УДК 514.17

А. В. Егоров, А. А. Приходько

Арифметическая теория прямоугольных паркетов

На основе предлагаемого авторами нового, "арифметического", подхода к теории прямоугольных паркетов строится простая классификация алгебраических прямоугольных паркетов (тайлингов) в $\mathbb{Z}^d$ и даются новые доказательства ряда классических результатов о прямоугольных паркетах в $\mathbb{Z}^d$. Исследуется возможность перенесения некоторых результатов теории прямоугольных паркетов в $\mathbb{Z}^d$ на случай евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$.

Библиография: 18 названий.

Введение

Рассмотрим семейство $\mathbb{P}$ фигур в евклидовом пространстве. Говорят, что множество F *обладает* $\mathbb{P}$-*упаковкой* (или $\mathbb{P}$-*паркетом*), если F может быть представлено как объединение (с точностью до множества меры 0) дизъюнктных множеств A_ξ, где каждое A_ξ есть сдвиг некоторой фигуры из совокупности $\mathbb{P}$. В данной работе рассматриваются *прямоугольные паркеты* (см. [1; гл. 18]–[12]), т.е. предполагается, что каждая фигура $B \in \mathbb{P}$ является правильно ориентированным d-мерным прямоугольником. Одним из эффективных методов изучения свойств упаковок является так называемая *алгебраическая теория тайлингов*, развитая Ф. Барнесом в работах [8] и [9]. Понятие тайлинга[1] в [8] появляется как алгебраическое обобщение понятия упаковки. Множество F обладает $\mathbb{P}$-*тайлингом*, если индикатор[2] множества F принадлежит линейной оболочке индикаторов прямоугольников $B \in \mathbb{P}$. Переход от упаковок к тайлингам является аналогом хорошо известной конструкции Гротендика для полугрупп.

Пусть $\mathsf{T}_+(\mathbb{P})$ – множество всех прямоугольников, обладающих $\mathbb{P}$-тайлингом. Скажем, что два семейства $\mathbb{P}_1$ и $\mathbb{P}_2$ *эквивалентны*, если $\mathsf{T}_+(\mathbb{P}_1) = \mathsf{T}_+(\mathbb{P}_2)$. Под классификацией $\mathbb{P}$-тайлингов мы понимаем описание классов эквивалентных множеств $\mathbb{P}$. В настоящей работе мы ставим перед собой задачу дать такую интерпретацию алгебраической теории тайлингов, которая бы наиболее соответствовала случаю прямоугольных тайлингов, и, в частности, получить максимально простую их классификацию. Для построения такой классификации мы вводим в рассмотрение абстрактное понятие 1-подгруппы – подмножества в $\mathbb{Z}^d$, удовлетворяющего определенному алгебраическому условию (см. п. 1.3). Предлагаемая нами

Работа выполнена при частичной поддержке Гранта поддержки ведущих научных школ (№ 96-15-96135).

[1] Ф. Барнес, говоря о тайлингах, использует термин *packing*, а упаковки называет *true packing*. Мы используем терминологию, предложенную Дж. Кингом в [12].

[2] Индикатор F – это функция, равная единице в точках F и нулю в остальных точках.

классификация 1-подгрупп (являющаяся многомерным аналогом основной теоремы арифметики) позволяет установить следующее основное свойство прямоугольных тайлингов в $\mathbb{Z}^d$. Множество прямоугольников, обладающих $\mathbb{P}$-тайлингом, совпадает с минимальной 1-подгруппой, содержащей множество $\mathbb{P}$ (уточнение этого утверждения см. в п. 1.4 и пп. 1.7–1.8). Исходя из этого результата, можно получить простые доказательства разнообразных утверждений о прямоугольных паркетах, таких как асимптотическая эквивалентность существования $\mathbb{P}$-упаковки и $\mathbb{P}$-тайлинга (см. п. 1.8).

Другой нашей задачей является исследование возможности перенесения результатов "целочисленной" теории на случай евклидова пространства $\mathbb{R}^2$ (см. §§ 3 и 4). Особое внимание уделяется тайлингам прямоугольниками, линейные размеры которых рациональны (§ 3). В этой ситуации также возможно построение, правда более сложной, классификации $\mathbb{P}$-тайлингов (см. п. 3.5).

§ 1. Прямоугольные тайлинги в $\mathbb{Z}^d$

1.1. Обозначения. В наших рассуждениях будут фигурировать аддитивные группы $\mathbb{Z}^d$, $\mathbb{Q}^d$, $\mathbb{R}^d$ и т. д., рассматриваемые как модули над $\mathbb{Z}^d$. Так, ka, $k \in \mathbb{Z}^d$, обозначает вектор $(k^1a^1, \dots, k^da^d)$. Мы используем обозначение $G_{/D}$ для фактор-группы $G/D\mathbb{Z}^d$, где G – одна из перечисленных групп $\mathbb{Z}^d$, $\mathbb{Q}^d$, $\mathbb{R}^d$ и т. д. и $D \in G$.

Далее, мы будем говорить, что a *делит* b и писать $a|b$, если существует вектор $k \in \mathbb{Z}^d$ такой, что $ka = b$. Обозначая через $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$, $\mathbb{Q}_+$ и $\mathbb{R}_+$ множества положительных элементов $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$, соответственно, мы видим, что $\mathbb{Z}_+^d$, $\mathbb{Q}_+^d$ и $\mathbb{R}_+^d$ становятся частично упорядоченными по отношению к "$|$".

Назовем множество $[a..b) := \{x \in \mathbb{Z}^d : a^i \leqslant x^i < b^i,\ 1 \leqslant i \leqslant d\} \subset \mathbb{Z}^d$ (d-*мерным*) *прямоугольником*. Вектор $s = b - a$ будем называть *размером прямоугольника* $[a..b)$.

Пусть $\mathbb{P}$ – конечная или бесконечная совокупность "базовых" прямоугольников в $\mathbb{Z}^d$. $\mathbb{P}$-*упаковкой конечного множества* (*фигуры*) $F \subset \mathbb{Z}^d$ называется разбиение множества F на сдвиги прямоугольников из $\mathbb{P}$:

$$F = \bigsqcup_{\xi} (a_\xi + B_\xi), \qquad a_\xi \in \mathbb{Z}^d, \quad B_\xi \in \mathbb{P}. \tag{1.1}$$

Скажем, что фигура F обладает *конечным* $\mathbb{P}$-*тайлингом*, если индикатор $\mathbf{1}_F$ множества F может быть представлен как конечная сумма следующего вида:

$$\mathbf{1}_F = \sum_{\xi \in \Xi} c_\xi \mathbf{1}_{a_\xi + B_\xi}, \qquad c_\xi \in \mathbb{C}, \quad a \in \mathbb{Z}^d, \quad B_\xi \in \mathbb{P}, \quad \#\Xi < \infty. \tag{1.2}$$

Мы придерживаемся терминологии, предложенной в работе [12].

Сделаем следующее терминологическое замечание. При рассмотрении $\mathbb{P}$-упаковок и $\mathbb{P}$-тайлингов нам нужно знать только размеры прямоугольников $B \in \mathbb{P}$, поэтому мы будем интерпретировать $\mathbb{P}$ двояко: как совокупность прямоугольников и как подмножество $\mathbb{N}^d$.

1.2. Алгебраическая теория прямоугольных тайлингов. Пусть $\mathfrak{R}_d = \mathbb{C}[z_1^{\pm 1}, \dots, z_d^{\pm 1}]$ обозначает кольцо полиномов Лорана от d переменных. Каждой фигуре F сопоставляется полином

$$Q_F := \sum_{a \in F} z^a, \qquad z^a := z_1^{a^1} \cdots z_d^{a^d}. \tag{1.3}$$

Очевидно, фигура F обладает конечным $\mathbb{P}$-тайлингом тогда и только тогда, когда $Q_F \in I_0(\mathbb{P})$, где $I_0(\mathbb{P})$ – линейная оболочка полиномов Q_{a+B}, $a \in \mathbb{Z}^d$, $B \in \mathbb{P}$. Ясно, что $I_0(\mathbb{P})$ является идеалом в $\mathfrak{R}_d$: $I_0(\mathbb{P}) \triangleleft \mathfrak{R}_d$. Идея *алгебраической теории тайлингов* состоит в исследовании $\mathbb{P}$-тайлингов с использованием свойств идеала $I_0(\mathbb{P})$ (см. [8], [9], а также [10], [12] и [13]). Для заданной совокупности $\mathbb{P}$ можно определить алгебраическое многообразие (см. [8])

$$V(\mathbb{P}) := \{z \in \mathbb{C}^d : \forall\, B \in \mathbb{P}\ \ Q_B(z) = 0\}.$$

Теорема 1.1 [10, теорема 5.1]. *Идеал $I_0(\mathbb{P})$ радикален, т.е.*

$$\forall\, f \in \mathfrak{R}_d \quad \forall\, r \in \mathbb{N} \qquad f^r \in I_0(\mathbb{P}) \iff f \in I_0(\mathbb{P}). \tag{1.4}$$

В частности, фигура F обладает конечным $\mathbb{P}$-тайлингом, т.е. $Q_F \in I_0(\mathbb{P})$, тогда и только тогда, когда Q_F обращается в 0 на $V(\mathbb{P})$.

Далее, $\mathbb{P}$-тайлинги содержат всю информацию об асимптотических свойствах $\mathbb{P}$-упаковок. Точнее, имеет место следующая теорема.

Теорема 1.2 [9, теорема 2.1]. *По заданной совокупности $\mathbb{P}$ можно найти константу $\mathscr{M}$ такую, что для любого прямоугольника $F = [a..a+s)$ при $s^i \geqslant \mathscr{M}$, $1 \leqslant i \leqslant d$, имеем*

$$F \text{ обладает } \mathbb{P}\text{-упаковкой} \iff F \text{ обладает конечным } \mathbb{P}\text{-тайлингом}. \tag{1.5}$$

Кроме того, алгебраическая теория прямоугольных тайлингов дает ответы на некоторые вопросы о свойствах так называемых частичных упаковок. А именно, скажем, что семейство дизъюнктных прямоугольников $a_\xi + B_\xi$ осуществляет *частичную упаковку фигуры* F, если $a_\xi + B_\xi \subset F$ для всех ξ. Рассмотрим всевозможные частичные $\mathbb{P}$-упаковки гиперкуба $[0..\bar{L})$, где $\bar{L} := (L, \dots, L)$, и обозначим через $\mathscr{W}(L)$ объем незаполненного пространства в наилучшей частичной $\mathbb{P}$-упаковке рассматриваемого гиперкуба.

Теорема 1.3 [9, теорема 4.1]. *Справедливо следующее: $\mathscr{W}(L) = O(L^\delta)$, где $\delta := \dim V(\mathbb{P})$ – размерность алгебраического многообразия $V(\mathbb{P})$.*

Другой подход к алгебраической теории тайлингов основан на использовании преобразований Фурье (см. [14]). Рассмотрим банахову алгебру $L^1(\mathbb{Z}^d)$ с мультипликативной операцией свертки. Пусть $I(\mathbb{P})$ – минимальный замкнутый идеал в $L^1(\mathbb{Z}^d)$, содержащий все функции $\mathbf{1}_B$, где $B \in \mathbb{P}$. Понятно, что при естественном отождествлении кольца $\mathfrak{R}_d$ с подалгеброй в $L^1(\mathbb{Z}^d)$ идеал $I(\mathbb{P})$ становится замыканием $I_0(\mathbb{P})$: $I(\mathbb{P}) = [I_0(\mathbb{P})]$.

Определение 1.4. Мы говорим, что фигура F обладает (*аппроксимирующим*) $\mathbb{P}$-*тайлингом*, если $\mathbf{1}_F \in I(\mathbb{P})$, иными словами, если индикатор $\mathbf{1}_F$ может быть представлен в виде

$$\mathbf{1}_F = \sum_{\xi=1}^{\infty} c_\xi \mathbf{1}_{a_\xi + B_\xi}, \qquad c_\xi \in \mathbb{C}, \quad a_\xi \in \mathbb{Z}^d, \quad B_\xi \in \mathbb{P}, \tag{1.6}$$

где ряд сходится в норме пространства $L^1(\mathbb{Z}^d)$.

Замечание 1.5. Можно показать (см. теорему 1.21), что прямоугольник F в $\mathbb{Z}^d$ обладает конечным тайлингом тогда и только тогда, когда он обладает аппроксимирующим тайлингом.

Пусть $f \in L^1(\mathbb{Z}^d)$, тогда функция $\widehat{f}$ на d-мерном торе $\mathbb{T}^d = \{(\alpha^1, \dots, \alpha^d) : \alpha^i \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}\}$, заданная равенством

$$\widehat{f}(\alpha) := \int_{\mathbb{Z}^d} e^{2\pi i \langle a, \alpha \rangle} da, \qquad \langle a, \alpha \rangle := \sum_{i=1}^{d} a^i \alpha^i, \tag{1.7}$$

называется *преобразованием Фурье функции* f.

Преобразование Фурье отображает $I(\mathbb{P})$ на замкнутый идеал $\widehat{I}(\mathbb{P}) \triangleleft C(\mathbb{T}^d)$. Введем обозначение

$$\mathcal{N}(\mathbb{P}) := \big\{\alpha \in \mathbb{Z}^d : \forall\, B \in \mathbb{P}\ \widehat{\mathbf{1}}_B(\alpha) = 0\big\}. \tag{1.8}$$

Из определений следует, что $\mathcal{N}(\mathbb{P}) = V(\mathbb{P}) \cap \mathbb{T}^d$, где $\mathbb{T}^d$ отождествляется с множеством $\{z : |z_i| \equiv 1\}$. Более того, нетрудно проверить, что для любого прямоугольника F функция $\widehat{\mathbf{1}}_F$ обращается в 0 на $\mathcal{N}(\mathbb{P})$ тогда и только тогда, когда полином Q_F обращается в 0 на $V(\mathbb{P})$. Таким образом, принимая во внимание замечание 1.5, теорема Барнеса 1.1 может быть переформулирована в следующем виде.

