ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ: СПИСОК ЗАДАЧ К ЗАНЯТИЮ № 8 (*22.10.1*)

Напоминание определений

$$\omega_f(x) = \{y\colon\ \exists n_j(y) \to +\infty \quad f^{n_j(y)}(x) \to y\},$$
$$\alpha_f(x) = \{y\colon\ \exists n_j(y) \to -\infty \quad f^{n_j(y)}(x) \to y\},$$

$$\mathrm{Per}(f) = \overline{\{x\colon\ \exists n \neq 0 \quad f^n(x) = x\}}, \qquad \mathcal{M}(f) = \overline{\bigcup_{M \text{ минимально для } f} M},$$

$$\mathcal{R}_+(f) = \{x\colon\ x \in \omega_f(x)\}, \qquad \mathcal{R}_-(f) = \{x\colon\ x \in \alpha_f(x)\},$$

$$\mathcal{R}(f) = \mathcal{R}_-(f) \cap \mathcal{R}_+(f),$$

$$\mathrm{NW}(f) = \{x\colon\ \forall U \in \tau \quad \exists n \geq 1 \quad U \cap f^n U \neq \varnothing\}.$$

Группа А

1. Пусть $f\colon\ X \to X$ — гомеоморфизм метрического компакта X. Верно ли, что множество $\omega_f(x)$ замкнуто для любой точки x ?

2. Приведите пример преобразования f, такого, что множество всех ω-предельных точек $\bigcup_x \omega_f(x)$ не замкнуто.

3. Установите, что $\omega_f(x) \neq \varnothing$ для любой точки x в случае комактного пространства X. Может ли быть пустым множество $\omega_f(x)$ в общем случае? Возможно ли следующее: $\omega_f(x) = \varnothing$, но $\omega_f(y) \neq \varnothing$ для другой точки y ?

4. Являются ли инвариантными относительно действия гомеоморфизма f множества $\omega_f(x)$, а также объединение всех ω-предельных множеств $\omega(f)$?

5. Приведите пример гомеоморфизма f компакта, такого, что для некоторой точки x выполняется $\omega_f(x) \cap \alpha_f(x) = \varnothing$. Затем приведите пример дифференциального уравнения на компактном многообразии размерности 1 или 2, демонстрирующего тот же эффект.

6. Проверьте, что в определении множества неблуждающих точек можно заменить условие “$\exists i \quad U \cap f^i U \neq \varnothing$” на условие “$\exists n_j \to +\infty \quad f^{n_j} U \neq \varnothing$”.

7. Приведите пример гомеоморфизма f со свойством

$$\varnothing \neq \mathcal{M}(f) \neq \mathrm{NW}(f).$$

Компактное множество A называется *аттрактором* отображения f, если существует окрестность $V \subset A$, такая, что $f(V) \subseteq V$ и

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(V).$$

8. Предположим, что x — изолированная неподвижная точка гомеоморфизма f некоторого компактного пространства, причём для всех точек y из некоторой окрестности $U \ni x$ выполнено: $f^n(y) \to x$, когда $n \to \infty$. Можно ли утверждать, что $\{x\}$ — аттрактор?

Группа B

1. Верно ли, что множество $\mathrm{Per}(f) \setminus \overline{\mathrm{Per}^\circ(f)}$ либо пусто, либо состоит из изолированных периодических орбит?

2. Может ли происходить следующее: $\omega_f(x) \neq \alpha_f(x)$, но $\omega_f(x) \cap \alpha_f(x) \neq \varnothing$?

3. Приведите пример гомеоморфизма компакта X, обладающего нетривиальным аттрактором $K \neq \varnothing, X$.

4. Аналогично задаче 8(A) постройте дифференциальное уравнение на многообразии размерности 2, порождающее поток g^t со следующим свойством: для некоторой неподвижной точки x и её окрестности $U \ni x$ выполнено:

$$\forall\, y \in U \quad \omega_g(y) = \{x\},$$

но при этом $\{x\}$ *не* является аттрактором.

5. Приведите пример гомеоморфизма f, определённого на компактном топологическом пространстве X, такого, что

$$\mathcal{M}(f) \neq \mathcal{R}(f) \neq \mathcal{R}_\pm(f) \neq \mathrm{NW}(f) \neq X.$$

Группа C

1. Возможно ли, что $\omega_f(x) \neq \alpha_f(x)$ одновременно для *всех* точек x ?

2. Пусть g^t — фазовый поток гладкого векторного поля на компактном многообразии (которое можно считать поверхностью в $\mathbb{R}^3$). И пусть $K = \overline{\mathcal{O}_+(x_0)}$. Верно ли, что из усточивости по Ляпунову решения с начальным условием $x(0) = x_0$ следует то, что K является аттрактором? Верна ли импликация в обратную сторону?

3. Рассмотрим преобразование $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$, заданное формулой $f = F \circ R_\alpha$, где F — преобразование, "переворачивающее" интервал $(0, \beta)$. Угол α можно считать иррациональным. Рассмотрим топологию τ', являющуюся расширением стандартной топологии на $\mathbb{T}$, в котором преобразование F *по определению* непрерывно.

а) Как устроена тополигия τ' ?

б) Вычислите элементы цепочки $\mathrm{Per}(f) \subseteq \mathcal{M}(f) \subseteq \mathcal{R}(f) \subseteq \mathrm{NW}(f)$ для гомеоморфизма f на пространстве $(\mathbb{T}, \tau')$.

4. Пусть f — гомеоморфизм *не*компактного пространства X. Является ли замнкнутым, либо открытым множество $X_r = \{x\colon\ \omega_f(x) \neq \varnothing\}$?