ДУ: экзамен 20 мая 2019 года; второй поток; вариант 1_1

На экзамене не разрешается: пользоваться электронными электронными приборами, конспектами, книгами и другими печатными или рукописными материалам; разговаривать и пользоваться помощью соседей.

Оценки: За ответ на каждый вопрос/задачу начисляются очки, максимальное количество очков указано в скобках перед вопросом/задачей; набранное количество очков складывается с очками, полученными за работу в семестре. Оценка определяется по итоговой сумме: 9-13 очков - удовлетворительно, 14-18 очков - хорошо, 19 и выше - отлично.

Задача 1.

(1) Сформулируйте теорему существования и единственности решения задачи Коши для линейного уравнения первого порядка в частных производных.

(4) Докажите эту теорему.

Задача 2.

(1) Существует ли линейная однородная система, одно из решений которой неограниченно, а нулевое решение устойчиво по Ляпунову? Ответ обоснуйте.

(4) Найдите число решений задачи Коши в зависимости от параметра a (сами решения находить необязательно). Ответ обоснуйте:

$$a(a^2+4a-5)y''' + a(a-1)y'' - (a+5)y' + 5y = x - a, \quad y(0) = -1,\ y'(0) = -1.$$

Задача 3.

(2) Найдите общее решение уравнения

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + e^{-y}\frac{\partial z}{\partial y} = e^{-z}x^2,$$

(3) и решение этого уравнения, удовлетворяющее условию $z = x^2 + 2$ при $y = 0$.

ДУ: экзамен 20 мая 2019 года; второй поток; вариант 1_2

Задача 4.

(1) Дать определение особой точки векторного поля, устойчивой по Ляпунову.

(2) Исследовать на устойчивость нулевое положение равновесия векторного поля

$$\begin{cases} \dot{x} &= -2y - x^5 \\ \dot{y} &= x - y^3 \end{cases}.$$

(При исследовании на устойчивость положения равновесия нужно указать и обосновать, является ли оно: а) асимптотически устойчивым; б) устойчивым, но не асимптотически; в) неустойчивым.)

(2) Есть ли у данного векторного поля предельный цикл? Ответ обосновать.

Задача 5.

(5) Найти производную по μ при $\mu = 0$ периодического решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y + x(x^2 + y^2 - e^{\mu(x+y)}) \\ \dot{y} &= x + y(x^2 + y^2 - e^{\mu(x+y)}) \end{cases},$$

такого, что $y(0) = 0$, $x(0) > 0$.