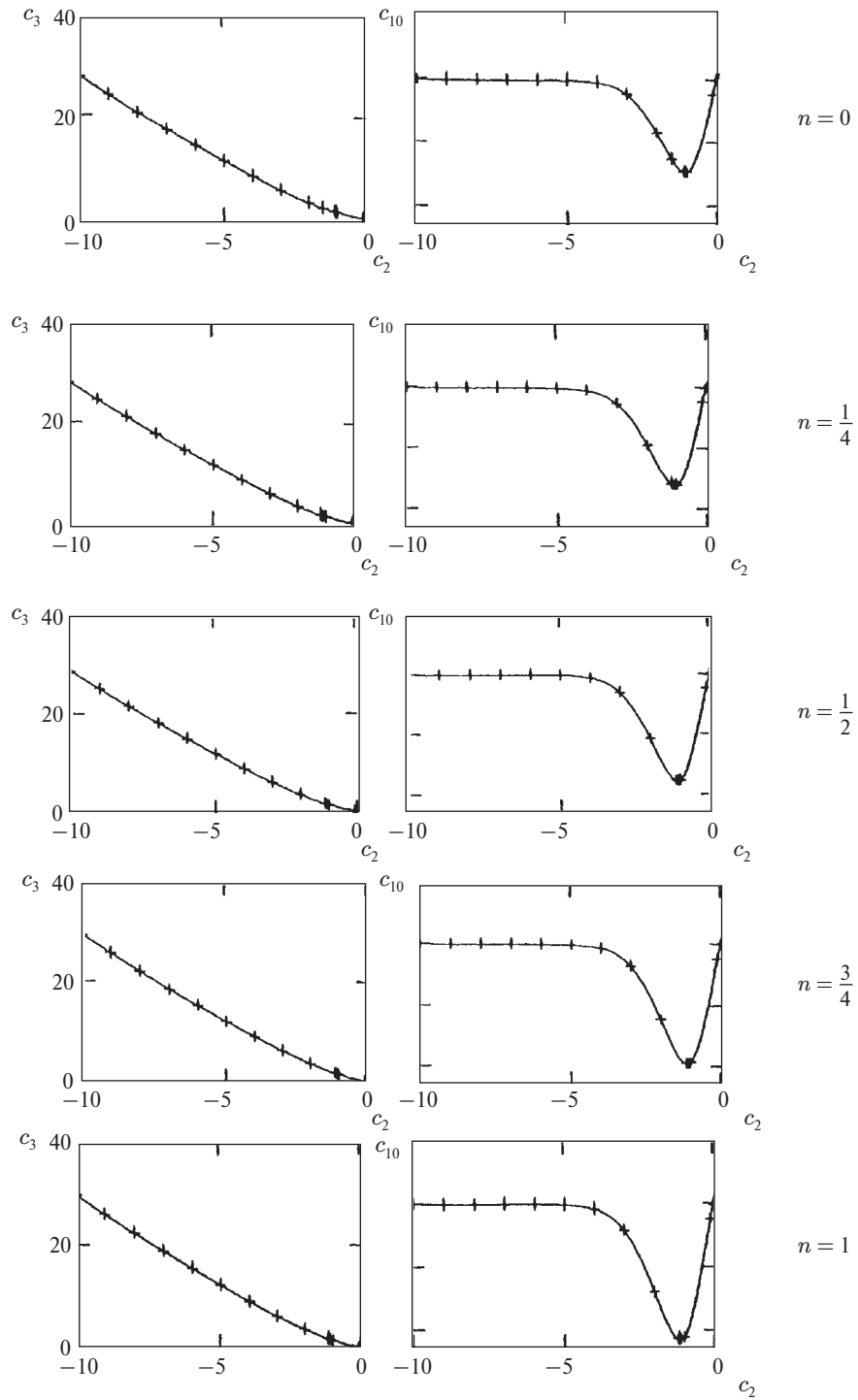


Рис. 12. Графики функций $c_3(c_2)$ и $c_{10}(c_2)$ для семейства \mathcal{M}_1 и значений (6.4)

