Программа курса ОДУ-2012/13: первый поток

Теоретическая часть

1. Формулировка теоремы существования решения системы дифференциальных уравнений. Доказательство теоремы существования для одного уравнения вида $\dot{x} = v(t, x)$, $x \in \mathbb{R}$. Сведение дифференциального уравнения к интегральному.

2. Формулировка теоремы единственности решения системы дифференциальных уравнений. Доказательство теоремы единственности для одного уравнения вида $\dot{x} = v(t, x)$, $x \in \mathbb{R}$. Пример дифференциального уравнения с непрерывной правой частью, для которого не выполняется теорема единственности.

3. Сведение нормального уравнения высшего порядка к системе уравнений первого порядка. Теоремы существования и единственности решения дифференциального уравнения высшего порядка как следствия аналогичных теорем для систем уравнений первого порядка.

4. Теорема существования и единственности непродолжаемого решения задачи Коши для нормальной системы с непрерывно дифференцируемой правой частью. Теорема о продолжении решений до границы компакта в расширенном фазовом пространстве для нормальной системы с непрерывно дифференцируемой правой частью. Теорема о продолжении решений до границы компакта в фазовом пространстве для непрерывно дифференцируемого векторного поля. (Всё с доказательствами.)

5. Теорема о продолжении решений систем линейных однородных уравнений с переменными коэффициентами. Непродолжаемые решения системы из n линейных однородных уравнений образуют векторное пространство размерности n. Фундаментальная система решений, определитель Вронского. Формула Лиувилля–Остроградского. Фундаментальная матрица.

6. Непродолжаемые решения линейного однородного уравнения порядка n образуют векторное пространство размерности n. Фундаментальная система решений, определитель Вронского и формула Лиувилля–Остроградского для линейных уравнений высшего порядка.

7. Теория Штурма: теорема о перемежаемости и теорема сравнения.

8. Классификация изолированных особых точек линейных векторных полей на плоскости (н/у узел, н/у вырожденный узел, н/у дикритический узел, седло, н/у фокус, центр).

9. Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами. Общее решение системы с диагонализируемой матрицей с вещественными собственными значениями.

10. Определение экспоненты матрицы. Экспонента суммы коммутирующих матриц. Формула для решения задачи Коши системы линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами через матричную экспоненту.

11. Экспонента жордановой клетки. Комплексификация и овеществление векторного пространства, линейного оператора и его матрицы. Экспонента диагонализируемой матрицы с комплексными собственными значениями.

12. Фазовый поток векторного поля. Групповое свойство.

13. Лемма Гронуолла об оценке функции, удовлетворяющей интегральному неравенству. Формулировка теоремы о непрерывной зависимости решения задачи Коши от начальных условий и параметров. Её доказательство для одного уравнения, зависящего от одного параметра.

14. Система уравнений в вариациях по начальному условию. Формулировка теорема о дифференцируемости (один раз) решения задачи Коши по начальным условиям (частная производная удовлетворяет уравнению в вариациях). Её доказательство для одного уравнения. Лемма Адамара.

15. Система уравнений в вариациях по параметру. Дифференцируемость (один раз) решения системы по параметру (производная удовлетворяет уравнению в вариациях). Сведение к теореме о зависимости от начальных условий.

16. Формулировка теорема о многократной дифференцируемости решения системы по начальным условиям. Её доказательство для одного уравнения. Многократная дифференцируемость решения задачи Коши по параметру как её следствие.

17. Формулировка теоремы о дифференцируемости фазового потока векторного поля по времени. Её доказательство для поля на прямой. Теорема о выпрямлении векторного поля в окрестности неособой точки.

18. Первый интеграл системы дифференциальных уравнений. Производная функции вдоль векторного поля. Теорема о существовании полной системы первых интегралов в окрестности неособой точки векторного поля. Общее решение линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка в окрестности неособой точки характеристического векторного поля. Существование и единственность решения задачи Коши уравнения в частных производных в окрестности нехарактеристической точки. Примеры нарушения существования и единственности в окрестности характеристической точки.

19. Устойчивость по Ляпунову и асимптотическая устойчивость решения системы. Функция Ляпунова. Теорема Ляпунова об устойчивости особой точки векторного поля при наличии функции Ляпунова. Теорема об устойчивости особой точки векторного поля по линейному приближению. Функция Ляпунова для узла, вырожденного узла и фокуса. Устойчивость решений линейных векторных полей.