Утверждение 1.6. *Прямоугольник F обладает конечным (или аппроксимирующим) тайлингом тогда и только тогда, когда $\widehat{\mathbf{1}}_F$ обращается в 0 на $\mathcal{N}(\mathbb{P})$.*

1.3. Определение S_1-множеств. Рассмотрим семейство $\{H_1, \dots, H_d\}$ абелевых групп (полугрупп) и их прямое произведение $G = \prod_{i=1}^d H_i$. Точка $g = (g^1, \dots, g^d)$ будет называться *собственной*, если $g^i \neq 0$ для всех i. Обозначим через G_0 множество всех несобственных элементов G. Зафиксируем индекс k и вектор $g' = (g^i)_{i \neq k}$. Множество $L_{k,g'} := \{(g^1, \dots, h, \dots, g^d) : h \in H_k\}$ назовем *стандартной прямой*.

Определение 1.7. Множество $P \subseteq G$ обладает S_1-*свойством*, если для любого k и вектора g' пересечение $P \cap L_{k,g'}$, рассматриваемое как подмножество H_k, является подгруппой (подполугруппой) в H_k:

$$\big\{h \in H_k : (g^1, \dots, h, \dots, g^d) \in P\big\} \leqslant H_k. \tag{1.9}$$

(Запись $\Gamma \leqslant H_k$ означает, что Γ – подгруппа H_k.) Введем следующее отношение эквивалентности: $A \sim B$, если $A \triangle B \subseteq G_0$. Класс $\sim$-эквивалентных множеств с S_1-свойством мы будем называть S_1-*подмножеством* (или 1-*подгруппой* (1-*подполугруппой*)) прямого произведения G. Иными словами, S_1-множество – это множество с S_1-свойством, рассматриваемое с точностью до несобственных точек.

Множество $G_{(1)}$ всех S_1-подмножеств G частично упорядочено: A "*меньше или равно*" B, если $A \subseteq B$. Далее, если $\{P_\xi\}$ – произвольное семейство S_1-множеств в прямом произведении G, то пересечение $\bigcap_\xi P_\xi$ также S_1-множество.

Определение 1.8. Пусть A – подмножество G, S_1-множество

$$[A]_1 := \bigcap_{A \subseteq P \in G_{(1)}} P \tag{1.10}$$

называется S_1-*замыканием* A.

Таким образом, в $G_{(1)}$ любые два элемента обладают точной нижней (точной верхней) гранью, следовательно, $(G_{(1)}, \subseteq)$ является *решеткой*.

Предположим, что группы (полугруппы) $\{H_1, \dots, H_d\}$ снабжены топологией. Скажем, что S_1-множество *замкнуто*, если оно замкнуто с точностью до несобственных точек, т.е. если $P \cup G_0$ замкнуто в топологии прямого произведения.

1.4. Прямоугольные тайлинги и S_1-множества. Обозначим через $\mathsf{P}_+(\mathbb{P})$, $\mathsf{T}_+^{\mathrm{f}}(\mathbb{P})$ и $\mathsf{T}_+(\mathbb{P})$ множества размеров прямоугольников, обладающих $\mathbb{P}$-упаковкой, конечным $\mathbb{P}$-тайлингом и (аппроксимирующим) $\mathbb{P}$-тайлингом, соответственно. Тогда $\mathsf{P}_+(\mathbb{P}), \mathsf{T}_+^{\mathrm{f}}(\mathbb{P}), \mathsf{T}_+(\mathbb{P}) \subseteq \mathbb{N}^d$. Рассмотрим две точки

$$\boldsymbol{a} = \bigl(s^1, \dots, s^{k-1}, a, s^{k+1}, \dots, s^d\bigr),$$
$$\boldsymbol{b} = \bigl(s^1, \dots, s^{k-1}, b, s^{k+1}, \dots, s^d\bigr)$$

и обозначим

$$\boldsymbol{a} \overset{k}{\pm} \boldsymbol{b} := \bigl(s^1, \dots, s^{k-1}, a \pm b, s^{k+1}, \dots, s^d\bigr). \tag{1.11}$$

Ясно, что если $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathsf{P}_+(\mathbb{P})$, то $\boldsymbol{a} \overset{k}{+} \boldsymbol{b} \in \mathsf{P}_+(\mathbb{P})$. Поэтому $\mathsf{P}_+(\mathbb{P})$ является 1-подполугруппой $\mathbb{N}^d$. Аналогично, $\mathsf{T}_+(\mathbb{P}), \mathsf{T}_+^{\mathrm{f}}(\mathbb{P}) \in \mathbb{N}^d_{(1)}$. Кроме того, если $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathsf{T}_+(\mathbb{P})$, то $\boldsymbol{a} \overset{k}{\pm} \boldsymbol{b} \in \mathsf{T}_+(\mathbb{P})$, если только $a - b > 0$. Таким образом, если мы продолжим множество $\mathsf{T}_+(\mathbb{P})$ по симметрии на все $\mathbb{Z}^d$, полагая

$$\mathsf{T}(\mathbb{P}) := \pm\mathsf{T}_+(\mathbb{P}) := \bigcup_{\varepsilon} \varepsilon \mathsf{T}_+(\mathbb{P}), \qquad \varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d) \in \{\pm 1\}^d, \tag{1.12}$$

то мы получим 1-подгруппу $\mathsf{T}(\mathbb{P}) \in \mathbb{Z}^d_{(1)}$. Аналогично определяется 1-подгруппа $\mathsf{T}^{\mathrm{f}}(\mathbb{P}) := \pm\mathsf{T}_+^{\mathrm{f}}(\mathbb{P})$. Заметим, что ограничения множеств $\mathsf{T}^{\mathrm{f}}(\mathbb{P})$ и $\mathsf{T}(\mathbb{P})$ на $\mathbb{N}^d$ совпадают с $\mathsf{T}_+^{\mathrm{f}}(\mathbb{P})$ и $\mathsf{T}_+(\mathbb{P})$, соответственно.

Напомним, что S_1-множество – это класс эквивалентности. В самом деле, мы должны рассматривать $\mathsf{T}^{\mathrm{f}}(\mathbb{P})$ и $\mathsf{T}(\mathbb{P})$ с точностью до несобственных точек, соответствующих прямоугольникам, у которых хотя бы одна сторона нулевая, а такие прямоугольники являются вырожденными, т.е. пустыми.

1.5. Элементарные свойства S_1-множеств в $\mathbb{N}^d$ и $\mathbb{Z}^d$. Мы говорим, что множество $P \subseteq \mathbb{Z}^d$ является D-*периодическим*, $D \in \mathbb{Z}^d_+$, если $kD + P = P$ для всех $k \in \mathbb{Z}^d$. Далее, решетка называется *нётеровой*, если любая возрастающая последовательность (или направленность) элементов данной решетки стабилизируется на некотором конечном шаге.

Теорема 1.9. *Решетка $(\mathbb{Z}^d_{(1)}, \subseteq)$ нётерова. Любая 1-подгруппа P группы $\mathbb{Z}^d$ периодическая. Проекции P на координатные гиперплоскости также являются 1-подгруппами.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по размерности d. Пусть $P \in \mathbb{Z}^d$. Для каждого $h > 0$ определим 1-подгруппу

$$P(h) := \big\{(s^1, \dots, s^{d-1}) : (s^1, \dots, s^{d-1}, h) \in P\big\}. \tag{1.13}$$

Если $h_1 | h_2$, то благодаря S_1-свойству $P(h_1) \subseteq P(h_2)$. Значит, 1-подгруппы $\{P(h)\}_{h>0}$ образуют монотонную направленность. Она стабилизируется ввиду нётеровости $\mathbb{Z}^{d-1}_{(1)}$, которая имеет место в силу предположения индукции. Таким образом, существует $h_0 = D^d$ такое, что $P(h) = P(h_0)$ для всех h, обладающих свойством $h_0 | h$. Заметим, что проекция на гиперплоскость первых $d-1$ координат совпадает с $P(h_0)$, а следовательно, является 1-подгруппой: $\pi_{1,\dots,d-1} P = \pi_{[d]} P \in \mathbb{Z}^{d-1}_{(1)}$. Аналогично, $\pi_{[1]} P, \dots, \pi_{[d-1]} P \in \mathbb{Z}^{d-1}_{(1)}$.

Очевидно, что $P - D^d$-периодическое по координате a^d. Повторяя приведенные выше рассуждения для $i = 1, \dots, d-1$, мы получаем искомый период D.

Предположим теперь, что мы имеем возрастающую последовательность $\{P_t\}_{t=1}^{\infty}$ 1-подгрупп в $\mathbb{Z}^d$. В силу индуктивного предположения все проекции $\pi_{[i]} P_t$ стабилизируются, начиная с некоторого t_0. Тогда все 1-подгруппы P_t, $t \geqslant t_0$, имеют общий период D, зависящий только от проекций $\pi_{[i]} P_{t_0}$. Значит, множества P_t, $t \geqslant t_0$, полностью определяются пересечениями $P_{t\,/\,D} := P_t \cap (0..D]$. Так как $t \leqslant u \Longrightarrow P_{t\,/\,D} \subseteq P_{u\,/\,D}$ и множества $P_{t\,/\,D}$ конечны, последовательность $\{P_{t\,/\,D}\}_{t \geqslant t_0}$ также стабилизируется.

Теорема 1.10. *Каждая 1-подгруппа P в $\mathbb{Z}^d$ является конечно порожденной: $P = [a_1, \dots, a_n]_1$, иными словами, обладает конечным базисом.*

Доказательство. Это утверждение является универсальным свойством нётеровых структур, для элементов которых определено понятие базиса.

Пусть $\{a_1, a_2, \dots\}$ – перечисление элементов P и $P_n := [a_1, \dots, a_n]_1$. Тогда $P_n \subseteq P_{n+1}$ и $\bigcup_n P_n = P$. По предыдущей теореме существует n такое, что $P_n = P$, т.е. $\{a_1, \dots, a_n\}$ – базис P.

Обратно, имея возрастающую последовательность $P_1 \subseteq P_2 \subseteq \dots = P$, мы можем найти t_0 и конечный базис (1-подгруппы P) $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq P_{t_0}$. Тогда для всех $t \geqslant t_0$ имеем $P_t \subseteq P = [a_1, \dots, a_n]_1 \subseteq P_{t_0}$. Следовательно, $P_t \equiv P_{t_0}$ $\forall\, t \geqslant t_0$.

Теорема 1.11. *Решетка $\mathbb{N}^d_{(1)}$ нётерова.*

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по d. Если $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ – некоторая возрастающая последовательность 1-подполугрупп $\mathbb{N}^d$ и $P_n := [A_n]_1$, то по теореме 1.2 (доказательство см. в п. 1.8)

$$\exists\, \mathscr{M}_n \quad \forall\, s \in \mathbb{Z}^d,\ s^i \geqslant \mathscr{M}_n, \quad s \in A_n \iff s \in P_n. \tag{1.14}$$

В силу теоремы 1.9 существует такое n_0, что $P_n = P_{n_0}$ при $n \geqslant n_0$. Очевидно, мы можем положить $\mathscr{M}_n$ для $n \geqslant n_0$ равными $\mathscr{M}_{n_0}$. Итак, в d-октанте $\{s : s^i \geqslant \mathscr{M}_{n_0}\}$ исходная последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ стабилизируется.

Далее, рассмотрим семейство гиперплоскостей

$$\big\{\{a^1\} \times \mathbb{Z}^{d-1} : 0 < a^1 < \mathscr{M}_{n_0}\big\} \sqcup \dots \sqcup \big\{\mathbb{Z}^{d-1} \times \{a^d\} : 0 < a^d < \mathscr{M}_{n_0}\big\}.$$

Пересечения A_n с некоторой фиксированной гиперплоскостью из данного семейства образуют возрастающую последовательность 1-подполугрупп $\mathbb{N}^{d-1}$, которая стабилизируется по предположению индукции. В силу того, что рассмотренное семейство гиперплоскостей конечно, последовательность A_n стабилизируется на конечном шаге.

Следствие 1.12. *Любая* 1-*подполугруппа* $\mathbb{N}^d$ *обладает конечным базисом.*

Определение 1.13 (см. [12]). $\mathbb{P}$-упаковка $\mathscr{P}$ прямоугольника B называется *расщепляемой*, если B можно разбить на два прямоугольника B_1 и B_2 так, что ограничение упаковки $\mathscr{P}$ на B_1 и B_2 дает $\mathbb{P}$-упаковки B_1 и B_2, соответственно. Прямоугольник B, обладающий $\mathbb{P}$-упаковкой, называется $\mathbb{P}$-*расщепляемым*, если B имеет некоторую расщепляемую $\mathbb{P}$-упаковку. Следуя Дж. Кингу, мы обозначим через $\mathsf{Unsplit}(\mathbb{P})$ множество всех $\mathbb{P}$-нерасщепляемых прямоугольников.

$\mathbb{P}$-нерасщепляемые прямоугольники можно считать простейшими прямоугольниками, обладающими $\mathbb{P}$-упаковкой. А именно, нетрудно проверить, что $\mathsf{Unsplit}(\mathbb{P})$ является подмножеством любого базиса в $\mathsf{P}_+(\mathbb{P})$. Отсюда вытекает следующее свойство упаковок прямоугольниками в $\mathbb{Z}^d$ (см. [4] и [12]).

Теорема 1.14. *Множество* $\mathsf{Unsplit}(\mathbb{P})$ *конечно.*

1.6. Определение оператора сопряжения. Пусть H – топологическая абелева группа и $\widehat{H}$ – группа, дуальная к H.

Определение 1.15. Пусть множество $\mathbb{P} \subset H^d$,

$$\mathbb{P}^* := \left\{\alpha \in \widehat{H}^d_{(1)} : \forall\, a \in \mathbb{P}\ \exists\, i\ \ a^i \cdot \alpha^i = 0\right\} \tag{1.15}$$

назовем множеством, *сопряженным к* $\mathbb{P}$. Здесь $a^i \cdot \alpha^i$ обозначает действие характера α^i на элемент a^i.

Ясно, что $\mathbb{P}^*$ – 1-подгруппа $\widehat{H}^d$. Обычно мы будем рассматривать *оператор сопряжения* как отображение из $H^d_{(1)}$ в $\widehat{H}^d_{(1)}$.

Утверждение 1.16. *Отображение*[3] $P \mapsto P^*$ *является соответствием Галуа, т.е.* $(\,\cdot\,)^*$ *не возрастает и* $P \subseteq P^{**}$. *В частности,* $P^{***} = P^*$ *для любого* P.

1.7. Необходимое условие существования тайлинга. Рассмотрим прямоугольник $F = [0..h)$. Если F обладает (конечным или аппроксимирующим) тайлингом, то $\mathbf{1}_F \in I(\mathbb{P})$. Следовательно, $\widehat{\mathbf{1}}_F(\mathscr{N}(\mathbb{P})) = \{0\}$. Наша интерпретация алгебраической теории прямоугольных тайлингов базируется на следующем наблюдении.