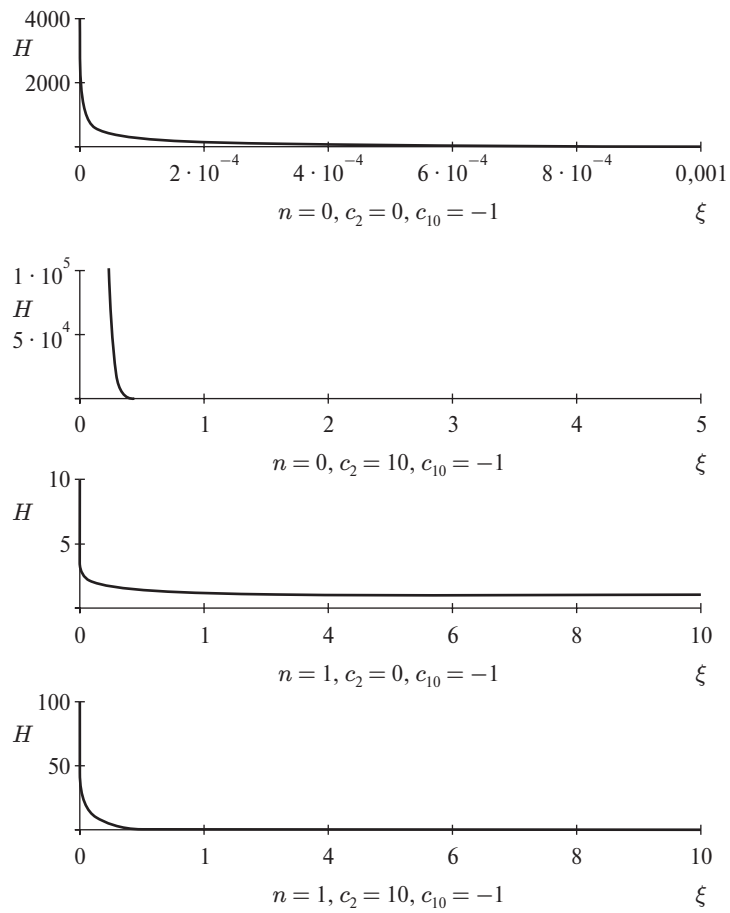


Рис. 13. Графики функций $H(\xi)$ и $G(\xi)$ для решения системы (2.12), (2.10) при $n = 0$ и $n = 1$ с минимальным значением $c_{10}(c_2)$