20. Линейные системы с периодическими коэффициентами. Оператор монодромии. Мультипликаторы. Связь мультипликаторов с устойчивостью решений.

21. Предельные циклы. Устойчивые, неустойчивые и полуустойчивые предельные циклы на плоскости. Отображение Пуанкаре. Связь устойчивости предельного цикла с производной отображения Пуанкаре. Формула для производной отображения Пуанкаре на плоскости через дивергенцию векторного поля.

22. Теорема о скорости изменения объёма области при действии фазового потока. Теорема Дюлака об отсутствии циклов.

23. Теорема Биркгофа–Хинчина.

Практическая часть

1. Дифференциальное уравнение как поле направлений на плоскости. Рисунки интегральных кривых автономного дифференциального уравнения с исследованием единственности.

2. Решение уравнений первого порядка в нормальной и симметричной форме следующих типов: с разделяющимися переменными, в полных дифференциалах, однородные, квазиоднородные, линейные.

3. Уравнения, не разрешённые относительно производной. Особые решения.

4. Решение линейного неоднородного уравнения высшего порядка с постоянными коэффициентами и квазимногочленом в правой части. Однородные уравнения Эйлера. Решение уравнений линейных неоднородных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами методом вариации постоянных.

5. Решение задачи Коши для линейных однородных систем 2×2 и 3×3 с вещественными и комплексными собственными значениями. Вычисление экспоненты матрицы. Фазовые портреты невырожденных систем на плоскости.

6. Решение линейной неоднородной системы 2×2 с постоянными коэффициентами и квазимногочленами в правых частях. Решение линейной неоднородной системы 2×2 с постоянными коэффициентами методом вариации постоянных.

7. Уравнение в вариациях по параметру и начальным условиям для систем и уравнений. Метод малого параметра.

8. Фазовые потоки. Выпрямление векторных полей на плоскости (явный вид диффеоморфизма, обратного к выпрямляющему).

9. Первые интегралы автономных систем. Линейные однородные уравнения в частных производных. Задача Коши и нахождение характеристических точек.

10. Исследование особых точек на устойчивость по линейному приближению. Определение их типа. (Не забывать про исключительный случай центра!)

11. Фазовые портреты уравнения Ньютона. Фазовые портреты автономных систем на плоскости с исследованием особых точек.

12. Фазовые портреты с предельными циклами в полярных координатах. Исследование цикла на устойчивость с помощью формулы для производной отображения Пуанкаре.

13. Устойчивость решений (однородных и неоднородных) линейных систем с постоянными коэффициентами. Вычисление оператора монодромии для: 1) линейного однородного уравнения с переменными коэффициентами; 2) линейной однородной системы с кусочно-постоянными коэффициентами. Исследование устойчивости: 1) решений (однородного или неоднородного) линейного уравнения с переменными коэффициентами; 2) решений линейной однородной системы с кусочно-постоянными коэффициентами.

Вопросы и задачи для подготовки

1. Доказать, что $\det e^A = e^{\mathrm{tr} A}$.

2. Доказать, что $\det {}^{\mathbb{R}}A = |\det A|^2$ где ${}^{\mathbb{R}}A$ – овеществление комплексной матрицы A.

3. Найти образ квадрата $|x| + |y| \leqslant 1$ при действии фазового потока g^t векторного поля

$$\begin{cases} \dot{x} &= 2x - y \\ \dot{y} &= 2x \end{cases}$$

за время $t = \pi/4$.

4. Вычислить экспоненту матрицы размера $n \times n$, состоящей из одних единиц.

5. Найти преобразование фазового потока системы, представив её как овеществление системы из двух комплексных уравнений ($z = x + iy$, $w = u + iv$).

$$\begin{cases} \dot{x} &= 2y + u \\ \dot{y} &= -2x + v \\ \dot{u} &= x \\ \dot{v} &= y \end{cases}$$

6. Найти решение уравнения $\exp X = -E$ относительно неизвестного оператора $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Доказать, что в нечётномерном $\mathbb{R}^n$ это уравнение неразрешимо.

7. При каком значении параметра μ все решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} &= x + y - 1 \\ \dot{y} &= \mu^2 x + y + \mu \end{cases}$$

неограничены на $\mathbb{R}$? При этом μ найти преобразование фазового потока системы.

8. Найти фазовый поток системы $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для каких ненулевых $\mathbf{a}$ все решения системы $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{a}\sin 3t$ периодические?