Утверждение 1.17. *Справедливо следующее:* $\mathscr{N}(\mathbb{P}) = \mathbb{P}^* \in \mathbb{T}^d_{(1)}$.

Более того, нетрудно показать, что преобразование Фурье прямоугольника $F = [0..h)$ обращается в 0 на $\mathbb{P}^*$, $\widehat{\mathbf{1}}_F(\mathbb{P}^*) = \{0\}$, тогда и только тогда, когда $h \in \mathbb{P}^{**}$, $h \in \mathbb{N}^d$. Таким образом, мы приходим к следующему необходимому условию существования тайлинга.

Утверждение 1.18. *Если прямоугольник* $[0..h)$ *обладает* $\mathbb{P}$-*тайлингом, то* $h \in \mathbb{P}^{**}$. *Другими словами,*

$$\mathsf{T}^{\mathrm{f}}(\mathbb{P}) \subseteq \mathsf{T}(\mathbb{P}) \subseteq \mathbb{P}^{**}. \tag{1.16}$$

[3] Точнее, пара отображений $(\,\cdot\,)^* \colon H^d_{(1)} \to \widehat{H}^d_{(1)}$ и $(\,\cdot\,)^* \colon \widehat{H}^d_{(1)} \to H^d_{(1)}$.

Утверждение, что данное условие является также достаточным для существования тайлинга (см. теорему 1.1) может быть представлено в следующей форме: в $\mathbb{Z}^d$ оператор сопряжения *инволютивен*, т.е. $P^{**} = P$ для любого $P \in \mathbb{Z}^d_{(1)}$.

Кинг в [12] дает комбинаторное доказательство утверждения, аналогичного инволютивности $(\,\cdot\,)^*$. Мы получим этот результат как следствие *арифметической классификации* 1-подгрупп $\mathbb{Z}^d$, обсуждаемой в § 2 и § 3.

1.8. Асимптотическая эквивалентность $\mathbb{P}$-упаковок и $\mathbb{P}$-тайлингов для $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{Z}^d$. Теперь мы обсудим свойство асимптотического совпадения множеств $\mathsf{P}_+(\mathbb{P})$ и $\mathsf{T}^{\mathrm{f}}_+(\mathbb{P})$ (теорема 1.2). Рассмотрим два множества $A, B \subseteq \mathbb{N}^d$ и определим следующее отношение:

$$A \approx B \iff \exists \mathscr{M}\ \forall s,\ s^i \geqslant \mathscr{M},\quad s \in A \Leftrightarrow s \in B. \tag{1.17}$$

Определение 1.19. Скажем, что $\mathbb{P}$-упаковки *асимптотически эквивалентны* (*A-эквивалентны*) $\mathbb{P}$-тайлингам, если $\mathsf{P}_+(\mathbb{P}) \approx \mathsf{T}_+(\mathbb{P})$.

Асимптотическая эквивалентность $\mathbb{P}$-упаковок и $\mathbb{P}$-тайлингов в $\mathbb{Z}^d$ составляет утверждение теоремы 1.2. Ниже мы дадим новое доказательство этой теоремы. Пусть $\mathsf{P}(\mathbb{P})$ – S_1-замыкание $\mathsf{P}_+(\mathbb{P})$. Скажем, что прямоугольник $F = [0..h)$ обладает *квази-упаковкой*, если $h \in \mathsf{P}(\mathbb{P})$. Это понятие может рассматриваться как "*S_1-обобщение*" *упаковки*.

Утверждение 1.20. *Справедливо следующее*: $\mathsf{P}(\mathbb{P}) \approx \mathsf{P}_+(\mathbb{P})$.

Итак, для доказательства A-эквивалентности прямоугольных тайлингов и упаковок нам нужно лишь проверить равенство $\mathsf{P}(\mathbb{P}) = \mathsf{T}(\mathbb{P})$. Преимущество данного условия состоит в использовании 1-подгрупп, структура которых намного проще структуры 1-подполугрупп.

Нашей ближайшей целью является вывод ряда результатов теории прямоугольных тайлингов в $\mathbb{Z}^d$ из свойства инволютивности оператора сопряжения.

Теорема 1.21. *Пусть* $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{N}^d$. *Тогда*

$$[\mathbb{P}]_1 = \mathsf{P}(\mathbb{P}) = \mathsf{T}^{\mathrm{f}}(\mathbb{P}) = \mathsf{T}(\mathbb{P}) = \mathbb{P}^{**}. \tag{1.18}$$

Доказательство. Рассмотрим цепочку включений

$$[\mathbb{P}]_1 \subseteq \mathsf{P}(\mathbb{P}) \subseteq \mathsf{T}^{\mathrm{f}}(\mathbb{P}) \subseteq \mathsf{T}(\mathbb{P}) \subseteq \mathbb{P}^{**} \subseteq [\mathbb{P}]_1^{**}. \tag{1.19}$$

Так как $[\mathbb{P}]_1 \in \mathbb{Z}^d_{(1)}$, то $[\mathbb{P}]_1^{**} = [\mathbb{P}]_1$ (см. п. 2.4), а значит, все включения превращаются в равенства.

Следствие 1.22. *Тождества* $\mathsf{T}^{\mathrm{f}}(\mathbb{P}) = \mathsf{T}(\mathbb{P}) = \mathbb{P}^{**}$ *означают, что существование конечного тайлинга эквивалентно существованию аппроксимирующего тайлинга и эквивалентно обращению функции* $\widehat{\mathbf{1}}_F$ *в* 0 *на* $\mathscr{N}(\mathbb{P}) = \mathbb{P}^*$.

Следствие 1.23. *Из равенства* $\mathsf{P}(\mathbb{P}) = \mathsf{T}(\mathbb{P})$ *вытекает, что существование квази-упаковки эквивалентно существованию тайлинга. Откуда в силу утверждения* 1.20 *следует эквивалентность* $\mathsf{P}_+(\mathbb{P}) \approx \mathsf{T}_+(\mathbb{P})$, *т.е. A-эквивалентность $\mathbb{P}$-упаковок и $\mathbb{P}$-тайлингов для* $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{N}^d$.

Следствие 1.24. *Наконец, равенство* $[\mathbb{P}]_1 = \mathsf{T}(\mathbb{P})$ *приводит к следующему свойству* $\mathbb{P}$*-тайлингов. Прямоугольник* F *обладает* $\mathbb{P}$*-тайлингом тогда и только тогда, когда* F *может быть построен из прямоугольников* $B \in \mathbb{P}$ *в результате применения конечного числа операций "отрезания"* $a \overset{i}{-} b$ *и "приклеивания"* $a \overset{i}{+} b$. *В частности, если* F *обладает тайлингом, то* $\mathbf{1}_F$ *является конечной линейной комбинацией функций вида* $\mathbf{1}_{a+B}$, $B \in \mathbb{P}$ *с целыми коэффициентами.*

1.9. Приложение в эргодической теории. В этом пункте мы обсудим одно приложение упаковок прямоугольниками в эргодической теории. Рассмотрим обратимое сохраняющее меру преобразование T пространства Лебега (X, μ) с нормированной непрерывной мерой μ. Можно считать, что X – это отрезок $[0, 1]$ со стандартной мерой Лебега.

Преобразование T называется *апериодическим* (или *свободным*), если мера периодических относительно T точек равна 0. Хорошо известная лемма Рохлина–Халмоша (см. [14]) утверждает, что если преобразование T свободно, то для заданных чисел $h \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $B \subset X$ такое, что множества

$$B,\ TB,\ T^2B,\ \dots,\ T^{h-1}B \subset X$$

дизъюнктны и

$$\mu\Big(\bigcup_{j=0}^{h-1} T^j B\Big) > 1 - \varepsilon.$$

Множество $B \sqcup TB \sqcup \dots \sqcup T^{h-1}B$ называется *башней Рохлина–Халмоша высоты* h.

Одним из обобщений сформулированной леммы является следующий результат.

Теорема 1.25 [15]. *Предположим, что преобразование* T *свободно и заданы высоты* $h_1, \dots, h_k$ *и веса* $m_1, \dots, m_k$, $k \geqslant 2$, *такие, что* $m^i > 0$ *и* $\sum_{i=1}^k m_i = 1$. *Тогда если* h_i *являются взаимно простыми, то существуют башни Рохлина–Халмоша* $\mathscr{T}_i = B_i \sqcup \dots \sqcup T^{h_i - 1} B_i$, *удовлетворяющие условиям*

$$X = \bigsqcup_{i=1}^m \mathscr{T}_i, \qquad \mu(\mathscr{T}_i) = m_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant m. \tag{1.20}$$

Эта теорема также может рассматриваться как аналог теоремы Рудольфа о специальном представлении эргодического потока с двузначной функцией ([16], см. также [17]).

Теорема 1.26. *Любой эргодический поток* $\{T^t : t \in \mathbb{R}\}$ *на пространстве Лебега* (X, μ) *изоморфен так называемому специальному потоку на пространстве*

$$X' = A \times [0, p] \sqcup B \times [0, q],$$

$p/q \notin \mathbb{Q}$, *однозначно определяемому соотношениями*

$$\begin{aligned} T^\delta(a, \xi) &= (a, \xi + \delta), \quad \text{если} \quad \xi + \delta \leqslant p; \\ T^\delta(b, \eta) &= (b, \eta + \delta), \quad \text{если} \quad \eta + \delta \leqslant q; \end{aligned} \tag{1.21}$$

$$T^\varepsilon(a, p) = (Sa, \varepsilon), \qquad T^\varepsilon(b, q) = (Sb, \varepsilon), \tag{1.22}$$

где S – метрический автоморфизм $A \sqcup B$, $a \in A$, $b \in B$ и $0 < \delta, \varepsilon < \min\{p; q\}$. Более того, параметры p, q, $p\mu(A)$ и $q\mu(B)$ могут быть выбраны произвольно.

Далее, рассмотрим $\mathbb{Z}^d$-*действие*, т.е. семейство $\boldsymbol{T}$ сохраняющих меру отображений T^a, $a \in \mathbb{Z}^d$, такое, что $T^{a+b} = T^a T^b$. Действие $\boldsymbol{T}$ называется *свободным*, если $T^a x \neq T^b x$ при $a \neq b$ для почти всех x.

Обсудим обобщения теоремы Альперна на случай свободных $\mathbb{Z}^d$-действий. Пусть Π – прямоугольник в $\mathbb{Z}^d$. Назовем *башней формы* Π множество $\bigsqcup_{a\in\Pi} T^a B$, где B – измеримое множество. Зафиксируем множество $\mathbb{P} \subset \mathbb{N}^d$ прямоугольников и распределение $\boldsymbol{m} = \{m_a : a \in \mathbb{P}\}$, $\sum_{a\in\mathbb{P}} m_a = 1$. Будем называть $(\mathbb{P}, \boldsymbol{m})$-*представлением действия* $\boldsymbol{T}$ семейство башен $\mathscr{T}_a$ формы $[0..a)$, удовлетворяющее условиям

$$X = \bigsqcup_{a\in\mathbb{P}} \mathscr{T}_a, \qquad \mu(\mathscr{T}_a) = m_a. \tag{1.23}$$

Назовем совокупность $\mathbb{P}$ *простой*, если выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

1) $\mathsf{P}_+(\mathbb{P}) \approx \mathbb{Z}^d$;
2) $\mathsf{T}(\mathbb{P}) = \mathbb{Z}^d$;
3) $I(\mathbb{P}) = L^1(\mathbb{Z}^d)$;
4) $\mathbb{P}^* = \varnothing$, т.е. не существует разбиения $[1..d]$ на d непустых множеств $\mathscr{K}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathscr{K}_d$ такого, что
$$\forall\, i \quad \text{НОД}\{a^i : a \in \mathscr{K}_i\} > 1.$$

В [14] дается следующее обобщение теоремы Альперна 1.25.

Теорема 1.27. *Если совокупность $\mathbb{P}$ проста, то любое $\mathbb{Z}^d$-действие обладает $(\mathbb{P}, \boldsymbol{m})$-представлением для любого распределения $\boldsymbol{m}$.*

В доказательстве этой теоремы существенно используется свойство асимптотической эквивалентности $\mathbb{P}$-упаковок и $\mathbb{P}$-тайлингов.

Модифицируя доказательство, приведенное в [14], можно показать, что условие простоты не является в данной теореме необходимым и может быть ослаблено до следующего условия: длины одномерных проекций прямоугольников из $\mathbb{P}$ должны быть взаимно просты. Последнее условие уже является неулучшаемым в том смысле, что для любого множества $\mathbb{P}$, не удовлетворяющего условию взаимной простоты одномерных проекций, найдется свободное действие $\boldsymbol{T}$, не обладающее $(\mathbb{P}, \boldsymbol{m})$-представлением.

§ 2. Арифметическая классификация 1-подгрупп $\mathbb{Z}^d$

2.1. Предварительные замечания. Отправной точкой нашей *арифметической классификации* является попытка исследования композиционных рядов 1-подгрупп и получения на их основе классификации 1-подгрупп, аналогичной разложению на простые сомножители. Непосредственная реализация этой идеи сопряжена с большими техническими трудностями. Поэтому мы используем данное соображение как вспомогательное и получаем непосредственное описание 1-подгрупп и их простых расширений (пример 1-подгруппы см. на рис. 2).

Определение 2.1. Пусть $P \in \mathbb{Z}^d_{(1)}$, 1-подгруппу $P' \supset P$ назовем *простым расширением* P, если не существует 1-подгруппы P'', отделяющей P и P': $P \subset P'' \subset P'$.

Предположим на время, что все рассматриваемые 1-подгруппы $P \subseteq \mathbb{Z}^d$ удовлетворяют условию НОД$(P) = \bar{1}$.

Определение 2.2. Последовательность $P = P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_{t_0} = \mathbb{Z}^d$ называется *композиционным рядом* 1-подгруппы P, если P_t являются простыми расширениями P_{t-1} для $t = 1, \ldots, t_0$.

