

На экзамене не разрешается: пользоваться электронными электронными приборами, конспектами, книгами и другими печатными или рукописными материалам; разговаривать и пользоваться помощью соседей.

Оценки: За ответ на каждый вопрос/задачу начисляются очки, максимальное количество очков указано в скобках перед вопросом/задачей; набранное количество очков складывается с очками, полученными за работу в семестре. Оценка определяется по итоговой сумме: 9-13 очков - удовлетворительно, 14-18 очков - хорошо, 19 и выше - отлично.

Задача 1.

- (1) Сформулируйте теорему существования и единственности решения задачи Коши для линейного уравнения первого порядка в частных производных.
- (4) Докажите эту теорему.

Задача 2.

- (1) Существует ли решение уравнения

$$y' = \begin{cases} \sqrt{y} / \ln y & \text{при } y > 0 \\ 0 & \text{при } y \leq 0 \end{cases},$$

проходящее через точку $(0, 0)$?

- (2) Единственно ли локальное решение указанной задачи Коши? Ответ обоснуйте.
- (2) Составить линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами и наименьшего возможного порядка, у которого есть частное решение $y = 1 + xe^{-x}$.

Задача 3.

- (3) Найдите общее решение уравнения

$$y''' - y'' + 2y' - 2y = \sin t.$$

- (2) Во сколько раз изменится объем единичного куба в его фазовом пространстве за время от $t = 2018$ до $t = 2019$? Ответ обоснуйте.

Задача 4.

- (1) Сформулируйте теорему о дифференцируемой зависимости решения задачи Коши от начальных данных.
- (4) Найти производную $\frac{\partial}{\partial \mu} \big|_{\mu=0} g^t(x, y)$ фазового потока системы

$$\begin{cases} \dot{x} &= x + \mu xy \\ \dot{y} &= 1 + \mu xy \end{cases}.$$

Задача 5.

- (1) Устойчиво ли нулевое решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} &= -x - 5y \\ \dot{y} &= x + 3y \end{cases} ?$$

- (4) Написать функцию Четаева этой системы.