9. Найти преобразование фазового потока на прямой и проверить групповое свойство:
   а) $\dot{x} = 2x$;
   б) $\dot{x} = x \ln |x|$;
   в) $\dot{x} = \sin x$;
   г) $\dot{x} = x^2$.

10. Найти

$$\frac{d}{ds}\exp(A+sB)\Big|_{s=0}, \quad A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

11. Доказать, что непродолжаемые решения уравнения

$$\dot{x}=\sqrt{x^2+1}+\frac{t^2-1}{t^2+1}$$

определены на всей числовой прямой. (Указание: воспользоваться леммой Гронуолла.)

12. Найти функции Ляпунова и доказать асимптотическую устойчивость нулевых положений равновесия следующих систем:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & -x-y+xy \\ \dot{y} & = & 2x-3y+x^2-y^2 \end{array}\right., \quad \left\{\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & x/3-2y/3+xy^2 \\ \dot{y} & = & 2x/3-y+x^2y \end{array}\right..$$

13. Исследовать на устойчивость нулевое положение равновесие системы

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & x-y+y^2 \\ \dot{y} & = & 2x-y+x^3 \end{array}\right.$$

и определить его тип. Является ли оно асимптотически устойчивым?

14. Нарисовать фазовые кривые простейшей модели хищник–жертва (x — караси, y — щуки) при $x>0$, $y>0$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & x-xy \\ \dot{y} & = & -y+xy \end{array}\right.. \tag{1}$$

15. При каких μ решения уравнения $\dot{x}=(\cos^2 t+a)x+\cos^3 t$

   а) асимптотически устойчивы;

   б) устойчивы по Ляпунову, но не асимптотически;

   в) неустойчивы?

   При каких μ это уравнение имеет единственное 2π-периодическое решение?

16. При каких μ решения системы

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & 2\mu x+y+e^{\cos 2t} \\ \dot{y} & = & x+\ln(1+\sin^2 t) \end{array}\right.$$

   а) асимптотически устойчивы;

   б) устойчивы по Ляпунову, но не асимптотически;

   в) неустойчивы?

   При каких μ эта система имеет единственное π-периодическое решение?

17. При каких μ все решения уравнения $\ddot{x} + \mu x = \cos^2 t$ неограничены при $t \geqslant 0$? Являются ли они
    а) асимптотически устойчивыми;
    б) устойчивыми по Ляпунову, но не асимптотически;
    в) неустойчивыми?

18. Найти мультипликаторы системы:
$$\dot{\mathrm{x}} = A(t)\mathrm{x},$$
где
$$A(t) = \begin{cases} A_1, & \text{если} \quad \{t\} < 1/2 \\ A_2, & \text{если} \quad \{t\} \geqslant 1/2 \end{cases},$$
$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix};$$
и исследовать на устойчивость её решения.

19. Верно ли, что если все собственные числа матрицы $A(t)$ системы
$$\dot{\mathrm{x}} = A(t)\mathrm{x}, \quad A(t+T) = A(t)$$
с периодическими коэффициентами отрицательны при любом $t \in \mathbb{R}$, то решения устойчивы?

20. Найти предельные циклы и исследовать их на устойчивость
$$\begin{cases} \dot{x} &= -y + x(1 - x^2 - y^2)^2(x^2 + y^2 - 4) \\ \dot{y} &= x + y(1 - x^2 - y^2)^2(x^2 + y^2 - 4) \end{cases}.$$

21. Исследовать на устойчивость предельный цикл $x^2 + y^2 = 4$
$$\begin{cases} \dot{x} &= -y - xy(x + y)(x^2 + y^2 - 4) \\ \dot{y} &= x - y(x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4) \end{cases}.$$

22. Доказать, что у системы
$$\begin{cases} \dot{x} &= e^x y^3 - 1 \\ \dot{y} &= e^x y + x^3 \end{cases}$$
нет циклов.

23. Является ли устойчивый предельный цикл векторного поля асимптотически устойчивым решением?

24. Найти площадь образа квадрата со стороной 1 при действии фазового потока g^t векторного поля
$$\begin{cases} \dot{x} &= x + 2y + \operatorname{arctg} y \\ \dot{y} &= -x + 4y + \sin x \end{cases}$$
за время $t = \ln 2$.

25. Вычислить
$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(1) + f(2) + \ldots + f(n)}{n}, \quad f(x) = \sin^2 x.$$
Ответ обосновать.