Рассмотрим некоторый специальный класс простых расширений. Пусть $D \in \mathbb{N}^d$ и $\varphi|D$, 1-подгруппу вида

$$\Phi_D(\varphi) := \bigcup_{k=1}^{d} \varphi^1\mathbb{Z} \times \cdots \times D^k\mathbb{Z} \times \cdots \times \varphi^d\mathbb{Z} \tag{2.1}$$

мы будем называть (D, φ)-*фильтром*. Предположим для простоты, что $d = 2$. Очевидно, что все простые расширения $\Phi_D(\varphi^1, \varphi^2)$ должны иметь вид:

$$P_{p,q} := \Phi_D(\varphi^1, \varphi^2) \cup (D^1/p, D^2/q)\mathbb{Z}^2, \tag{2.2}$$

где $(p, q)|D$. Более того, p и q – простые числа.

Предположим теперь, что P – произвольная 1-подгруппа и P' – какое-нибудь ее простое расширение. Обозначим $\Phi_D(P) := \Phi_D(1, 1) \cap P$. Пусть a некоторая минимальная точка множества $P' \setminus P$. Тогда существует минимальный по D фильтр $\Phi_D(P)$ такой, что $\varphi|a$ и $a|D$, где $\Phi_D(P) = \Phi_D(\varphi^1, \varphi^2)$. Положим $(p, q) := D/a$. Можно показать, что p и q также являются *простыми* и *не зависят* от a.

Таким образом, любое простое расширение 1-подгруппы задается некоторой парой простых чисел. По аналогии с одномерной ситуацией, где 1-подгруппы имеют вид $a\mathbb{Z}$ и простым расширениям отвечают простые делители числа a, мы могли бы предположить, что любая 1-подгруппа полностью задается "множителями" (p, q) и их степенями. Однако это неверно. Мы покажем, что в дополнение к степеням $m_{(p,q)}$ делители, соответствующие паре (p, q), должны быть специальным образом "упорядочены". А именно, это "упорядочение" задается некоторой диаграммой Юнга $\mathscr{D}_{(p,q)}$ веса $m_{(p,q)}$.

2.2. (u, v)-таблицы и оператор Exp. Можно предложить два подхода к построению арифметической классификации 1-подгрупп в $\mathbb{Z}^d$. Первый связан с конечными S_1-множествами, т.е. 1-подгруппами $\mathbb{Z}^d_{/D}$. Суть второго подхода заключается в рассмотрении 1-подгрупп $\mathbb{Z}^d$ как подмножеств $\mathbb{Q}^d$ и применении арифметической классификации 1-подгрупп $\mathbb{Q}^d$, которая развивается в § 3. Недостатком этого подхода является то, что он применим только в размерности 2. Тем не менее, мы отмечаем, что все следствия из § 3, касающиеся 1-подгрупп $\mathbb{Z}^d$, остаются верными в более высоких размерностях. В этом параграфе мы обсудим первый подход.

Предположим, что $P \in \mathbb{Z}^d_{(1)}$ и D – некоторый период множества P. Построим пересечения $P^I_{/D}$ множества P с $\#I$-мерными гранями прямоугольника $(0..D]$, параллельными плоскости координат $i \in I$. Будем рассматривать $P^I_{/D}$ как 1-подгруппу $\mathbb{Z}^{\#I}_{/D^I}$. Семейство $\mathfrak{F}^{\uparrow}_D(P) = \{P^I_{/D} : I \subseteq [1..d]\}$ является *флагом*, т.е.

$$I \subset J \implies \pi^I P^J_{/D} \subseteq P^I_{/D}, \tag{2.3}$$

где π^I – проекция на плоскость координат $i \in I$. Очевидно, что P может быть восстановлено из флага $\mathfrak{F}_D^{\uparrow}(P)$. Таким образом, классификация 1-подгрупп $\mathbb{Z}^d$ может быть получена из классификации конечных 1-подгрупп.

Сейчас мы введем обозначения, которые будут постоянно использоваться ниже. Пусть $n = \prod_p p^{r_p}$ – разложение рационального числа n на простые множители. Обозначим через $\operatorname{Log} n$ последовательность $(r_p)_{p\in\mathscr{P}}$, где $\mathscr{P}$ – множество простых чисел. Мы будем использовать символ Exp для обратного к Log отображения. Пусть $\mathbf{F}$ обозначает множество всех отображений $r\colon \mathscr{P} \to \mathbb{Z}$ с конечным носителем. Тогда $\operatorname{Log} n \in \mathbf{F}$.

Если $a \in \mathbb{Q}_+^d$ и $\vec{p} = (p^1, \dots, p^d)$ – последовательность простых чисел, то $\operatorname{Log}_{\vec{p}} a$ обозначает вектор $(\operatorname{Log}_{p^1} a^1, \dots, \operatorname{Log}_{p^d} a^d)$. Пусть $\mathbb{Z}_{0,+}$ – множество всех неотрицательных элементов $\mathbb{Z}$.

Определение 2.3. *d-мерной диаграммой Юнга* называется множество

$$\mathscr{D} = \bigl\{x \in \mathbb{Z}_{0,+}^d : x^d \leqslant H(x^1, \dots, x^{d-1})\bigr\}, \tag{2.4}$$

где $H\colon \mathbb{Z}_{0,+}^{d-1} \to \mathbb{Z}_{0,+}$ – функция с конечным носителем, не возрастающая по любой переменной x^i. Мы будем называть точки $x \in \mathscr{D}$ *ячейками*.

Определение 2.4. Пусть $[a..b)$ – прямоугольная область в $\mathbb{Z}^d$. Множество $\mathscr{D} \subset [a..b)$ назовем *ограниченной кодиаграммой Юнга*, если $\mathscr{D} = [a..b) \setminus (a + \mathscr{A})$, где $\mathscr{A}$ – диаграмма Юнга и $\mathscr{A} \subseteq [0..b-a)$. Положим

$$\begin{aligned} {}^c\mathscr{D} := \bigcup_{\xi\in\mathscr{D}} [\xi^1, \xi^1+1] \times \dots \times [\xi^d, \xi^d+1] \\ \cup \bigcup_{k=1}^{d} [a^1, b^1] \times \dots \times \{b^k\} \times \dots \times [a^d, b^d] \subset \mathbb{R}^d. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Рассмотрим два элемента $u, v \in \mathbf{F}^d$, $u \leqslant v$. Существует лишь конечное число векторов $\vec{p} = (p^1, \dots, p^d)$ таких, что $u^i_{p^i} \neq v^i_{p^i}$ для всех i. Назовем (u,v)-*таблицей* семейство $\mathrm{T}(u,v)$ прямоугольников

$$\mathrm{T}_{\vec{p}}(u,v) := [(u^1_{p^1}, \dots, u^d_{p^d})..(v^1_{p^1}, \dots, v^d_{p^d})). \tag{2.6}$$

Определение 2.5. Семейство $\mathscr{D}$ ограниченных кодиаграмм Юнга $\mathscr{D}_{\vec{p}} \subseteq \mathrm{T}_{\vec{p}}(u,v)$ будем называть (u,v)-*диаграммой*.

Обозначим через $\mathfrak{D}^d(u,v)$ множество всех (u,v)-диаграмм. Ясно, что $\mathfrak{D}^d(u,v)$ является частично упорядоченным по отношению к теоретико множественному включению "$\subseteq$":

$$\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B} \iff \forall p \ \mathscr{A}_p \subseteq \mathscr{B}_p. \tag{2.7}$$

Более того, $\mathfrak{D}^d(u,v)$ – алгебра *Гейтинга* (или *псевдо-булева алгебра*), т.е. частично упорядоченное множество, удовлетворяющее следующим дополнительным условиям:

1) $\mathfrak{D}^d(u,v)$ – *решетка* (т.е. любые два элемента $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ обладают как точной нижней $\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}$, так и точной верхней $\mathscr{A} \vee \mathscr{B}$ гранями);
2) $\mathfrak{D}^d(u,v)$ содержит наименьший элемент $\varnothing$;
3) для любых $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ в множестве $\{\mathscr{D} : \mathscr{A} \vee \mathscr{D} \subseteq \mathscr{B}\}$ существует наибольший элемент $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$, называемый *псевдодополнением* $\mathscr{A}$ относительно $\mathscr{B}$.

Из теории псевдо-булевых алгебр следует (см., например, [18]), что решетка $\mathfrak{D}^d(u,v)$ *дистрибутивна*, т.е.

$$\forall\, \mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{D} \qquad \begin{aligned} \mathscr{D}\wedge(\mathscr{A}\vee\mathscr{B}) &= (\mathscr{D}\wedge\mathscr{A})\vee(\mathscr{D}\wedge\mathscr{B}),\\ \mathscr{D}\vee(\mathscr{A}\wedge\mathscr{B}) &= (\mathscr{D}\vee\mathscr{A})\wedge(\mathscr{D}\vee\mathscr{B}). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Определение 2.6. Пусть $v := \operatorname{Log} D$. По $(0,v)$-диаграмме $\mathscr{D}$ построим 1-подгруппу

$$\operatorname{Exp}(\mathscr{D}) := \bigl\{a\in\mathbb{Z}^d_{/D} : \forall\, p\ \ \operatorname{Log} a \Subset {}^c\mathscr{D}\bigr\}, \tag{2.9}$$

где для сокращения записи мы приняли следующее обозначение:

$$s \Subset {}^c\mathscr{D} \iff \forall\,\vec{p}\ s_{\vec{p}} \in {}^c\mathscr{D}_{\vec{p}}. \tag{2.10}$$

(Если $\operatorname{Log}_p a \notin \mathrm{T}_p(u,v)$, то мы считаем, что $\operatorname{Log}_{\vec{p}} a \in {}^c\mathscr{D}_{\vec{p}}$.)

Очевидно, что определение корректно, т.е. $\operatorname{Exp}(\mathscr{D}) \in (\mathbb{Z}^d_{/D})_{(1)}$. Заметим, что отображение Exp инъективно. Естественно поставить вопрос, будет ли оператор Exp взаимно однозначным? Ответ дает следующая теорема.

Теорема 2.7. *Для любой 1-подгруппы P, $P\subset\mathbb{Z}^d_{/D}$, существует единственная $(0,v)$-диаграмма $\operatorname{Log}(P)$, $v := \operatorname{Log} D$, такая, что $\operatorname{Exp}(\operatorname{Log}(P)) = P$. Другими словами, оператор* Exp *устанавливает естественный изоморфизм решеток*

$$\bigl((\mathbb{Z}^d_{/D})_{(1)},\subseteq\bigr) \overset{\operatorname{Exp}}{\cong} \bigl(\mathfrak{D}^d(0,v),\subseteq\bigr) \tag{2.11}$$

и отображение Log *является обратным к* Exp.

Простым следствием этого результата является оценка мощности множества $(\mathbb{Z}^d_{/D})_{(1)}$.

Утверждение 2.8. *Пусть $G = \mathbb{Z}^2_{/D}$ и $\Delta^i := \sum_{p\in\mathscr{P}} v^i_p$ – число простых делителей D^i с учетом кратности. Тогда*

$$\#G_{(1)} \leqslant 2^{\Delta^1\cdot\Delta^2}. \tag{2.12}$$

В частности,

$$\begin{aligned} \#G_{(1)} &\leqslant 2^{\log_2 D^1\cdot\log_2 D^2} \leqslant 2^{(\log_2 D^1+\log_2 D^2)^2/4}\\ &\leqslant (D^1\cdot D^2)^{(\log_2 D^1+\log_2 D^2)/4} = (\#G)^{(\log_2 \#G)/4}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Доказательство теоремы 2.7. Мы остановимся на случае $d = 2$. Рассмотрим 1-подгруппу P и определим $\operatorname{Log}(P)$ следующим образом. Для любой пары (p,q) построим множество $E_{(p,q)} = \{(\operatorname{Log}_p a^1, \operatorname{Log}_q a^2) : a\in P\}$. Тогда $\operatorname{Log}_{(p,q)}(P)$ – минимальная ограниченная кодиаграмма Юнга, содержащая $E_{(p,q)}$.

Нашей целью является доказательство следующих двух тождеств:

$$\operatorname{Exp}(\operatorname{Log}(P)) \equiv P, \qquad \operatorname{Log}(\operatorname{Exp}(\mathscr{D})) \equiv \mathscr{D}.$$

Мы докажем это, показав, что $\operatorname{Exp}(\operatorname{Log}(P)) \equiv P$, и воспользовавшись инъективностью Exp.

Предположим, что $a \in P$, тогда по определению оператора Log для любой пары (p,q) будем иметь

$$\operatorname{Log}_{(p,q)} a = (\operatorname{Log}_p a^1, \operatorname{Log}_q a^2) \in \operatorname{Log}_{(p,q)} P. \tag{2.14}$$

Откуда в силу определения Exp будет следовать, что точка a принадлежит $\operatorname{Exp}(\operatorname{Log}(P))$.

Итак, нам осталось доказать, что $\operatorname{Exp}(\operatorname{Log}(P)) \subseteq P$. Рассмотрим точку $a \in \mathbb{Z}^2_{/D}$, $a|D$. Если D^1/a^1 – простое число, то утверждение $a \in \operatorname{Exp}(\operatorname{Log}(P)) \Longleftrightarrow a \in P$ является непосредственным следствием определения оператора Log. Далее, полагая

$$m_r := \min\Big\{y : \Big(\frac{D^1}{r}, y\Big) \in P\Big\}, \tag{2.15}$$

определим "ограничения"

$$P_r := \Big\{a \in P : a^1 | \frac{D^1}{r},\ m_r | a^2\Big\}, \tag{2.16}$$

которые могут рассматриваться как 1-подгруппы в $\mathbb{Z}^2_{/(D^1/r, D^2)}$, где r – простой делитель D^1. Ясно, что

$$P = \bigcup_{k=0}^{p-1} \Big(\Big(k\frac{D^1}{r}, 0\Big) + P_r\Big) \cup \Big(\frac{D^1}{r}, m_r\Big)\mathbb{Z}^2_{/D}.$$

Поэтому нам осталось доказать, что точка a, удовлетворяющая условиям

$$a | \Big(\frac{D^1}{r}, D^2\Big), \qquad a \neq \Big(\frac{D^1}{r}, D^2\Big), \qquad \operatorname{Log} a \in \operatorname{Log} P, \tag{2.17}$$

принадлежит P_r.

