

На экзамене не разрешается: пользоваться электронными приборами, конспектами, книгами и другими печатными или рукописными материалами; разговаривать и пользоваться помощью соседей.

Оценки: За ответ на каждый вопрос/задачу начисляются очки, максимальное количество очков указано в скобках перед вопросом/задачей; набранное количество очков складывается с очками, полученными за работу в семестре. Оценка определяется по итоговой сумме: 9-12 очков - удовлетворительно, 13-17 очков - хорошо, 18 и выше - отлично. **Зачёт идёт по 5 задачам!!!**

Задача 1.

- (1) Сформулируйте теорему о решении системы уравнений малых колебаний.
- (4) Найти производную $\partial y / \partial \mu|_{\mu=0}$ решения задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2\mu x^2 \\ \dot{y} = 2tx \end{cases}, \quad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = \mu \end{cases}.$$

Задача 2.

- (1) Сформулируйте теорему об устойчивости линейных систем.
- (4) Выяснить, устойчива ли линейная система

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + e^t \\ \dot{y} = y - 2z - t \\ \dot{z} = 2y - 4z + \sin t \end{cases}.$$

Задача 3.

- (1) Сформулируйте теорему о выпрямлении дифференцируемого векторного поля в окрестности неособой точки.

- (2) Найти общее решение уравнения $xz \frac{\partial z}{\partial x} + yz \frac{\partial z}{\partial y} = x - 2y,$

- (2) а также частное решение, удовлетворяющее условию $z|_{x=1} = y.$

Задача 4.

- (1) Сформулируйте теорему Бендиксона.
- (2) Устойчив ли цикл, соответствующий решению $x = \sin t$ дифференциального уравнения

$$\ddot{x} + \dot{x} + x((\dot{x})^2 - x\ddot{x} - 1) = 0 ?$$

- (2) Является ли он предельным?

Задача 5.

- (1) Найти векторное поле, определенное на интервале $(0, 1)$, с фазовым потоком

$$g^t: x \mapsto \frac{x}{(1 - e^t)x + e^t},$$

- (2) написать уравнение в вариациях вдоль решения с начальным условием $x(0) = \frac{1}{2}$,
- (2) проверить групповое свойство семейства преобразований $\{g^t\}$.

Задача 6. Шар через пружину соединён с подвесом и неподвижен. Шар оттянули вниз на малую величину A и отпустили. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти

- (3) закон движения шара, если своей верхней точки он достиг через 3 секунды,
- (2) сколько полных колебаний совершит шар за 2018 секунд.