ОДУ: экзамен 6 июня 2013; первый поток

На экзамене не разрешается: пользоваться электронными приборами, конспектами, книгами и другими печатными или рукописными материалами; разговаривать и пользоваться помощью соседей.

Оценки: за ответ на каждый вопрос/задачу начисляются очки, максимальное количество очков указано в скобках перед вопросом/задачей; результаты оцениваются по системе 5 из 6, т. е учитываются очки, набранные за лучшие ответы на 5 групп вопросов (всего предлагается 6 групп, наихудший результат по одной из 6 групп вопросов отбрасывается); также учитываются очки, полученные в течение семестра за контрольные и домашние задания; 9–12 очков — «удовл.», 13–16 очков — «хор.», 17 очков и более — «отл.».

1. **(5)** Не используя теорему о непрерывной зависимости решения от параметра, докажите, что значение $\varphi(1,\mu)$ решения $x=\varphi(t,\mu)$ уравнения

   $$\dot{x} = \operatorname{arctg} x + t + \sqrt[3]{\mu}$$

   с начальным условием $\varphi(0,\mu)=0$ непрерывно по μ при $\mu=0$. (Указание: воспользуйтесь леммой Гроноулла и вспомните доказательство теоремы о непрерывной зависимости решения от параметра.)

2. **(3)** Найдите все особые точки системы

   $$\begin{cases} \dot{x} &=& 2xy - x^2 - 3x \\ \dot{y} &=& (y-3)(2x-y) \end{cases},$$

   исследуйте их на устойчивость, укажите их тип. При исследовании на устойчивость для каждой особой точки нужно указать (и обосновать!), является ли она: а) асимптотически устойчивой; б) устойчивой, но не асимптотически; в) неустойчивой.

   (2) Нарисуйте фазовый портрет системы.

3. **(1)** Дать определение эргодического отображения окружности в себя.

   (1) Верно ли, что равномерно распределённая последовательность является всюду плотной? Верно ли обратное?

   (3) Поворот окружности $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ задан правилом $\varphi \to \varphi + 2\pi\alpha$. Найти временное среднее функции $e^{i\varphi}$ для $\alpha = 1/3$ и $\alpha = \pi$.

4. **(2)** Пусть $g^t x$ — фазовый поток векторного поля $\dot{x} = \sqrt[3]{|x|}\ln(1+x^2)$, на вещественной прямой. Найдите наибольшее k, при котором производная $\frac{\partial^{k+1}}{\partial t\,\partial x^k} g^t x$ непрерывна по (t, x) в окрестности точки $t = x = 0$. Ответ обосновать.

   (3) Найдите фазовый поток системы

$$\begin{cases} \dot{x} &= 2x - 4y - 6z \\ \dot{y} &= 5x - 2y + 5z \\ \dot{z} &= 3z \end{cases}.$$

5. **(5)** Найдите производную $\frac{\partial x}{\partial \mu}$ по параметру μ при $\mu = 0$ решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} &= \operatorname{tg} 2x - 4\ln y - 2\sin 3z \\ \dot{y} &= 5x + xz + 1/y^2 - e^{-5z} + \mu y\cos 4t \\ \dot{z} &= \sqrt{1+6z} - e^{x^2} \end{cases}$$

   с начальными условиями $x(0) = \mu^3$, $y(0) = \cos\mu$, $z(0) = \mu^2$.

6. **(3)** Найдите площадь образа множества $|x| + |y| \leqslant 1$ при действии оператора монодромии системы

$$\begin{cases} \dot{x} &= x\sin^2 t + y \\ \dot{y} &= x\sin^3 t + y \end{cases}.$$

   (2) Имеются ли у этой системы устойчивые решения? Ответ обосновать.