Рассмотрим $(0,v)$-диаграмму $\mathscr{D} = \operatorname{Log}(P)$ и зафиксируем некоторое простое число r такое, что $v_r^1 > 0$. Полагая

$${}^c\mathscr{D}_{(r,q)} \cap \{x = v_r^1 - 1\} = [v_q^2 - \beta_{r,q}, v_q^2], \tag{2.18}$$

построим $(0, v_r)$-диаграммы

$$\mathscr{D}_{r\,(p,q)} := \begin{cases} \big\{(x,y) \in \mathscr{D}_{(p,q)} : y \geqslant v_q^2 - \beta_{r,q}\big\}, & \text{если } p \neq r, \\ \big\{(x,y) \in \mathscr{D}_{(r,q)} : 0 \leqslant x < v_r^1 - 1\big\} & \text{иначе,} \end{cases} \tag{2.19}$$

где $v_r := \operatorname{Log}(D^1/r, D^2)$. Пусть $\widetilde{\mathscr{D}}_r := \operatorname{Log}(P_r)$.

Ясно, что $\widetilde{\mathscr{D}}_r \subseteq \mathscr{D}_r$. Необходимо доказать обратное включение. Пусть точка (x,y) принадлежит ${}^c\mathscr{D}_{r\,(p_0,q_0)}$. Так как $\mathscr{D}_r \subseteq \mathscr{D}$ и $\mathscr{D} = \operatorname{Log}(P)$, существует последовательность $s \in \mathbf{F}^2$, удовлетворяющая условиям $\operatorname{Exp} s \in P$ (откуда $s_{(p,q)} \in {}^c\mathscr{D}_{(p,q)}$) и $s_{(p_0,q_0)} = (x,y)$. Заметим, что если мы положим $s_q^2 := v_q^2$ для $q \neq q_0$, то приведенные выше условия на s останутся в силе.

Предположим, что $s_r^1 = v_r^1$, и рассмотрим точку $(s_r^1, s_{q_0}^2)$. В силу определения $\mathscr{D}_r$ (см. (2.19)) эту точку можно сместить на единицу влево так, что она останется в ${}^c\mathscr{D}_{(r,q_0)}$. Значит, мы можем положить $s_r^1 := v_r^1 - 1$.

Построенная в результате описанной процедуры последовательность, которую мы обозначим через t, обладает следующими свойствами: $t \in {}^c\mathscr{D}_r$, $\operatorname{Exp} t \in P_r$ и $t_{(p_0,q_0)} = (x,y)$. Таким образом, $(x,y) \in {}^c\operatorname{Log}_{(p_0,q_0)}(P_r) = {}^c\widetilde{\mathscr{D}}_r$.

Чтобы завершить доказательство, воспользуемся индукцией по числу простых делителей D^1. А именно, рассмотрим точку, обладающую свойствами (2.17), и покажем, что $a \in P_r$. Действительно, $\operatorname{Log} a \in \mathscr{D}_r \subseteq \widetilde{\mathscr{D}}_r$. Напомним, что диаграмма $\widetilde{\mathscr{D}}_r = \operatorname{Log}(P_r)$. Следовательно, $a \in \operatorname{Exp}(\widetilde{\mathscr{D}}_r) = \operatorname{Exp}(\operatorname{Log}(P_r)) = P_r$. Итак, $a \in P_r \subseteq P$.

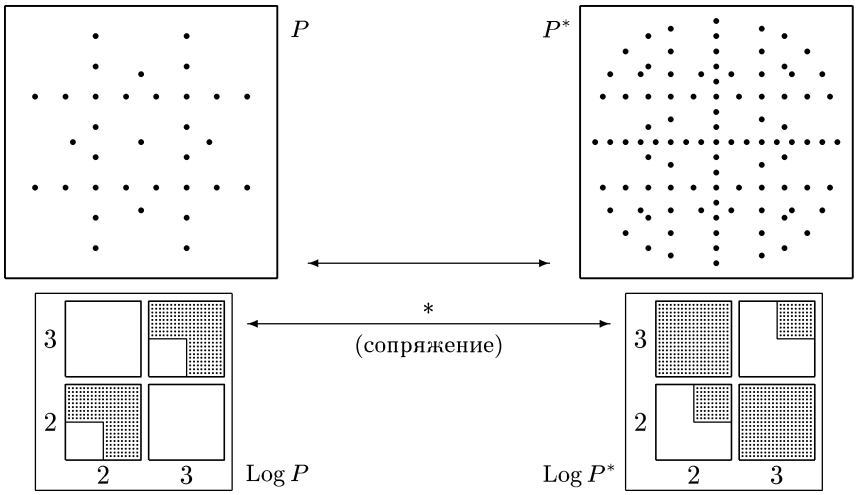

Рис. 1. Пример двух сопряженных 1-подгрупп $\mathbb{Z}^2_{/(36,36)}$

2.3. (u,v)**-диаграммы и сопряжение.** Зафиксируем последовательность $v \geqslant 0$ и определим отображение $\tau\colon \mathrm{T}(0,v) \to \mathrm{T}(0,v)$ следующим образом. Если $x \in \mathrm{T}_{\vec{p}}(0,v)$, то $\tau x := v_{\vec{p}} - x$, где $v_{\vec{p}} = (v^1_{p^1}, \dots, v^d_{p^d})$.

Определение 2.9. (u,v)-диаграмму $\mathscr{D}^* := \tau(\mathrm{T}(u,v) \setminus \mathscr{D})$ назовем диаграммой, *сопряженной к* $\mathscr{D}$.

Теорема 2.10. *Справедливо равенство* $\operatorname{Exp}(\mathscr{D}^*) = \operatorname{Exp}^*(\mathscr{D})$.

Доказательство. Основная идея доказательства заключена в следующем комбинаторном факте. Если $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ – диаграмма и кодиаграмма Юнга, причем $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ дополнительны, и $\xi \in \mathscr{A}$, $x \in \mathscr{B}$ – две точки, то существует, по крайней мере, один индекс i, для которого $x^i \geqslant \xi^i$.

Пусть точка $\alpha \in \operatorname{Exp}(\mathscr{D}^*)$, т.е. $\operatorname{Log} \alpha \in \mathscr{D}^*$. Если $\alpha \notin \operatorname{Exp}^*(\mathscr{D})$, то существует точка $a \in \operatorname{Exp}(\mathscr{D})$ такая, что для любого i произведение $a^i\alpha^i \not\equiv 0 \pmod{D^i}$. Значит, мы можем выбрать простые числа p^i так, что

$$\forall\, i \;\; \operatorname{Log}_{p^i}(a^i\alpha^i) < v^i_{p^i}. \tag{2.20}$$

Полагая $\mathscr{B} = \mathscr{D}_p$ и $\mathscr{A} = -\mathscr{D}^*_p$, мы видим, что $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ дополнительны. Далее, $\operatorname{Log}_p a \in \mathscr{D}$ и $v_p - \operatorname{Log}_p \alpha \in \mathscr{A}$. Следовательно, существует индекс i такой, что $\operatorname{Log}_{p^i} a^i \geqslant v^i_{p^i} - \operatorname{Log}_{p^i} \alpha^i$. Это противоречит условию (2.20).

Обратно, предположим, что $\alpha \in \operatorname{Exp}^*(\mathscr{D})$, но $\operatorname{Log} a \notin \mathscr{D}^*$. Тогда можно найти последовательность $p = (p^1, \dots, p^d)$ и точку $a \in \operatorname{Exp}(\mathscr{D})$ такую, что $v^i_{p^i} - \operatorname{Log}_{p^i} a^i > \operatorname{Log}_{p^i} \alpha^i$ для всех i. Следовательно, $a^i \alpha^i \not\equiv 0 \pmod 1$, $1 \leqslant i \leqslant d$. Таким образом, $\alpha \notin \operatorname{Exp}^*(\mathscr{D})$. Противоречие возникло из предположения, что $\operatorname{Log} a \notin \mathscr{D}^*$. Значит, $\operatorname{Exp}^*(\mathscr{D}) = \operatorname{Exp}(\mathscr{D}^*)$.

2.4. Свойства сопряжения в $(\mathbb{Z}^d_{/D})_{(1)}$ и $\mathbb{Z}^d_{(1)}$. В этом пункте мы докажем *инволютивность* оператора сопряжения в $\mathbb{Z}^d_{(1)}$. Для начала рассмотрим $(0, v)$-диаграмму $\mathscr{D}$ и ее двойное сопряжение $\mathscr{D}^{**}$. Очевидно, что

$$\mathscr{D}^{**} = \tau\big(\mathrm{T}(0, v) \setminus \tau(\mathrm{T}(0, v) \setminus \mathscr{D})\big) = \tau^2 \mathscr{D} = \mathscr{D}. \tag{2.21}$$

Следовательно, в силу теоремы 2.10 сопряжение в $\mathbb{Z}^d_{/D\,(1)}$ также является инволюцией.

Рассмотрим теперь 1-подгруппу $P \in \mathbb{Z}^d_{(1)}$ и соответствующий ей флаг $\mathfrak{F}^{\uparrow}_D(P)$. Семейство $\mathfrak{F}^{\downarrow}_D(P) := (P^{I\,*}_{/D} : I \subseteq [1..d])$ является *обратным флагом*, т.е. $\pi^I P^{J\,*}_{/D} \supseteq P^{I\,*}_{/D}$ при $I \subset J$. Нетрудно проверить, что

$$P^* = \bigcup_I P^{I\,*}_{/D} \times \mathbb{Z}^{d-\#I}_{/D^{[0..d]\setminus I}}, \tag{2.22}$$

где $D^{[0..d]\setminus I} = (D^i)_{i \in [0..d]\setminus I}$. Значит,

$$\mathfrak{F}^{\uparrow}_D(P^{**}) = \big\{P^{I\,**}_{/D} : I \subseteq [1..d]\big\} = \mathfrak{F}^{\uparrow}_D(P). \tag{2.23}$$

Таким образом, $P^{**} = P$.

2.5. Арифметическая классификация 1-подгрупп $\mathbb{Z}^2$: аналогия с одномерной арифметикой. Любая нетривиальная 1-подгруппа P в $\mathbb{Z}$ является обычной подгруппой и имеет вид:

$$P = a\mathbb{Z} = \prod_{p \in \mathscr{P}} p^{m_p}\, \mathbb{Z}. \tag{2.24}$$

Арифметическая классификация предоставляет способ получить аналогичное представление в многомерном случае. Если $d = 2$, то аналогия наиболее явная.

А именно, рассмотрим 1-подгруппу $P \in \mathbb{Z}^2_{(1)}$ и предположим, что $\pi^1 P = \pi^2 P = \mathbb{Z}$. Тогда P обладает конечным композиционным рядом, и если мы рассмотрим $\mathscr{D}_{(p,q)} := (\mathbb{Z}_{0,+} \times \mathbb{Z}_{0,+}) \setminus \operatorname{Log}_{(p,q)} P$ как подмножество $\mathbb{Z}_{0,+} \times \mathbb{Z}_{0,+}$ (см. §3), то существует лишь конечное число $\mathscr{D}_{(p,q)} \neq \varnothing$ и мы можем формально представить P в виде[4]

$$P = \prod_{(p,q)} (p, q)^{\mathscr{D}_{(p,q)}}\, \mathbb{Z}^2. \tag{2.25}$$

Для произвольной $P \in \mathbb{Z}^2_{(1)}$ имеем аналогичное представление

$$P = \prod_{(p,q)} (p, q)^{\mathscr{D}_{(p,q)}}\, (a\mathbb{Z} \times b\mathbb{Z}). \tag{2.26}$$

[4]Этой записи можно пытаться придать недостающую строгость, рассматривая простые расширения как операторы на $\mathbb{Z}^2_{(1)}$. Недостатком такого представления является то, что не все произведения формальных простых расширений допустимы, но лишь те, что соответствуют конечным наборам диаграмм Юнга.

Пример 2.11. Пусть $\mathbb{P} = \{(9,4),(6,6),(4,9)\}$, 1-подгруппа $P = [\mathbb{P}]_1$ показана на рис. 2. Разложение (2.25) для P имеет вид (см. также рис. 1):

$$P = (2,2)^{\boxplus}(3,3)^{\boxplus}\mathbb{Z}^2.$$

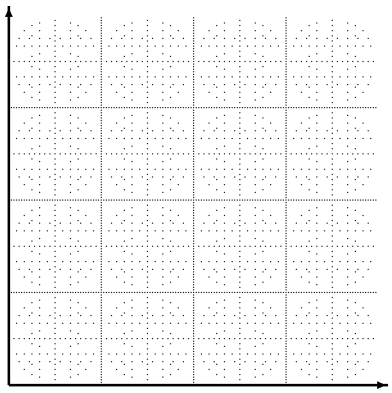

Рис. 2. Пример 1-подгруппы $P = (2,2)^{\boxplus}(3,3)^{\boxplus}\mathbb{Z}^2$

2.6. Классификация прямоугольных тайлингов и сложность 1-подгрупп. Под классификацией прямоугольных тайлингов мы подразумеваем описание 1-подгрупп вида $\mathsf{T}(\mathbb{P})$. В силу теоремы 1.21 в $\mathbb{Z}^d$ любая 1-подгруппа равна $\mathsf{T}(\mathbb{P})$ для некоторого $\mathbb{P}$. Значит, классификация тайлингов в $\mathbb{Z}^d$ эквивалентна классификации 1-подгрупп. Мы рассмотрим три подхода к этому вопросу. Первый – это алгебраическая теория тайлингов, которая сводит исследование $\mathbb{P}$-тайлингов к изучению свойств соответствующего идеала $I(\mathbb{P})$. В некоторых случаях, для специальных $\mathbb{P}$, эта интерпретация оказывается выгодной. Однако мы утверждаем, что как способ построения общей классификации алгебраическая теория тайлингов не дает выигрыша в сложности, потому что, как мы показали выше, переход от 1-подгруппы P к множеству P^* нулей идеала $\mathbb{P}$ суть инволюция, которая при ограничении класса всех 1-подгрупп D-периодическими превращается в инволюцию, заданную на некотором конечном множестве.

В качестве второго подхода к классификации прямоугольных тайлингов приведем способ, предложенный Кингом в [13]. Пусть $d = 2$. Будем сопоставлять 1-подгруппе P множество $\mathsf{Mnml}\,(P)$ минимальных относительно "$|$" элементов множества $P \cap \mathbb{Z}^2_+$. Заметим, что $P = [\mathsf{Mnml}\,(P)]_1$. Имея множество $\mathsf{Mnml}\,(P)$, можно конструктивно определить, принадлежит ли P та или иная точка $a \in \mathbb{Z}^2$. Данный подход имеет следующий недостаток. Точки $a \in \mathsf{Mnml}\,(P)$ являются "сильно зависимыми"; не любое множество A несравнимых между собой элементов $\mathbb{Z}^2_+$ может быть взято в качестве $\mathsf{Mnml}\,(P)$ для некоторого P, а соответствующее условие, налагаемое на A, является трудно проверяемым. Что касается вычислительной сложности этого метода, то как показал Кинг (см. [13]), если мощность $\mathbb{P}$ равна N, то максимальная мощность множества $\mathsf{Mnml}\,([\mathbb{P}]_1)$ равна в точности числу монотонных булевых функций от N переменных, т.е. имеет порядок 2^{2^N}.

