

Программа курса ОДУ–2012: отделение механики

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1. Формулировка теоремы существования решения системы дифференциальных уравнений. Доказательство теоремы существования для одного уравнения вида $\dot{x} = v(t, x)$, $x \in \mathbb{R}$. Сведение дифференциального уравнения к интегральному.
2. Формулировка теоремы единственности решения системы дифференциальных уравнений. Доказательство теоремы единственности для одного уравнения вида $\dot{x} = v(t, x)$, $x \in \mathbb{R}$. Пример дифференциального уравнения с непрерывной правой частью, для которого не выполняется теорема единственности.
3. Сведение нормального уравнения высшего порядка к системе уравнений первого порядка. Теоремы существования и единственности решения дифференциального уравнения высшего порядка как следствия аналогичных теорем для систем уравнений первого порядка.
4. Теорема существования и единственности непродолжаемого решения задачи Коши для непрерывно дифференцируемой нормальной системы. Теорема о продолжении решений до границы компакта в расширенном фазовом пространстве для непрерывно дифференцируемых нормальных систем. Теорема о продолжении решений до границы компакта в фазовом пространстве для непрерывно дифференцируемых векторных полей. (Всё с доказательствами.)
5. Теорема о продолжении решений систем линейных однородных уравнений с переменными коэффициентами. Непродолжаемые решения системы из n линейных однородных уравнений образуют векторное пространство размерности n . Фундаментальная система решений, определитель Вронского. Формула Лиувилля–Остроградского. Фундаментальная матрица.
6. Непродолжаемые решения линейного однородного уравнения порядка n образуют векторное пространство размерности n . Фундаментальная система решений, определитель Вронского и формула Лиувилля–Остроградского для линейных уравнений высшего порядка.
7. Классификация изолированных особых точек линейных векторных полей на плоскости (н/у узел, н/у вырожденный узел, н/у дикритический узел, седло, н/у фокус, центр).
8. Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами. Общее решение системы с диагонализируемой матрицей с вещественными собственными значениями.
9. Определение экспоненты матрицы. Экспонента суммы коммутирующих матриц. Формула для решения задачи Коши системы линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами через матричную экспоненту.
10. Экспонента жордановой клетки. Комплексификация и овеществление векторного пространства, линейного оператора и его матрицы. Экспонента диагонализируемой матрицы с комплексными собственными значениями.
11. Фазовый поток автономной системы дифференциальных уравнений. Групповое свойство.

12. Лемма Гронуолла об оценке функции, удовлетворяющей интегральному неравенству. Формулировка теоремы о непрерывной зависимости решения системы от начальных условий и параметров. Её доказательство для одного уравнения, зависящего от одного параметра.
13. Лемма Адамара. Система уравнений в вариациях по начальному условию. Формулировка теоремы о дифференцируемости (один раз) решения системы по начальному условию (производная удовлетворяет уравнению в вариациях). Её доказательство для одного уравнения.
14. Система уравнений в вариациях по параметру. Дифференцируемость (один раз) решения системы по начальному условию. Сведение к теореме о зависимости от начальных условий.
15. Формулировка теоремы о выпрямлении векторного поля в окрестности неособой точки. Доказательство для поля на плоскости.
16. Первый интеграл системы дифференциальных уравнений. Производная функции вдоль векторного поля. Теорема о существовании полной системы первых интегралов в окрестности неособой точки векторного поля. Общее решение линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка в окрестности неособой точки характеристического векторного поля. Существование и единственность решения задачи Коши уравнения в частных производных в окрестности нехарактеристической точки. Примеры нарушения существования и единственности в окрестности характеристической точки.
17. Устойчивость по Ляпунову особой точки векторного поля. Асимптотическая устойчивость. Устойчивость решения. Функция Ляпунова. Теорема Ляпунова об устойчивости особой точки векторного поля при наличии функции Ляпунова. Теорема об устойчивости особой точки векторного поля по линейному приближению. Функция Ляпунова для узла, вырожденного узла и фокуса. Устойчивость линейных векторных полей.
18. Теорема Четаева о неустойчивости особой точки векторного поля. Функция Четаева для узла, вырожденного узла, фокуса и седла.
19. Линейные системы с периодическими коэффициентами. Условие (без доказательства) на матрицу, гарантирующее существование и вещественность её логарифма. Теорема Флоке.
20. Предельные циклы. Устойчивые, неустойчивые и полустойчивые предельные циклы на плоскости. Отображение Пуанкаре. Связь устойчивости предельного цикла с производной отображения Пуанкаре. Формула для производной отображения Пуанкаре на плоскости через дивергенцию векторного поля. Теорема о скорости изменения объёма области при действии фазового потока. Теорема Дюлака об отсутствии циклов.
21. Устойчивость неподвижной точки отображения. Теорема об устойчивости линейного отображения, все собственные числа которого по модулю меньше 1. Формулировка об устойчивости неподвижной точки по первому приближению.

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1. Дифференциальное уравнение как поле направлений на плоскости. Рисунки интегральных кривых автономного дифференциального уравнения с исследованием единственности.
2. Решение уравнений первого порядка в нормальной и симметричной форме следующих типов: с разделяющимися переменными, в полных дифференциалах, однородные, квазиоднородные, линейные.
3. Уравнения, не разрешённые относительно производной. Особые решения.
4. Решение линейного неоднородного уравнения высшего порядка с постоянными коэффициентами и квазимногочленом в правой части. Однородные уравнения Эйлера. Решение уравнений линейных неоднородных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами методом вариации постоянных.
5. Решение задачи Коши для линейных однородных систем 2×2 и 3×3 с вещественными и комплексными собственными значениями. Вычисление экспоненты матрицы. Фазовые портреты невырожденных систем на плоскости.
6. Решение линейной неоднородной системы 2×2 с постоянными коэффициентами и квазимногочленами в правых частях. Решение линейной неоднородной системы 2×2 с постоянными коэффициентами методом вариации постоянных.
7. Уравнение в вариациях по параметру и начальным условиям для систем и уравнений. Метод малого параметра.
8. Фазовые потоки. Выпрямление векторных полей на плоскости (поиск диффеоморфизма, обратного к выпрямляющему).
9. Первые интегралы автономных систем. Линейные однородные уравнения в частных производных. Задача Коши и нахождение характеристических точек.
10. Исследование особых точек на устойчивость по линейному приближению. Определение их типа. (Не забывать про исключительный случай центра!)
11. Фазовые портреты уравнения Ньютона. Фазовые портреты автономных систем на плоскости с исследованием особых точек.
12. Фазовые портреты с предельными циклами в полярных координатах. Исследование цикла на устойчивость с помощью формулы для производной отображения Пуанкаре.
13. Исследование на устойчивость неподвижных точек гладких отображений.
14. Оператор монодромии: существование и устойчивость периодических решений линейных неоднородных уравнений и систем с периодическими коэффициентами.