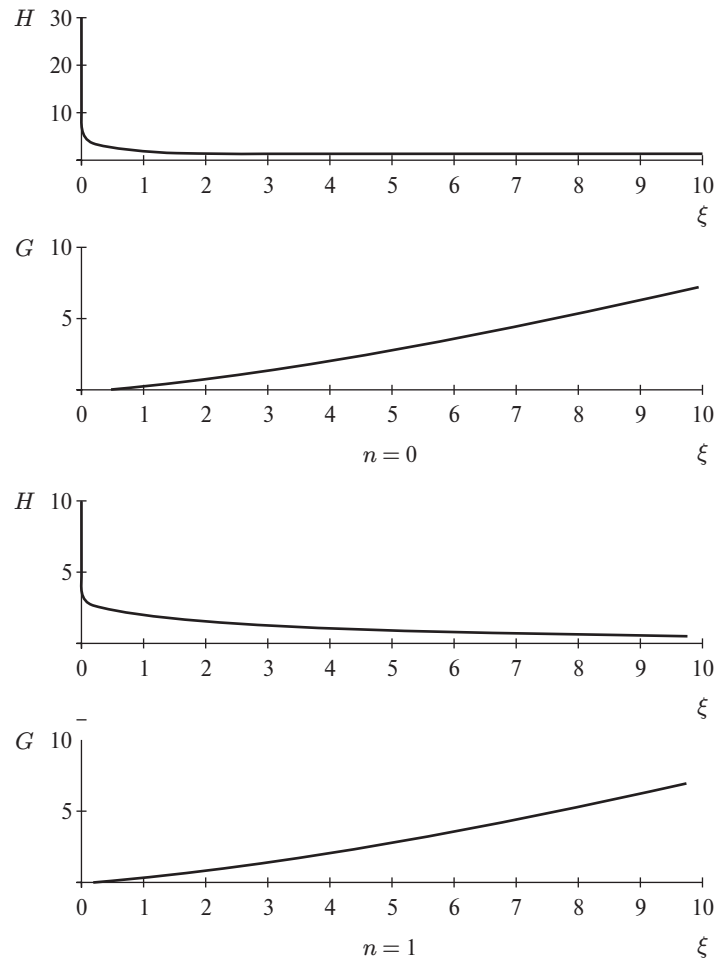


Рис. 14. Графики функции $H(\xi)$ для решений системы (2.12), (2.10) при $n = 0, 1$; $c_2 = 0, 10$; $c_{10} = -1$

§ 7. Возвращение к исходной задаче

Если для решений $H(\xi)$ уравнения (2.15) сделать преобразования, обратные к тем, которые указаны в лемме 3, то получим решения укороченной системы (1.16)–(1.18). При этом семействам \mathcal{M}_0 и \mathcal{M}_1 решений задачи (2.15)–(2.17) будут соответствовать семейства $\widetilde{\mathcal{M}}_0$ и $\widetilde{\mathcal{M}}_1$ автомодельных решений задачи (1.13), (1.14), (1.16)–(1.18). А именно, сначала получаем $G(\xi)$ в задаче (2.4), (2.10)–(2.12) и при $\xi \rightarrow 0$ имеем $G \sim \xi/H$, т. е.

$$\begin{aligned} G &\sim \text{const } \xi^{1-\lambda}, \quad \lambda < 0 \quad \text{при } n = 0, \\ G &\sim \frac{\text{const } \xi}{|\ln \xi|^{1/n}} \quad \text{при } n \neq 0. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Затем, после преобразования, обратного к (2.8), получаем решения $G(\xi)$ и $H(\xi)$ задачи (2.2)–(2.4). При $\xi \rightarrow 0$ они имеют асимптотики (7.1) и

$$\begin{aligned} H &\sim \text{const } \xi^\lambda, \quad \lambda < 0 \quad \text{при } n = 0, \\ H &\sim \text{const } |\ln \xi|^{1/n} \quad \text{при } n \neq 0. \end{aligned}$$

Из (2.1) получаем $P(\xi)$ с асимптотикой при $\xi \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} P &\sim \text{const } \xi^{-\lambda}, \quad \lambda < 0 \quad \text{при } n = 0, \\ P &\sim \frac{\text{const}}{|\ln \xi|^{1/n}} \quad \text{при } n \neq 0. \end{aligned}$$

При переходе от автомодельных координат (1.19) к исходным, получаем решения ψ, ρ, h задачи (1.13), (1.14), (1.16)–(1.18). В погранслое при $\xi \rightarrow 0$ они имеют асимптотики

$$\begin{aligned} \psi &\sim \text{const } x \xi^{1-\lambda}, \quad \rho \sim \text{const } \xi^{-\lambda}, \quad h \sim \text{const } \xi^\lambda, \quad \lambda < 0, \quad n = 0; \\ \psi &\sim \frac{\text{const } r^2}{|\ln \xi|^{1/n}}, \quad \rho \sim \frac{\text{const}}{|\ln \xi|^{1/n}}, \quad h \sim \text{const } |\ln \xi|^{1/n}, \quad n \in (0, 1]. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Таким образом, получили решения и их асимптотики для семейства $\widetilde{\mathcal{M}}_0$. Аналогично получают решения для семейства $\widetilde{\mathcal{M}}_1$, которые при $\xi \rightarrow 0$ имеют асимптотики

$$\psi \sim \frac{\text{const } r^2}{|\ln \xi|^{1/(n+1)}}, \quad \rho \sim \frac{\text{const}}{|\ln \xi|^{1/(n+1)}}, \quad h \sim \text{const } |\ln \xi|^{1/(n+1)}, \quad n \in [0, 1]. \quad (7.3)$$

По теореме 1 главы I решения семейств $\widetilde{\mathcal{M}}_0$ и $\widetilde{\mathcal{M}}_1$ являются асимптотиками решений задачи (1.7)–(1.9), (1.12)–(1.13) при $x \rightarrow +\infty$ и $r^2/x < \infty$, если таковые существуют. И так, получен **основной результат**: | жирн.?