Третьим методом описания прямоугольных тайлингов является арифметическая классификация 1-подгрупп, рассмотренная в §2. Этот метод устраняет недостаток предыдущего способа, так как предоставляет независимую систему параметров. Для того чтобы сравнить сложность арифметической классификации со сложностью описания базиса $\mathsf{Mnml}\,([\mathbb{P}]_1)$, нужно наложить некоторые разумные ограничения на границы изменения степеней простых чисел, входящих в разложения координат точек $a \in \mathbb{P}$, на которых мы здесь не останавливаемся. Тогда для сложности C задания $[\mathbb{P}]_1$ через $\mathrm{Log}([\mathbb{P}]_1)$ будем иметь оценку

$$\log C = O(N \log N). \tag{2.27}$$

§3. Арифметическая теория 1-подгрупп $\mathbb{Q}^2$

3.1. Оператор Exp **в** $\mathbb{Q}^2_{(1)}$**.** Пусть $H\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ – произвольная невозрастающая функция. Множество

$$\mathscr{D} = \bigl\{(\xi^1, \xi^2) \in \mathbb{Z}^2 : \xi^2 \geqslant H(\xi^1)\bigr\} \tag{3.1}$$

будем называть *расширенной кодиаграммой Юнга*. Положим

$${}^c\mathscr{D} := \bigcup_{\xi \in \mathscr{D}} [\xi^1, \xi^1 + 1] \times [\xi^2, \xi^2 + 1]. \tag{3.2}$$

Назовем $\mathscr{P}^2$*-диаграммой* семейство $\mathscr{D} = \{\mathscr{D}_{(p,q)} : (p,q) \in \mathscr{P}^2\}$ расширенных кодиаграмм Юнга. Обозначим через $\mathfrak{D}^2$ множество всех $\mathscr{P}^2$-диаграмм.

Определение 3.1. Пусть $\mathscr{D}$ – $\mathscr{P}^2$-диаграмма. Положим

$$\mathrm{Exp}(\mathscr{D}) := \pm\bigl\{a \in \mathbb{Q}^2_+ : \forall\,(p,q) \in \mathscr{P}^2 \ \ (\mathrm{Log}_p\, a^1, \mathrm{Log}_q\, a^2) \in {}^c\mathscr{D}_{(p,q)}\bigr\}. \tag{3.3}$$

Ясно, что $\mathrm{Exp}(\mathscr{D}) \in \mathbb{Q}^2_{(1)}$. Далее, определим "*сильные*" *проекции*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi}^1_+ \mathscr{D}_p &:= \bigl\{\xi \in \mathbb{Z} : \#\{q : (\xi, 0) \notin \mathscr{D}_{(p,q)}\} < \infty\bigr\} \subseteq \bigcap_q \pi^1 \mathscr{D}_{(p,q)}, \\ \boldsymbol{\pi}^2_+ \mathscr{D}_q &:= \bigl\{\eta \in \mathbb{Z} : \#\{p : (0, \eta) \notin \mathscr{D}_{(p,q)}\} < \infty\bigr\} \subseteq \bigcap_p \pi^2 \mathscr{D}_{(p,q)}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

где π^i – проекция на i-ю координатную ось. *Областью видимости диаграммы* $\mathscr{D}$ назовем семейство $\mathrm{T}^{[+]}(\mathscr{D})$ расширенных кодиаграмм Юнга

$$\mathrm{T}^{[+]}_{(p,q)}(\mathscr{D}) := \boldsymbol{\pi}^1_+ \mathscr{D}_p \times \boldsymbol{\pi}^2_+ \mathscr{D}_q. \tag{3.5}$$

Определение 3.2. Пусть $\mathscr{D} \in \mathfrak{D}^2$, $\mathscr{P}^2$-диаграмму $\mathrm{opt}(\mathscr{D}) := \mathscr{D} \cap \mathrm{T}^{[+]}(\mathscr{D})$ назовем *оптимизацией диаграммы* $\mathscr{D}$. $\mathscr{P}^2$-диаграмма $\mathscr{D}$ называется *оптимальной*, если $\mathrm{opt}(\mathscr{D}) = \mathscr{D}$.

Нетрудно проверить, что $\mathscr{A} = \mathrm{opt}(\mathscr{D})$ является наименьшей $\mathscr{P}^2$-диаграммой со свойством $\mathrm{Exp}(\mathscr{A}) = \mathrm{Exp}(\mathscr{D})$. Термин "область видимости" можно объяснить следующим образом. Ячейку $\xi \in \mathscr{D}_{(p_0,q_0)}$ назовем *видимой относительно* $\mathscr{D}$, если существует $s \in \mathbf{F}^2$ такое, что для всех $p, q \in \mathscr{P}$ точка $(s^1_p, s^2_q) \in \mathscr{D}_{(p,q)}$ и $(s^1_{p_0}, s^2_{q_0}) = \xi$. Тогда множество видимых ячеек есть в точности $\mathrm{opt}(\mathscr{D}) = \mathrm{T}^{[+]}(\mathscr{D}) \cap \mathscr{D}$. Понятно, что "*невидимые*" ячейки не влияют на значение $\mathrm{Exp}(\mathscr{D})$, другими словами, вся информация о $\mathrm{Exp}(\mathscr{D})$ содержится в $\mathrm{opt}(\mathscr{D})$.

Теорема 3.3. *Для любой 1-подгруппы* $P \in \mathbb{Q}^2_{(1)}$ *существует единственная* $\mathscr{P}^2$*-диаграмма* $\mathrm{Log}(P)$ *такая, что* $\mathrm{Exp}(\mathrm{Log}(P)) = P$. *Таким образом, отображение* Exp *устанавливает естественный изоморфизм решетки* $\mathbb{Q}^2_{(1)}$ *и решетки всех* $\mathscr{P}^2$*-диаграмм* $\mathfrak{D}^2_0$

$$(\mathbb{Q}^2_{(1)}, \subseteq) \underset{\mathrm{Exp}}{\cong} (\mathfrak{D}^2_0, \subseteq). \tag{3.6}$$

Ниже все $\mathscr{P}^2$-диаграммы предполагаются оптимальными.

3.2. Сопряжение в $\mathbb{Q}^2_{(1)}$. Пусть $\mathscr{D}$ – $\mathscr{P}^2$-диаграмма и $\mathrm{T} := \{\mathrm{T}_{(p,q)} : (p,q) \in \mathscr{P}^2\}$, $\mathrm{T}_{(p,q)} = \mathbb{Z}^d$. Обозначим

$$\mathrm{T} \setminus \mathscr{D} := \left\{\mathbb{Z}^2 \setminus \mathscr{D}_{(p,q)} : (p,q) \in \mathscr{P}^2\right\}. \tag{3.7}$$

Определение 3.4. Диаграммой, *сопряженной к* $\mathscr{D}$, назовем $\mathscr{P}^2$-диаграмму

$$\mathscr{D}^* := \mathrm{opt}(-\mathrm{T} \setminus \mathscr{D}). \tag{3.8}$$

Скажем, что диаграмма $\mathscr{D}$ *рефлексивна*, если $\mathscr{D}^{**} = \mathscr{D}$.

Утверждение 3.5. *Оператор сопряжения* $(\,\cdot\,)^* \colon \mathfrak{D}^2_0 \to \mathfrak{D}^2_0$ *является соответствием Галуа, т.е.*

$$\forall\, \mathscr{A}, \mathscr{B} \in \mathfrak{D}^2_0 \qquad \mathscr{A} \subseteq \mathscr{A}^{**}, \quad \mathscr{A} \subseteq \mathscr{B} \implies \mathscr{A}^* \supseteq \mathscr{B}^*. \tag{3.9}$$

Теорема 3.6. *Для всех* $\mathscr{D} \in \mathfrak{D}^2_0$ *справедливо равенство* $\mathrm{Exp}(\mathscr{D}^*) = \mathrm{Exp}^*(\mathscr{D})$.

В отличие от случая конечных 1-подгрупп и 1-подгрупп $\mathbb{Z}^d$, объединение $\mathscr{D}_{(p,q)} \cup \mathscr{D}^*_{(p,q)}$, вообще говоря, не равно $\mathbb{Z}^2$ (см. рис. 3).

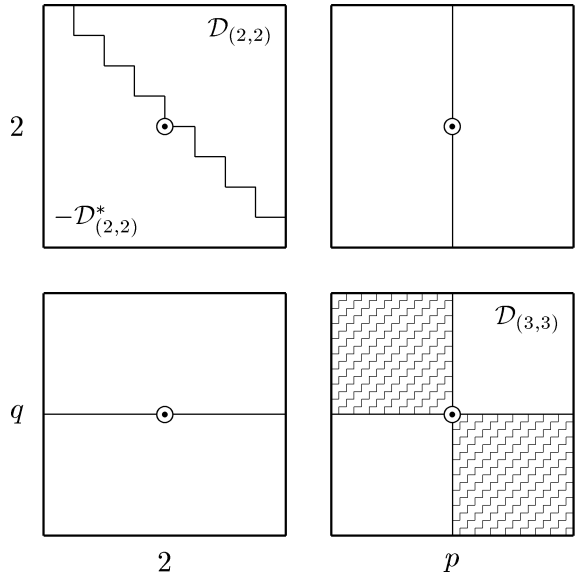

Рис. 3. Пример двух сопряженных $\mathscr{P}^2$-диаграмм

3.3. Пример. Рассмотрим 1-подгруппу $P = [(2^j, 2^{-j}) : j \in \mathbb{Z}]_1$ и соответствующую ей диаграмму $\mathscr{D} := \mathrm{Log}(P)$. Диаграммы $\mathscr{D}$ и $\mathscr{D}^*$ показаны на рис. 3.

Очевидно, что $P^* = [\{(2^{j-1}, 2^{-j}) : j \in \mathbb{Z}\}]_1$.

Модифицируя рассмотренный пример, нетрудно построить 1-подгруппу, не являющуюся рефлексивной. А именно, удалим одну ячейку из кодиаграммы $\mathscr{D}_{(3,3)}$. Тогда для построенной диаграммы $\widetilde{\mathscr{D}}$ мы будем иметь $\widetilde{\mathscr{D}}^* = \mathscr{D}^*$, следовательно, $\widetilde{\mathscr{D}}^{**} = \mathscr{D} \neq \widetilde{\mathscr{D}}$ и 1-подгруппа $\widetilde{P} := \mathrm{Exp}(\widetilde{\mathscr{D}}) = [\{(3 \cdot 2^j, 2^{-j}), (2^j, 3 \cdot 2^{-j}) : j \in \mathbb{Z}\}]_1$ не рефлексивна.

3.4. Доказательство теоремы 3.3. В этом пункте мы докажем теорему 3.3, которая утверждает, что существует естественное соответствие между 1-подгруппами в $\mathbb{Q}^2$ и оптимальными $\mathscr{P}^2$-диаграммами, задаваемое отображениями Exp и Log.

Пусть $u = (u^1, u^2) \in \mathbf{F}^2$ и P – 1-подгруппа в $\mathbb{Q}^2$. Обозначим

$$P_{(u)} := \big\{a \in P : \mathrm{Exp}(-u) \mid a \text{ и } a \mid \mathrm{Exp}(u)\big\}. \tag{3.10}$$

Ясно, что $P_{(u)} \subseteq P_{(v)}$, когда $u \leqslant v$. Отождествляя точки $a, \mathrm{Exp}(-u)|a$ и $a|\,\mathrm{Exp}(u)$, с элементами группы $G_{(u)} := \mathrm{Exp}(u)\mathbb{Z}^2 / \mathrm{Exp}(-u)\mathbb{Z}^2$, мы можем рассматривать $P_{(u)}$ как 1-подгруппу $G_{(u)}$. Итак, мы можем определить $\mathscr{D}_{(u)} := \mathrm{Log}\, P_{(u)} \subseteq \mathrm{T}(-u, u)$. Положим $\mathscr{D} := \bigcup_u \mathscr{D}_{(u)}$.

Зафиксируем некоторый индекс $u \in \mathbf{F}$ и рассмотрим $\xi \in \mathrm{T}_{(p_0,q_0)}$. По аналогии с (3.4) определим *сильные проекции*

$$\boldsymbol{\pi}^1_+ \mathscr{D}_{(u)\,p} := \bigcap_q \pi^1 \mathscr{D}_{(u)\,(p,q)}, \qquad \boldsymbol{\pi}^2_+ \mathscr{D}_{(u)\,q} := \bigcap_p \pi^2 \mathscr{D}_{(u)\,(p,q)}.$$

Будем писать $u \Vdash \xi \in \mathscr{D}$, если выполнены следующие условия:

$$\xi \in \mathrm{T}_{(p_0,q_0)}(-u, u), \qquad \xi^1 \in {}^c(\boldsymbol{\pi}^1_+ \mathscr{D}_{(u)\,p_0}), \qquad \xi^2 \in {}^c(\boldsymbol{\pi}^2_+ {}^c\mathscr{D}_{(u)\,q_0}).$$

Лемма 3.7. *Если $\{\mathscr{D}_{(u)}\}$ – произвольная неубывающая направленность $(-u, u)$-диаграмм и $\mathscr{D} = \bigcup_u \mathscr{D}_{(u)}$, то*

$$\mathrm{opt}(\mathscr{D}) = \{\xi \in \mathrm{T} : \exists\, u \Vdash \xi \in \mathscr{D}\}.$$

Доказательство. Из определения $\mathrm{T}^{[+]}$ непосредственно следует, что $\mathrm{T}^{[+]}(\mathscr{D}) = \bigcup_u \mathrm{T}^{[+]}(\mathscr{D}_{(u)})$. Рассмотрим $\xi \in \mathrm{opt}(\mathscr{D})$. Существуют u и v такие, что $\xi \in \mathrm{T}^{[+]}(\mathscr{D}_{(u)})$ и $\xi \in \mathscr{D}_{(v)}$. Положим $w = \max\{u; v\}$. Тогда $\xi \in \mathscr{D}_{(w)} \cap \mathrm{T}^{[+]}(\mathscr{D}_{(w)})$. Значит, $w \Vdash \xi \in \mathscr{D}$.

