Часть 1

Задачи

1. (**4**) Шайбу положили на плоскость, наклонённую к горизонту под углом в $45°$, и отпустили. Найдите закон изменения пройденного шайбой расстояния, если известно, что сопротивление среды пропорционально её скорости, которая при $t \to +\infty$ стремится к 50 м/с.

2. (**4**) Найдите функцию $u(x, y, z)$, удовлетворяющую уравнению с частными производными:
$$x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} - (x^3y^2 + xz)\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$
и начальному условию:
$$u|_{x=1} = z.$$

Вопросы

3. (**2**) Нарисуйте эскиз интегральных кривых логистического уравнения с линейным коэффициентом размножения $k(x) = 5 - x$.

4. (**3**) Можно ли выпрямить векторное поле $\dot{x} = 1 - x$ в окрестности точки $x = 0$? Если да, укажите выпрямляющую замену координаты.

Часть 2

Задачи

5. (**2**) Найдите предельные циклы системы
$$\begin{cases} \dot{x} = y + x(x^2 + y^2 - 1)^2(x^2 + y^2 - 2)^3 \\ \dot{y} = -x + y(x^2 + y^2 - 1)^2(x^2 + y^2 - 2)^3 \end{cases}$$
и исследуйте их на устойчивость.

(**2**) Нарисуйте фазовый портрет системы.

Вопросы

6. (**3**) Укажите функцию Ляпунова для нулевого положения равновесия системы:
$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + 20y^3 \\ \dot{y} = -2y + 7x^2y \end{cases}.$$

7. (**4**) Правые части непрерывно дифференцируемой автономной системы из двух уравнений с зависимыми переменными x и y обращаются в нуль при $|x| + |y| \geqslant 1$. Верно ли, что все решения этой системы неограниченно продолжаются вперёд?

Часть 1

Задачи

1. (**2**) Найдите все решения уравнения $\ln(-y'/x) + xy' - 2y = 0$.

   (**2**) Укажите особое решение и покажите, что указанное решение является особым (нарисовав картинку или аналитически).

2. (**2**) Найдите фазовый поток векторного поля

$$\begin{cases} \dot{x} &= & 2y \\ \dot{y} &= & -3x \end{cases}.$$

   (**2**) Выпрямите указанное векторное поле в окрестности точки $(1, 0)$, предъявив в явном виде диффеоморфизм, обратный к выпрямляющему.

Вопросы

3. (**2**) Фазовые кривые каких типов имеет система $\dot{x} = 2y$, $\dot{y} = -3x$?

4. (**3**) Укажите область определения непродолжаемого решения уравнения $\dot{x} = x^2 + 4$ с начальным условием $t_0 = 0$, $x_0 = 0$.

Часть 2

Задачи

5. (**4**) Найдите производную по параметру ε при $\varepsilon = 0$ решения уравнения

$$x^2y'' - xy' + y = -\varepsilon y^2$$

   с начальными условиями $y(1) = \cos\varepsilon$, $y'(1) = 0$.

Вопросы

6. (**3**) Устойчивы ли по Ляпунову решения уравнения $\dot{x} = (\sin^2 t - 1)x + \sin\sqrt{2}t$? Устойчивы ли они асимптотически?

7. (**4**) Найдите предел при $\varepsilon \to 0$ решения задачи Коши

$$\dot{x} = -\sqrt{x^2 + \varepsilon^2 t^2}, \quad x(0) = 0,$$

   обосновав его существование.

Часть 1

Задачи

1. (**2**) Нарисуйте (не находя общего решения) интегральные кривые уравнения

$$\dot{x} = \sqrt[3]{x^4(x^3 - 1)}.$$

   (**2**) Найдите все точки локальной единственности.

2. (**2**) На фазовой плоскости уравнения

$$\ddot{x} = 2x - \pi \sin x$$

   найдите все особые точки, определите их типы и исследуйте на устойчивость. При исследовании на устойчивость для каждой особой точки нужно указать, является ли она: а) асимптотически устойчивой; б) устойчивой, но не асимптотически; в) неустойчивой.

   (**2**) Нарисуйте фазовый портрет уравнения.

Вопросы

3. (**2**) Дифференциальное уравнение $y' = x/(1 + e^y)$ задаёт поле направлений. Запишите перпендикулярное ему поле направлений как дифференциальное уравнение в симметричной форме.

4. (**3**) Найдите однопараметрическую группу симметрий уравнения $\ddot{x} = x^3/t^4$.

Часть 2

Задачи

5. (**4**) Найдите производные $\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}$ и $\frac{\partial y}{\partial \varepsilon}$ по параметру ε при $\varepsilon = 0$ решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} &= e^x \sin y - \varepsilon^2 e^{-t} \\ \dot{y} &= -x + \ln(1 + \varepsilon) \cos^2 t \end{cases}$$

   с начальными условиями $x(0) = \operatorname{arctg} \varepsilon$, $y(0) = \varepsilon^2$.

Вопросы

6. (**3**) Есть ли циклы у векторного поля:

$$\begin{cases} \dot{x} &= e^x - \ln(e^y + 1) \\ \dot{y} &= \operatorname{arctg} x + y^3 \end{cases} \; ?$$

7. (**4**) Для каждого натурального n найдите число решений задачи Коши

$$-y\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u\,|_{y=0} = x^n,$$

   определённых в какой-нибудь окрестности точки $x = y = 0$.

Часть 1

Задачи

1. (**4**) Найдите общее решение уравнения с частными производными:

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + (3y+2x)\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

при $x > 0$.

2. (**2**) Найдите все особые точки системы

$$\begin{cases} \dot{x} &= (x-1)^2 + y^2 - 1 \\ \dot{y} &= x^2 + y^2 - 1 \end{cases}$$

определите их типы и исследуйте на устойчивость. При исследовании на устойчивость для каждой особой точки нужно указать, является ли она: а) асимптотически устойчивой; б) устойчивой, но не асимптотически; в) неустойчивой.

(**2**) Нарисуйте фазовый портрет системы.

Вопросы

3. (**2**) Найдите изоклину дифференциального уравнения $y' = (x+y^2)/(1+y^2)$, проходящую через точку $(1,2)$.

4. (**3**) Рассмотрим осциллятор с трением, колебания которого под действием периодической внешней силы описываются уравнением $\ddot{x} + 2\dot{x} + 11x = \sin \nu t$. Найдите максимальную амплитуду установившихся вынужденных колебаний осциллятора и частоту $\nu > 0$, при которой она достигается.

Часть 2

Задачи

5. (**4**) Найдите производные $\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}$ и $\frac{\partial y}{\partial \varepsilon}$ по параметру ε при $\varepsilon = 0$ решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} &= \cos x \sin y - \ln(1+xy) \\ \dot{y} &= \sin x - e^t \varepsilon \end{cases}$$

с начальными условиями $x(0) = \sin\varepsilon$, $y(0) = \cos\varepsilon - 1$.

Вопросы

6. (**3**) Найдите площадь образа множества $|x| + |y| \leqslant 2$ при преобразовании g^2 из фазового потока векторного поля:

$$\begin{cases} \dot{x} &= x - 2xy \\ \dot{y} &= -x + y^2 \end{cases}.$$

7. (**4**) Ненулевое векторное поле на плоскости обращается в нуль в начале координат, а каждая из двух его компонент — многочлен с неотрицательными коэффициентами. Может ли начало координат быть устойчивым по Ляпунову?