

На экзамене не разрешается: пользоваться электронными приборами, конспектами, книгами и другими печатными или рукописными материалами; разговаривать и пользоваться помощью соседей.

**Оценки:** За ответ на каждый вопрос/задачу начисляются баллы, максимальное количество баллов указано в скобках перед вопросом/задачей; набранное количество баллов суммируются с баллами, полученными за работу в семестре. Оценка определяется по итоговой сумме: 9-13 очков - удовлетворительно, 14-18 очков - хорошо, 19 и выше - отлично.

### Задача 1.

(1) Сформулируйте теорему об устойчивости нулевого решения линейной системы с постоянными коэффициентами.

(4) Докажите эту теорему.

### Задача 2.

(1) Запишите формулу Лиувилля-Остроградского для линейного уравнения порядка  $n$ .

(4) Найдите число решений задачи в зависимости от параметра  $a$  (сами решения находить необязательно). Ответ обоснуйте:

$$(a + 2)(a^2 - 5a + 6)y''' + (a^2 - 4)y'' + (a - 3)y' + y = x - a, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 1.$$

### Задача 3.

(3) Найдите общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + e^{-t} \\ \dot{y} = -2y \\ \dot{z} = 3z \end{cases}$$

(2) Во сколько раз изменится объем единичного шара при отображении фазового потока от  $t = 2019$  до  $t = 2018$  ?

**Задача 4.**

- (1) Сформулируйте теорему о дифференцируемой зависимости решения задачи Коши от начальных данных.
- (4) Найти производную  $\frac{\partial}{\partial \mu} |_{\mu=0} g^t(x, y)$  фазового потока системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + \mu x^3 y^2 \\ \dot{y} = y + \mu x^2 y^3 \end{cases} .$$

**Задача 5.**

- (1) Устойчиво ли нулевое решение системы (ответ обоснуйте)

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 4y \\ \dot{y} = -x - 3y \end{cases} ?$$

- (4) Написать функцию Ляпунова этой системы.