Обратно, если $\exists\, u \Vdash \xi \in \mathscr{D}$, то $\xi \in \mathscr{D}_{(u)} \subset \mathscr{D}$. Кроме того, $\xi \in \mathrm{T}^{[+]}(\mathscr{D}_{(u)}) \subset \mathrm{T}^{[+]}(\mathscr{D})$. Таким образом, $\xi \in \mathrm{opt}(\mathscr{D})$.

Теорема 3.8. *Если $\mathscr{D}_{(u)} = \mathrm{Log}\, P_{(u)}$, где $P_{(u)}$ заданы формулой* 3.10, *и $\mathscr{D} = \bigcup_u \mathscr{D}_{(u)}$, то*

$$\mathrm{Log}\, P = \mathscr{D}. \tag{3.11}$$

Доказательство. Так как $P = \bigcup_u P_{(u)}$ и $\mathscr{D}_{(u)} = \operatorname{Log} P_{(u)} \subset \mathscr{D}$, 1-подгруппа $P \subseteq \operatorname{Exp}(\mathscr{D})$.

Для того чтобы доказать, что $\operatorname{Exp}(\mathscr{D}) \subseteq P$, рассмотрим $s \Subset {}^c\mathscr{D}$ и положим

$$\mathscr{P}^{(1)} := \{p : s^1_p \neq 0\}, \qquad \mathscr{P}^{(2)} := \{q : s^2_q \neq 0\}.$$

Существуют $u_{(p,q)}$ такие, что $(s^1_p, s^2_q) \in {}^c\mathscr{D}_{(u)}$. Пусть

$$u := \max\bigl\{u_{(p,q)} : p \in \mathscr{P}^{(1)},\ q \in \mathscr{P}^{(2)}\bigr\}.$$

Тогда $s \Subset {}^c\mathscr{D}_{(u)}$, откуда $\operatorname{Exp} s \in P_{(u)} \subset P$.

Для завершения доказательства достаточно установить равенство $\operatorname{opt}(\mathscr{D}) = \mathscr{D}$. Действительно, если $\xi \in {}^c\mathscr{D}_{(p,q)}$, то $\xi \in {}^c\mathscr{D}_{(u)\,(p,q)}$ для некоторого u. Выберем последовательность $s = (s^i_p)_{\substack{i=1,2\\ p\in\mathscr{P}}} \Subset {}^c\mathscr{D}_{(u)}$, удовлетворяющую условию $(s^1_p, s^2_q) = \xi$, и положим

$$v := u + (\mathbf{1}_{\mathscr{P}^{(1)}}, \mathbf{1}_{\mathscr{P}^{(2)}}),$$

где $\mathscr{P}^{(i)}$ определяются, как и выше. Точка $\operatorname{Exp} s$ принадлежит $P_{(u)} \subset P_{(v)}$ при $v \geqslant u$. Значит, $s \Subset {}^c\mathscr{D}_{(v)}$. Таким образом, $v \Vdash \xi \in \mathscr{D}$. По предыдущей лемме $\xi \in \operatorname{opt}(\mathscr{D})$. Значит, $\operatorname{opt}(\mathscr{D}) = \mathscr{D}$ и $\operatorname{Log}(P) = \mathscr{D}$.

Теорема 3.3 является непосредственным следствием теоремы 3.8.

Сделаем в заключение замечание по поводу возможности аксиоматизации рассмотренной выше теории 1-подгрупп. Не вдаваясь в подробности, скажем лишь, что можно привести систему естественных аксиом, которой удовлетворяют рассмотренные выше классы 1-подгрупп в $\mathbb{Z}^d$, $\mathbb{Z}^d_{/D}$ и $\mathbb{Q}^d$ (те классы, для которых работают приведенные выше арифметические соображения). Точнее, эти классы естественным образом предстают как *модели Крипке* (см., например, [18]) данной аксиоматической теории. В связи с этим естественно поставить следующий вопрос. Можно ли получить *арифметическую классификацию* (т.е. утверждение о возможности перехода от одномерных "факторизаций" к многомерным) как логическое следствие аксиом и, таким образом, получить универсальное доказательство, применимое ко всем моделям?

3.5. Непосредственная классификация $\mathscr{P}^2$-диаграмм. Как мы увидим в § 4, для любого множества $\mathbb{P} \subset \mathbb{R}^2_+$ имеет место равенство $\mathsf{T}(\mathbb{P}) = \mathbb{P}^{**}$. Таким образом, для построения классификации тайлингов в $\mathbb{R}^2$ достаточно дать описание рефлексивных 1-подгрупп $\mathbb{R}^2$. Более того, двумерный случай необычен тем, что все рефлексивные 1-подгруппы P либо *рациональны*, т.е. $P = [cA]$, где $c \in \mathbb{R}^2_+$, $A \in \mathbb{Q}^2_{(1)}$, $A^{**} = A$, либо имеют вид $a\mathbb{Z}^2 \sqcup b\mathbb{Z}^2$.

В этом пункте мы дадим явную классификацию рефлексивных $\mathscr{P}^2$-диаграмм.[5] Рассмотрим пару сопряженных (оптимальных) $\mathscr{P}^2$-диаграмм $\mathscr{D}$ и $\mathscr{D}^*$. Если одна из этих диаграмм пуста, то другая равна T. Поэтому ниже мы рассматриваем лишь нетривиальный случай, когда $\mathscr{D}, \mathscr{D}^* \neq \varnothing$. Введем следующие обозначения (см. рис. 4):

$$\mathrm{T}^{[-]}(\mathscr{D}) := -\,\mathrm{T}^{[+]}(\mathscr{D}^*), \qquad \mathrm{T}^{\mathrm{I}}(\mathscr{D}) := \mathrm{T}^{[-]}(\mathscr{D}) \cap \mathrm{T}^{[+]}(\mathscr{D}), \tag{3.12}$$

$$\mathrm{T}^{-}(\mathscr{D}) := \mathrm{T}^{[-]} \setminus \mathrm{T}^{\mathrm{I}}, \qquad \mathrm{T}^{+}(\mathscr{D}) := \mathrm{T}^{[+]} \setminus \mathrm{T}^{\mathrm{I}}, \tag{3.13}$$

$$\mathrm{T}^{\varnothing}(\mathscr{D}) := \mathrm{T} \setminus (\mathrm{T}^{-}(\mathscr{D}) \sqcup \mathrm{T}^{\mathrm{I}}(\mathscr{D}) \sqcup \mathrm{T}^{+}(\mathscr{D})). \tag{3.14}$$

[5] Результаты этого пункта приводятся без доказательств.

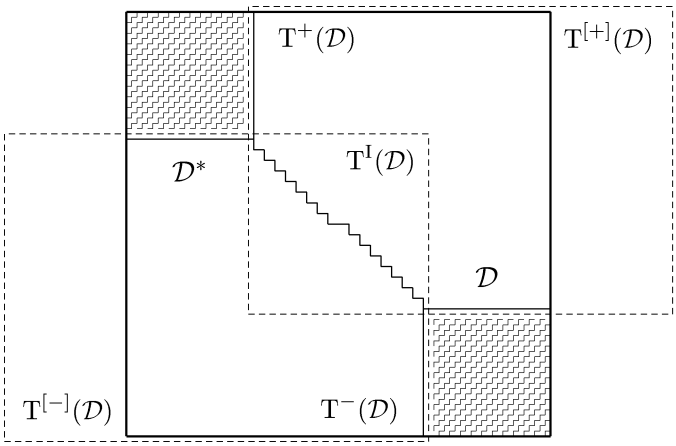

Рис. 4

Назовем *типом диаграммы* $\mathscr{D}$ последовательность

$$\mathbf{t}^{\pm}\mathscr{D} = \{\mathbf{t}_i^{\pm}\mathscr{D}_p : p \in \mathscr{P},\ i = 1, 2\},$$
$$\mathbf{t}_i^{\pm}\mathscr{D}_p := \begin{cases} \mathsf{R}, & \text{если } \boldsymbol{\pi}_{\pm}^{i}\mathscr{D}_p - \text{луч}, \\ \infty, & \text{если } \boldsymbol{\pi}_{\pm}^{i}\mathscr{D}_p = \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{3.15}$$

Далее, рассмотрим пересечение $\mathscr{I} = {}^{c}\boldsymbol{\pi}_{-}^{i}\mathscr{D}_p \cap {}^{c}\boldsymbol{\pi}_{+}^{i}\mathscr{D}_p$, где ${}^{c}\boldsymbol{\pi}_{\pm}^{i}\mathscr{D}_p$ есть, как обычно, объединение ячеек $\boldsymbol{\pi}_{\pm}^{i}\mathscr{D}_p$, рассматриваемых как замкнутое подмножество $\mathbb{R}$. $\mathscr{I}$ может иметь одну из следующих 5 форм: точка, отрезок, луч $(-\infty, a]$, луч $[a, +\infty)$ и прямая $(-\infty, +\infty)$, которые мы обозначим “0”, “I”, “$-$”, “$+$” и “∞”, соответственно. Пусть $\mathbf{t}_i^{\mathrm{I}}\mathscr{D}_p$ – форма $\mathscr{I}$. Последовательность $\mathbf{t}^{\mathrm{I}}$ будем называть последовательностью *типов взаимодействия* $\mathscr{P}^2$*-диаграммы* $\mathscr{D}$.

Лемма 3.9. *Типы* $\mathbf{t}_i^{\pm}\mathscr{D}_p$ *и* $\mathbf{t}_i^{\mathrm{I}}\mathscr{D}_p$, *рассматриваемые как функции от* p, *стабилизируются, когда* $p \to \infty$.

Значит, мы можем определить *асимптотические типы* $\mathbf{t}_{\infty,i}^{\pm}\mathscr{D}$ и $\mathbf{t}_{\infty,i}^{\mathrm{I}}\mathscr{D}$ как пределы соответствующих последовательностей при $p \to \infty$. Нетрудно показать, что $\mathbf{t}_{\infty}^{\mathrm{I}} = (\mathbf{t}_{\infty,1}^{\mathrm{I}}, \mathbf{t}_{\infty,2}^{\mathrm{I}})$ принадлежит множеству (см. рис. 5):

$$\mathfrak{T} := \big\{(0,0), (0,-), (0,+), (-,0), (+,0), (0,\infty), (\infty,0), (-,-), (+,+)\big\}. \tag{3.16}$$

Далее, для фиксированных $\varepsilon \in \{-,+\}$ и $i \in \{1,2\}$ рассмотрим последовательность $\mathbf{t}_i^{\varepsilon}\mathscr{D}_p$. Положим $\mathbf{t}_{\mathrm{f},i}^{\varepsilon}\mathscr{D}$ равным $\mathbf{t}_{\infty,1}^{\varepsilon}\mathscr{D}$, если $\mathbf{t}_i^{\varepsilon}\mathscr{D}_p \equiv \mathbf{t}_{\infty,1}^{\varepsilon}\mathscr{D}$, и равным $\{\mathsf{R}, \infty\} \setminus \{\mathbf{t}_{0,1}^{\varepsilon}\}$ в противном случае. Последовательность

$$\operatorname{red}\mathbf{t}^{\pm}\mathscr{D} := \big\{\mathbf{t}_{\mathrm{f},i}^{\pm}\mathscr{D}, \mathbf{t}_{\infty,i}^{\pm}\mathscr{D} : i = 1, 2\big\} \tag{3.17}$$

назовем *приведенным типом* $\mathscr{P}^2$*-диаграммы* $\mathscr{D}$. Перебором можно доказать следующее утверждение.

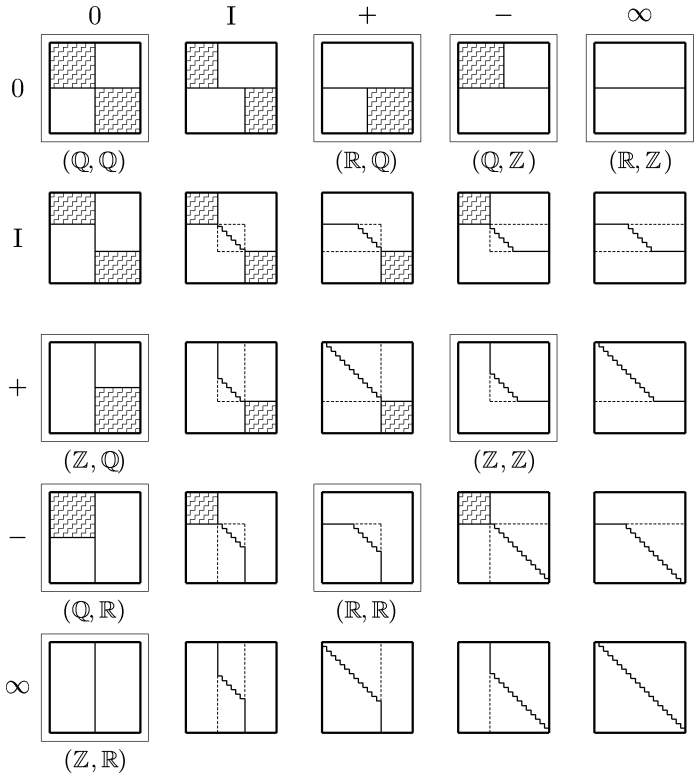

Рис. 5. Типы взаимодействия

Утверждение 3.10. *Для заданного асимптотического типа взаимодействия* $\mathfrak{t} \in \mathfrak{T}$ *существует лишь один допустимый приведенный тип* $\mathfrak{r}$. *Другими словами, существует единственный* $\mathfrak{r}$ *такой, что для любой* $\mathscr{D}$, *обладающей свойством* $\mathbf{t}^{\mathrm{I}}_{\infty}\mathscr{D} = \mathfrak{t}$, *приведенный тип* $\operatorname{red} \mathbf{t}^{\pm}\mathscr{D} = \mathfrak{r}$. *Более того, любая оптимальная* $\mathscr{P}^2$*-диаграмма* $\mathscr{D}$ *с* $\operatorname{red} \mathbf{t}^{\pm}\mathscr{D} = \mathfrak{r}$ *рефлексивна.*

Заметим, что при этом для любого приведенного типа $\mathfrak{r}$ существует $\mathscr{P}^2$-диаграмма $\mathscr{D}$ такая, что $\operatorname{red} \mathbf{t}^{\pm} = \mathfrak{r}$.

На рис. 6 мы перечисляем приведенные типы, соответствующие асимптотическим типам взаимодействия.