Теорема 4. В пограничном слое $r^2/x < \infty$ при $x \rightarrow +\infty$ задача (1.7)–(1.9), (1.12)–(1.13) имеет семейства решений $\widetilde{\widetilde{\mathcal{M}}}_0$ и $\widetilde{\widetilde{\mathcal{M}}}_1$, которые вблизи иглы при $\xi = r^2/x \rightarrow 0$ имеют асимптотики $\widetilde{\widetilde{\mathcal{M}}}_0$ (7.2), $\widetilde{\widetilde{\mathcal{M}}}_1$ (7.3). При фиксированных параметрах задачи (1.7)–(1.9), (1.12)–(1.13) семейство $\widetilde{\widetilde{\mathcal{M}}}_0$ – двухпараметрическое, а $\widetilde{\widetilde{\mathcal{M}}}_1$ – однопараметрическое и служит границей семейства $\widetilde{\widetilde{\mathcal{M}}}_0$.

В погранслое $\xi \in (0, \infty)$ для решений семейств $\widetilde{\mathcal{M}}_0$ и $\widetilde{\mathcal{M}}_1$ исходной задачи (1.7)–(1.9), (1.12)–(1.13) асимптотиками являются семейства $\widetilde{\mathcal{M}}_0$ и $\widetilde{\mathcal{M}}_1$ автомодельных решений укороченной системы (1.16)–(1.18). При этом точность асимптотик можно оценить по замечанию 1 главы I.

Теорема 5. Точность асимптотик по $x \rightarrow +\infty$ из семейств $\widetilde{\mathcal{M}}_0$ и $\widetilde{\mathcal{M}}_1$ в погранслое $\xi \in (0, \infty)$ оценивается по формулам

$$\psi - \widetilde{\psi} = \widetilde{\psi} O(x^{-\varepsilon}), \quad \rho - \widetilde{\rho} = \widetilde{\rho} O(x^{-\varepsilon}), \quad h - \widetilde{h} = \widetilde{h} O(x^{-\varepsilon}), \quad (7.4)$$

где $0 < \varepsilon < 1$, $\widetilde{\psi}, \widetilde{\rho}, \widetilde{h}$ – асимптотики из семейств $\widetilde{\mathcal{M}}_0$ и $\widetilde{\mathcal{M}}_1$, а ψ, ρ, h – решения из семейств $\widetilde{\mathcal{M}}_0$ и $\widetilde{\mathcal{M}}_1$.

Доказательство. По лемме 2 нормальный вектор укороченной системы (1.16)–(1.18) есть $P = (2, 1, 2, 0, 0)$. Для применения замечания 1 главы I нужно, чтобы $p_1 = 1$. Поэтому надо использовать вектор $P^* = P/2 = (1, 1/2, 1, 0, 0)$. Тогда в замечании 1 главы I

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \langle P^*, Q_2 \rangle = -\frac{1}{2}, \\ \beta_1 &= \langle P^*, Q_1 \rangle = \langle P^*, Q_3 \rangle = -\frac{3}{2}, \\ \alpha_2 &= \langle P^*, Q_5 \rangle = \langle P^*, Q_6 \rangle = \langle P^*, Q_8 \rangle = -1, \\ \beta_2 &= \langle P^*, Q_7 \rangle = -2, \\ \alpha_3 &= \langle P^*, Q_9 \rangle = \langle P^*, Q_{12} \rangle = \langle P^*, Q_{13} \rangle = -1, \\ \beta_3 &= \langle P^*, Q_{10} \rangle = \langle P^*, Q_{14} \rangle = -2. \end{aligned}$$

Следовательно, в формуле (1.6) главы I

$$0 < \varepsilon < \varepsilon_0 = \min_{1 \leq i \leq 3} |\alpha_i - \beta_i| = 1,$$

т. е. получили оценку (7.4). ■

Заключение

Неожиданно для авторов отрицательный результат второй главы вызвал сомнения у гидромехаников.

