На экзамене не разрешается: пользоваться электронными электронными приборами, конспектами, книгами и другими печатными или рукописными материалам; разговаривать и пользоваться помощью соседей.

Оценки: За ответ на каждый вопрос/задачу начисляются баллы, максимальное количество баллов указано в скобках перед вопросом/задачей; набранное количество баллов суммируются с баллами, полученными за работу в семестре. Оценка определяется по итоговой сумме: 9-13 очков - удовлетворительно, 14-18 очков - хорошо, 19 и выше - отлично.

Задача 1.

(1) Сформулируйте теорему о формуле Лиувилля-Остроградского для линейного уравнения порядка n.

(4) Докажите эту теорему.

Задача 2.

(1) Сформулируйте теорему существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка $\dot{x} = v(t, x)$.

(4) Найдите число решений задачи в зависимости от параметра a (сами решения находить необязательно). Ответ обоснуйте:

$$a^2(a^2 - 3a - 4)y''' + a(a+1)y'' + (a-4)y' + 4y = -x^2 - a, \quad y(0) = 1, \ y'(0) = 1.$$

Задача 3.

(1) Сформулируйте теорему об альтернативе для линейной краевой задачи.

(4) Решите краевую задачу $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) + y''(0) = 2$, $y(x) \to 0$ при $x \to +\infty$.

Задача 4.

(1) Объясните суть метода малого параметра.

(4) Найти производную по μ при $\mu = 0$ решения задачи Коши

$$(x + \mu(y + x^2))u_x + yu_y = 0,\ u|_{y=1} = x.$$

Задача 5.

(4) Устойчива ли система

$$\begin{cases} \dot{x} &= x\cos t + y\sin t \\ \dot{y} &= -x\sin t + y\cos t \end{cases} ?$$

(1) Как изменится объём шара радиуса 2018 в фазовом пространстве под действием фазового потока этой системы за время $T = 2\pi$?