ОДУ: экзамен 27 июня 2012; третий поток

На экзамене не разрешается: пользоваться электронными приборами, конспектами, книгами и другими печатными или рукописными материалами; разговаривать и пользоваться помощью соседей; возвращаться в аудиторию после выхода из неё.

Оценки: за ответ на каждый вопрос/задачу начисляются очки, максимальное количество очков указано в скобках перед вопросом/задачей; результаты оцениваются по системе 5 из 6, т. е учитываются очки, набранные за лучшие ответы на 5 групп вопросов (всего предлагается 6 групп, наихудший результат по одной из 6 групп вопросов отбрасывается); также учитываются очки, полученные в течение семестра за контрольные и домашние задания; 9–12 очков — «удовл.», 13–16 очков — «хор.», 17 очков и более — «отл.».

1. **(1)** Дайте определение функции Ляпунова.

   (4) Не используя теорему об устойчивости по линейному приближению, докажите асимптотическую устойчивость нулевого положения равновесия системы

$$\begin{cases} \dot{x} &= -x + 9y + y^2 \\ \dot{y} &= -2y + x^2 \end{cases} .$$

   (Указание: вспомните доказательство теоремы об устойчивости по линейному приближению и воспользуйтесь теоремой Ляпунова.)

2. **(3)** Найдите все особые точки системы

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= 4x - x^3 \end{cases} ,$$

   исследуйте их на устойчивость, укажите их тип. При исследовании на устойчивость для каждой особой точки нужно указать (и обосновать!), является ли она: а) асимптотически устойчивой; б) устойчивой, но не асимптотически; в) неустойчивой.

   (2) Нарисуйте фазовый портрет системы.

3. **(1)** Дайте определение характеристического поля линейного однородного уравнения с частными производными.

   (1) Найдите все характеристические точки задачи Коши

$$y\frac{\partial u}{\partial x} + (4x - x^3)\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u\big|_{y=1} = x^2 - 4$$

   (3) и решите её в окрестности точки $(1, 1)$.

4. **(2)** Найдите фазовый поток векторного поля

$$\begin{cases} \dot{x} &= & -x+9y \\ \dot{y} &= & -2y \end{cases}.$$

(3) Найдите $\partial y/\partial\mu\big|_{\mu=0}$, где $(x(t,\mu),y(t,\mu))$ — решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} &= & -x+9y+\mu y^2 e^{5t}\sin t \\ \dot{y} &= & -2y+\mu x^2\cos t \end{cases}$$

с начальными условиями $x(0,\mu)=e^{\mu}-\mu$, $y(0,\mu)=\sin\mu$.

5. **(1)** Что такое оператор монодромии для системы линейных однородных уравнений с периодическими коэффициентами?

(2) Вычислите оператор монодромии для уравнения

$$\dot{x}=(a\sin^2 t+\cos^2 t+\sin t)x,$$

где $a\in\mathbb{R}$.

(2) Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\dot{x}=(a\sin^2 t+\cos^2 t+\sin t)x+e^{\cos t}$$

имеет единственное 2π–периодическое решение.

6. **(1)** Дайте определение предельного цикла.

(4) Найдите площадь образа единичного квадрата при действии преобразования за время 1 фазового потока векторного поля

$$\begin{cases} \dot{x} &= & -x+9y+y^2 \\ \dot{y} &= & -2y+x^2 \end{cases}.$$