В частности, А. Г. Куликовским было высказано следующее соображение. В задаче о вязком несжимаемом потоке в бесконечном цилиндре известно частное решение, называемое течением Пуазейля. Также известен поток, когда внутри большого цилиндра помещен соосный цилиндр меньшего радиуса. В этом случае решение практически такое же, как и течение Пуазейля, за исключением небольшого слоя вблизи внутреннего цилиндра. При этом на обоих цилиндрах выполнены условия прилипания. Если устремить радиус внутреннего цилиндра к нулю (т. е. в пределе получить иглу), то в пределе получается все то же течение Пуазейля в большом цилиндре, которое игнорирует иглу, расположенную на оси цилиндра. Это соображение кажется убедительным и другим механикам.

В ответ на это соображение можно возразить, что полученное таким образом течение не удовлетворяет условиям прилипания на игле. И следовательно, не является решением задачи об обтекании иглы.

Подтверждением результата об отсутствии решений в задаче об обтекании (полу)бесконечной иглы вязкой несжимаемой жидкостью может служить следующий простой пример, предложенный Н. С. Бахваловым. Возьмем поперечный «срез» цилиндров, т. е. две концентрические окружности на плоскости. Если на них задать приличные граничные условия для оператора Лапласа на плоскости, то эта задача Дирихле в кольце между окружностями всегда имеет решение и оно единственно. Если устремить радиус внутренней окружности к нулю, то в пределе получается задача Дирихле в круге с выколотой точкой с граничными условиями на внешней окружности и в выколотой точке. Как правило, такая задача Дирихле не имеет решения, ибо задача Дирихле в круге без выколотой точки имеет единственное решение. Если значение этого решения в выколотой точке отлично от заданного, то задача не имеет решения. Этот же пример был приведен в рецензии на статью [15]. Причем рецензент и независимо от него В. А. Кондратьев согласны с отрицательным результатом второй главы.

По мнению авторов отсутствие течения можно объяснить с физической точки зрения следующим образом. Условия прилипания на игле более сильные, чем на пластине. Поэтому при нестационарном обтекании полубесконечной иглы вязкой несжимаемой жидкостью она будет налипать на иглу, этот сгусток (т. е. объем с очень маленькой скоростью потока) будет увеличиваться, заполнит все пространство и остановит течение.

В любом случае, решение, удовлетворяющее всем граничным условиям, даже имеющее сколь угодно сложную сингулярность, никем не предъявлено.

М. Ш. Бирман заметил, что проверить возможность выполнения условия прилипания на игле можно по линейному приближению уравнений Навье—Стокса, т. е. по уравнениям Стокса, точнее — по их укороченной системе. Действительно, для случая несжимаемой жидкости, если в системе (1.1) главы II отбросить нелинейные члены и у полученной системы выделить укороченную систему, соответствующую верхним граничным условиям в (2.1), то получим систему

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

Ее автомодельные решения имеют $p = \text{const}$, т. е. получается одно уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

с граничными условиями $u = u_\infty \neq 0$ при $y^2 + z^2 \rightarrow \infty$ и $u = 0$ при $y = z = 0$. Как указывалось выше, эта задача не имеет решения. Отсюда следует, что для жидкости условия прилипания на игле не могут быть выполнены даже для трехмерного течения, не являющегося осесимметричным. Следовательно, увеличение числа независимых переменных для жидкости за счет отказа от осевой симметрии течения не позволяет получить решение.

