

Дифференциальные уравнения: 12 сентября 2013 г.
(часть 1)

1. Понизить порядок дифференциального уравнения:

$$yy'' + 2yy' - (y')^2 = xy^2e^{-2x}$$

Найдите решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

2. Решите дифференциальное уравнение $y''' + y'' + 4y' + 4y = x^2 \sin \beta x$. При каких значениях параметра β уравнение имеет решения, ограниченные при $x \rightarrow +\infty$?

3. а) Вычислите $\frac{d}{dt}e^{tA}$, где A — квадратная матрица.

- б) Верно ли, что из коммутирования e^A и e^B следует коммутирование матриц A и B ?

Дифференциальные уравнения: 12 сентября 2013 г.
(часть 2)

4. Решите систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x + 3y \\ \dot{y} = -3x - 2y \end{cases}$$

Найдите фазовый поток системы.

5. Изобразите фазовый портрет системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y^2 - 1 \\ \dot{y} = 1 - x^2 \end{cases}$$

Найдите особые точки системы, определите их тип, исследуйте их на устойчивость.

6. Рассмотрим дифференциальное уравнение $y' = y^2$. Вычислите $\frac{\partial y}{\partial y_0}$ в точке $y_0 = 1$. Постройте выпрямление векторного поля $v(y) = y^2$ в окрестности точки $y_0 = 1$.

Дифференциальные уравнения — 12 сентября 2013 г.
(часть 1)

1. Понизить порядок дифференциального уравнения:

$$y^2 y'' + 2y(y')^2 - y^2 y' = 3x^2 - x^3$$

Найдите решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

2. Решите дифференциальное уравнение $y''' + 2y'' + y' + 2y = -x^2 \cos \alpha x$. При каких значениях параметра α уравнение имеет решения, ограниченные при $x \rightarrow +\infty$?

3. а) Докажите, что матричная функция $U(t) = e^{tA}$ является решением системы $\dot{U} = AU$.

б) Приведите пример матриц A и B , таких, что $e^{A+B} \neq e^A e^B$. Верно ли, что из равенства $e^A = E$ следует, что $A = 0$?

Дифференциальные уравнения — 12 сентября 2013 г.
(часть 2)

4. Решите систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 3y \\ \dot{y} = 3x + 5y \end{cases}$$

Найдите фазовый поток системы.

5. Изобразите фазовый портрет системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 2 - x^2 - y^2 \\ \dot{y} = x^2 - y^2 \end{cases}$$

Найдите особые точки системы, определите их тип, исследуйте их на устойчивость.

6. Рассмотрим дифференциальное уравнение $y' = -\frac{1}{y}$. Вычислите $\frac{\partial y}{\partial y_0}$ в точке $y_0 = 1$.

Постройте выпрямление векторного поля $v(y) = -\frac{1}{y}$ в окрестности точки $y_0 = 1$.