Для случая газа, укорочению линейной части исходной системы (1.1)–(1.3) главы III соответствует линейная по ψ часть укороченной системы (1.16)–(1.18) главы III. После введения автомодельных координат (1.19) главы III, укороченная система сводится к системе ОДУ (2.2) главы III. Ее линейная по G часть — это уравнение

$$2C^n [H^n (G' H)' \xi]' = 0$$

и уравнение (2.7). Для этой системы уравнение (2.5) главы III выделяет инвариантное многообразие, на котором она сводится к уравнению (2.15) главы III. Анализ решений

этого уравнения, проведенный в § 3 главы III, показывает, что условия прилипания здесь могут выполняться.

В. А. Аксенов считает причиной отрицательного результата для жидкости то обстоятельство, что вблизи иглы очень маленького диаметра, сравнимого с размером молекул жидкости, уравнения Навье—Стокса неприменимы. Он приводит такой довод. Для указанного выше течения Пуазейля между двумя цилиндрами при очень малом диаметре внутреннего цилиндра трение на нем такого же порядка, как на внешнем цилиндре. Это противоречит механической интуиции.

Литература

1. Prandtl L. Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung, Verhandlungen des III. Internat. Math.-Kongr., Heidelberg, 1904. Teubner, Leipzig, 1905. S. 484–491.
2. Blasius H. Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung // Zeit. für Math. und Phys. 1908. **56**. 1–37.
3. Goldstein S. On the two-dimensional steady flow of a viscous fluid behind a solid body // Proceedings Royal Soc., London A **142**, 1933. 545–562.
4. Stewartson K. On asymptotic expansions in the theory of boundary layers // J. Math. and Phys. 1957. **36**. 173–191.
5. Van de Vooren A. I., Dijkstra D. The Navier—Stokes solution for laminar flow past a semi-infinite flat plate // J. Engineer. Math. 1970. **4**. № 1. 9–27.
6. MacLachlan R. I. The boundary layer on a finite flat plate // Phys Fluids A. 1991. **3**. № 2. 341–348.
7. Seban R. A., Bond R. Skin-friction and heat-transfer characteristics of a laminar boundary layer on a cylinder in axial incompressible flow // J. Aeronaut. Sci. 1951. **18**. 671–675.
8. Kelly H. R. A note on the laminar boundary layer on a circular cylinder in axial incompressible flow // J. Aeronaut. Sci. 1954. **21**. 634.
9. Lord Rayleigh J. W. On the motion of solid bodies through viscous liquid // Phil. Mag. 1911. (6) **21**. 697–711.
10. Pohlhausen K. Zur näherungsweise Integration der Differentialgleichung der laminaren Grenzschicht, Ebenda [Zs. für angewandte Math. und Mech.] 1921. **1**. 252–268.
11. Glauert M. B., Lighthill M. J. The axisymmetric boundary layer on a long thin cylinder // Proc. Roy. Soc., ser. A. 1955. **230**. № 1181. 188–203.
12. Stewartson K. The asymptotic boundary layer on a circular cylinder in axial incompressible flow // Quarterly J. Mech and Appl. Math. 1955. **13**. 113–122.
13. Брюно А. Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Физматлит, 1998.
14. Брюно А. Д., Шадрина Т. В. Об осесимметричном обтекании иглы вязкой несжимаемой жидкостью // ДАН. 2002. **387**. № 5. 589–595.
15. Shadrina T. V. The axially symmetric boundary layer around a needle // Proceedings of BAIL 2002 (Eds. S. Wang and N. Fowkes). Perth: University of Western Australia, 2002, 213–220.
16. Брюно А. Д., Шадрина Т. В. Осесимметричный пограничный слой на игле // ДАН. 2004. **394**. № 3. 298–304.
17. Шадрина Т. В. Пограничный слой при осесимметричном обтекании иглы // Дифференциальные уравнения. 2002. **38**. № 6. 853–854.
18. Шадрина Т. В. Об осесимметричном обтекании иглы вязкой несжимаемой жидкостью // XXVIII Гагаринские чтения. Тезисы докладов. М.: МАТИ **2**, 2002. 98–99.
19. Bruno A. D., Shadrina T. V. The axially symmetric boundary layer around a needle // International Conf. on Differential and Functional Differential Equations. Abstracts. M.: MAI, 2002. 18–19.

Это журнал?

Гом?

20. *Bruno A. D., Shadrina T. V.* The axially symmetric boundary layer around a needle // International Conference “Navier—Stokes Equations and Related Topics” (NSEC8). Abstracts. S. Petersburg: Euler Inst., 2002. 18–19.
21. *Шадрина Т. В.* Осесимметричный пограничный слой на игле // XIV Всероссийская конференция «Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов для решения задач математической физики». Тезисы докладов. Дюрсо, 2002. 167–168. |Абра-
Дюрсо?
22. *Bruno A. D., Shadrina T. V.* The axially symmetric boundary layer on a needle // An International Conference on Boundary And Interior Layers, ONERA, Toulouse, 2004. July 5th, 11.20. 1–10.
23. *Брюно А. Д., Шадрина Т. В.* Пограничный слой на игле // Актуальные проблемы прикладной математики и механики. Тезисы докладов II Всероссийской конференции, посвященной памяти акад. А. Ф. Сидорова. Абрау-Дюрсо, 2004. 30–32.
24. *Шадрина Т. В.* Об осесимметричном обтекании иглы вязкой несжимаемой жидкостью. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша. 2002. № 36.
25. *Брюно А. Д., Шадрина Т. В.* Осесимметричный пограничный слой на игле. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша. 2003. № 64.
26. *Брюно А. Д., Шадрина Т. В.* Методы исследования погранслоя на игле. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша. 2004. № 35.
27. *Брюно А. Д., Шадрина Т. В.* О несжимаемом погранслое на игле. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша. 2004. № 36.
28. *Брюно А. Д., Шадрина Т. В.* Сжимаемый теплопроводный погранслой на игле. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша. 2004. № 37.
29. *Брюно А. Д.* Автомодельные решения и степенная геометрия // Успехи мат. наук. 2000. **55**. Вып. 1. 3–44.
30. *Брюно А. Д.* Степенные разложения решений системы алгебраических и дифференциальных уравнений // ДАН. 2001. **380**. № 3. 298–304.
31. *Брюно А. Д.* Степенные асимптотики решений обыкновенного дифференциального уравнения // ДАН. 2003. **392**. № 3. 295–300.
32. *Брюно А. Д.* Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша. 2003. № 9.
33. *Брюно А. Д.* Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // УМН. 2004. **59**. № 3. 31–80.
34. *Брюно А. Д.* Степенные разложения решений одного алгебраического или дифференциального уравнения // ДАН. 2001. **380**. № 2. 155–159.
35. *Брюно А. Д.* Степенно-логарифмические разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // ДАН. 2003. **392**. № 4. 439–444.
36. *Брюно А. Д.* Нестепенные асимптотики решений обыкновенного дифференциального уравнения // ДАН. 2003. **392**. № 5, 586–591.
37. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978.
38. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973.
39. *Лойцянский Л. Г.* Ламинарный пограничный слой. М.: Физматлит, 1962.
40. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Пер. с немецкого. Изд. второе. М.: Физматлит, 1961.
41. *Васильев М. М.* Об осесимметричных течениях вязкого теплопроводного газа. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша. 2001. № 11.
42. *Vasiliev M. M.* Obtaining the self-similar asymptotics of solutions to the Navier—Stokes equations by power geometry // Progress in Analysis. Proceedings of the 3rd International ISAAC Congress / Eds. H. G. Begehr, R. P. Gilbert, M. W. Wong. Singapore: World Scientific, 2003. 93–101. |это изд-во?
43. *Брюно А. Д.* Сложные разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша. 2005. № 36.

Брюно Александр Дмитриевич:

д. ф.-м. н., завотделом

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН

Москва, 125047, Миусская пл. 4

250-78-84 (раб.)

399-35-49 (дом.)

Факс: 972-07-37

e-mail: bruno@keldysh.ru

Шадрина Татьяна Васильевна:

к. ф.-м. н., н. с.

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН

Москва, 125047, Миусская пл. 4

250-78-84 (раб.)

703-55-82 (дом.)

Факс: 972-07-37

e-mail: shadrina@keldysh.ru