Далее, пусть $P = \operatorname{Exp}(\mathscr{D}) \in \mathbb{Q}^2_{(1)}$ и $\mathbf{t}^{\mathrm{I}}_{\infty} = \mathfrak{t}$. Рассмотрим пару проекций $(\pi^1 P, \pi^2 P)$. Мы будем классифицировать проекции $\pi^i P$ следующим образом: скажем, что проекция имеет тип "$\mathbb{Z}$", если $\pi^i P = a\mathbb{Z}$, тип "$\mathbb{R}$",[6] если $\pi^i P = \mathbb{Q}$, и тип "$\mathbb{Q}$", если $\pi^i P$ – некоторая собственная плотная подгруппа в $\mathbb{Q}$. Существует ровно $9 = 3^2$ типов проекций $(\pi^1 P, \pi^2 P)$.

Утверждение 3.11. *Существует взаимно однозначное соответствие между асимптотическими типами взаимодействия* $\mathfrak{t} \in \mathfrak{T}$ *и типами проекций* $(\pi^1 P, \pi^2 P)$ (см. рис. 6.).

Можно показать, что условия, приведенные выше, являются не только необ-

[6] Смысл этого обозначения состоит в том, что замыкание в $\mathbb{R}^2$ 1-подгруппы P, проекция $\pi^1 P$ которой имеет тип "$\mathbb{R}$", содержит горизонтальную прямую $\mathbb{R} \times b$.

	$\pi^1 P$	$\mathbb{Q}$		$\mathbb{Z}$		$\mathbb{R}$	
$\pi^2 P$	$\operatorname{red} \mathbf{t}_i^{\pm}$	$i=1$	$i=2$	$i=1$	$i=2$	$i=1$	$i=2$
$\mathbb{Q}$		1 $(0,0)$		2 $(0,+)$		3 $(-,0)$	
	$+$	∞ R	∞ R	R R	∞ R	∞ ∞	∞ R
	$-$	∞ R	∞ R	∞ R	∞ ∞	∞ R	R R
$\mathbb{Z}$		4 $(+,0)$		5 $(+,+)$		6 $(\infty,0)$	
	$+$	∞ R	R R	R R	R R	∞ ∞	R R
	$-$	∞ ∞	∞ R	∞ ∞	∞ ∞	∞ ∞	R R
$\mathbb{R}$		7 $(0,-)$		8 $(0,\infty)$		9 $(-,-)$	
	$+$	∞ R	∞ ∞	R R	∞ ∞	∞ ∞	∞ ∞
	$-$	R R	∞ R	R R	∞ ∞	R R	R R

Рис. 6. Приведенные типы, соответствующие допустимым асимптотическим типам взаимодействия

ходимыми, но и достаточными для того, чтобы две $\mathscr{P}^2$-диаграммы были взаимно сопряженными. Таким образом, нами получена классификация рефлексивных $\mathscr{P}^2$-диаграмм.

Сделаем несколько замечаний по поводу построенной арифметической классификации 1-подгрупп $\mathbb{Q}^2$. Во-первых, арифметическая классификация в ее одномерном варианте аналогична классификации подгрупп $\mathbb{Q}$, получаемой в теории *абелевых групп ранга один*. Соответственно, арифметическая классификация 1-подгрупп $\mathbb{Q}^2$ может рассматриваться как многомерное обобщение упомянутой классической конструкции.

Далее, заметим, что в одномерном случае рефлексивными (в смысле данного нами определения) являются только подгруппы вида $a\mathbb{Z}$, а также 0 и $\mathbb{Q}$. (Напомним, что рефлексивные 1-подгруппы P являются "хорошими" в смысле теории тайлингов, так как имеют вид $\mathsf{T}(\mathbb{P})$ для некоторой совокупности $\mathbb{P}$ прямоугольников.) Таким образом, теория типов для рефлексивных подгрупп $\mathbb{Q}$ "вырождается", а именно, все нетривиальные рефлексивные подгруппы $a\mathbb{Z}$ имеют один и тот же тип.

Кроме того, используя введенную выше терминологию, можно сказать, что асимптотические типы взаимодействия в случае размерности 1 исчерпываются одним типом "0". В двумерном же случае число различных асимптотических типов взаимодействия для нетривиальных рефлексивных $\mathscr{P}^2$-диаграмм равно 9. Это число можно уменьшить, рассматривая естественные симметрии 1-подгрупп и соответствующих им $\mathscr{P}^2$-диаграмм: сопряжение $(\,\cdot\,)^*$ и *транспозицию* $(\,\cdot\,)^{\mathsf{T}}$ – перестановку координат. Ясно, что эти симметрии индуцируют симметрии асимптотических типов взаимодествия (см. рис. 7), которые распадаются по отношению к этим симметриям на 4 класса.

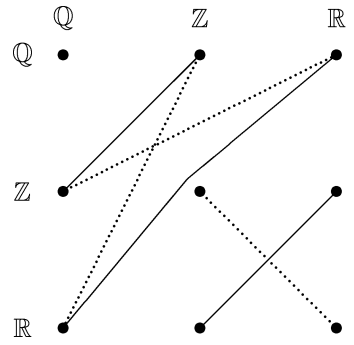

Рис. 7. Естественные симметрии допустимых асимптотических типов взаимодействия: $\vdots$ – сопряжение, $|$ – транспозиция

Наконец, рассмотрим две $\mathscr{P}^2$-диаграммы $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ с одними и теми же проекциями. Они могут отличаться только в *области взаимодействия* $\mathrm{T}^{\mathrm{I}}(\mathscr{A}) = \mathrm{T}^{\mathrm{I}}(\mathscr{B}) = \mathrm{T}^{\mathrm{I}}$. Более того, нетрудно показать, что существует лишь *конечное число* нетривиальных пересечений $\mathscr{D}_{(p,q)} \cap \mathrm{T}^{\mathrm{I}}_{(p,q)}$. Этот факт можно считать двумерным аналогом утверждения классической арифметики о том, что число простых чисел, входящих в разложение на простые множители, конечно.

§ 4. Прямоугольные тайлинги в $\mathbb{R}^2$

Сделаем, прежде всего, замечание о понятии упаковки в $\mathbb{R}^2$. Под *фигурой* мы будем понимать ограниченное измеримое относительно меры Лебега множество в $\mathbb{R}^2$. Скажем, что фигура F обладает $\mathbb{P}$-*упаковкой*, где $\mathbb{P} \subset \mathbb{R}^2_+$, если F обладает $\mathbb{P}$-упаковкой с точностью до множества меры 0, иными словами, если

$$\mathbf{1}_F = \sum_{\xi} \mathbf{1}_{[a_\xi .. a_\xi + h_\xi]}, \qquad a_\xi \in \mathbb{R}^2, \quad h_\xi \in \mathbb{P}. \tag{4.1}$$

Понятия *тайлинга* и *аппроксимирующего тайлинга* переносятся на случай $\mathbb{R}^2$ без изменения.

4.1. Критерий существования и классификация аппроксимирующих тайлингов в $\mathbb{R}^2$. Скажем, что 1-подгруппа P *связна*, если P нельзя представить в виде $P = A \sqcup B$, где $A, B \in \mathbb{R}^2_{(1)}$. Очевидно, что P может быть разложено на компоненты связности: $P = \bigsqcup_\xi P_\xi$.

Замкнутая 1-подгруппа P в $\mathbb{R}^2$ называется *рациональной*, если $P = c[A]$, где $c \in \mathbb{R}^2$ и $A \in \mathbb{Q}^2_{(1)}$. (Здесь $[\,\cdot\,]$ – топологическое замыкание.) Имеет место следующая простая лемма.

Лемма 4.1. *Если замкнутая* 1-*подгруппа* $P \in \mathbb{R}^2_{(1)}$ *связна, то* P *рациональна.*

Лемма 4.2. *Если число компонент связности* P *превосходит* 2, *то* $P^* = \varnothing$.

Доказательство. По предыдущей лемме каждая компонента связности P_ξ, $\xi \in \Xi$, 1-подгруппы P рациональна: $P_\xi = (c^1_\xi, c^2_\xi)A_\xi$, $A_\xi \in \mathbb{Q}^2_{(1)}$. Ясно, что для любой пары $\xi \neq \eta$ числа c^i_ξ и c^i_η независимы над $\mathbb{Q}$.

Предположим, что $\#\Xi \geqslant 3$ и зафиксируем различные $\xi, \eta, \zeta \in \Xi$ и собственные точки $c_\xi \in P_\xi$, $c_\eta \in P_\eta$ и $c_\zeta \in P_\zeta$. Пусть $(\alpha, \beta) \in P^*$. По определению сопряжения $\alpha \cdot c_\xi^1 = 0$ или $\beta \cdot c_\xi^2 = 0$. Без ограничения общности мы можем считать, что выполнено первое соотношение. Напомним, что $a \cdot \alpha$ обозначает действие на a характера, отождествляемого с $\alpha \in \mathbb{R}$, в частности,

$$a \cdot \alpha = 0 \iff a\,\alpha \equiv 0 \pmod 1.$$

Итак, $\alpha \cdot c_\eta^1 \neq 0$, откуда $\beta \cdot c_\eta^2 = 0$. Для третьего индекса имеем $\alpha \cdot c_\zeta^1 \neq 0$ и $\beta \cdot c_\zeta^2 \neq 0$. Таким образом, $P^* = 0$.

Следствие 4.3. *Рефлексивная 1-подгруппа $P \neq \varnothing$ в $\mathbb{R}^2$ может иметь либо одну либо две компоненты связности.*

Предположим, что число компонент P равно двум: $P = A \sqcup B$. Как A, так и B рациональны: $A = a[A']$, $B = b[B']$, $A', B' \in \mathbb{Q}^2_{(1)}$. Координаты a^i и b^i независимы над $\mathbb{Q}$. Рассмотрим точку $\alpha \in P^*$. По определению $a^i \cdot \alpha_i = 0$ для некоторого $i \in \{1, 2\}$. Очевидно, что $b^i \cdot \alpha_i \neq 0$. Следовательно, $b^{3-i} \cdot \alpha_{3-i} = 0$. Таким образом, множество P^* распадается на две части: $P^* = C_1 \sqcup C_2$, где

$$\begin{aligned} C_1 &:= P^* \cap (a^1)^{-1}\mathbb{Q} \times (b^2)^{-1}\mathbb{Q}, \\ C_2 &:= P^* \cap (b^1)^{-1}\mathbb{Q} \times (a^2)^{-1}\mathbb{Q}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Пусть $\alpha = ((a^1)^{-1}\xi_1, (b^2)^{-1}\xi_2)$ – некоторая точка множества C_1. Понятно, что для всех $(a^1x^1, a^2x^2) \in A$ выполнено $x^1 \cdot \xi^1 = 0$. Значит, $\xi^1 \in \operatorname{ann}(\pi^1 A)$, где $\operatorname{ann}(X)$ – аннулятор X. Аналогично, $\xi^2 \in \operatorname{ann}(\pi^2 B)$. Более того, если $\xi \in \operatorname{ann}(\pi^1 A) \times \operatorname{ann}(\pi^2 B)$, то $\xi \in C_1$. Таким образом,

$$P^* = \operatorname{ann}(\pi^1 A) \times \operatorname{ann}(\pi^2 B) \sqcup \operatorname{ann}(\pi^1 B) \times \operatorname{ann}(\pi^2 A), \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned} P^{**} = \operatorname{ann}(\operatorname{ann}(\pi^1 A)) &\times \operatorname{ann}(\operatorname{ann}(\pi^2 A)) \\ &\sqcup \operatorname{ann}(\operatorname{ann}(\pi^1 B)) \times \operatorname{ann}(\operatorname{ann}(\pi^2 B)). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Откуда следует, что если $P^{**} = P$, то

$$\begin{aligned} A &= \operatorname{ann}(\operatorname{ann}(\pi^1 A)) \times \operatorname{ann}(\operatorname{ann}(\pi^2 A)), \\ B &= \operatorname{ann}(\operatorname{ann}(\pi^1 B)) \times \operatorname{ann}(\operatorname{ann}(\pi^2 B)). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Поэтому можно считать, что $A = B = \mathbb{Z}^2$. Итак, мы приходим к следующей классификации 1-подгрупп $\mathbb{R}^2$.

Теорема 4.4. *Для рефлексивной 1-подгруппы P в $\mathbb{R}^2$ имеются следующие две возможности:*

1) *P рациональна, $P = c[A]$, $A \in \mathbb{Q}^2_{(1)}$, $A^{**} = A$;*
2) *$P = a\mathbb{Z}^2 \sqcup b\mathbb{Z}^2$.*

Рассмотрим множество $\mathbb{P} \subset \mathbb{R}^2$. Как и в $\mathbb{Z}^d$-случае, мы сопоставляем совокупности $\mathbb{P}$ замкнутый идеал $I(\mathbb{P}) \triangleleft L^1(\mathbb{Z}^2)$, порожденный индикаторами $\mathbf{1}_{[0..h]}$, где $h \in \mathbb{P}$. Наша следующая задача – классификация прямоугольных тайлингов в $\mathbb{R}^2$. Под классификацией тайлингов мы подразумеваем описание класса 1-подгрупп вида $\mathsf{T}(\mathbb{P})$, где $\mathsf{T}(\mathbb{P})$ – множество размеров прямоугольников, обладающих $\mathbb{P}$-тайлингом, т.е. прямоугольников $[0..h]$, обладающих свойством $\mathbf{1}_{[0..h]} \in I(\mathbb{P})$.

Теорема 4.5. *Имеет место тождество* $\mathsf{T}(\mathbb{P}) = \mathbb{P}^{**}$. *Другими словами, прямоугольник* $[0..h]$ *обладает* $\mathbb{P}$*-тайлингом тогда и только тогда, когда* $\widehat{\mathbf{1}}_{[0..h]} \in I(\mathbb{P})$.

Доказательство теоремы носит технический характер, поэтому мы его опускаем.

Заметим, что эта теорема дает не только классификацию тайлингов в $\mathbb{R}^2$, но и классификацию соответствующих идеалов в $L^1(\mathbb{Z}^d)$. Действительно, пусть $\mathbb{P}_1$ и $\mathbb{P}_2$ – два множества в $\mathbb{R}^2_+$ такие, что $\mathsf{T}(\mathbb{P}_1) = \mathsf{T}(\mathbb{P}_2)$. Если $[0..h] \in I(\mathbb{P}_2)$, то $h \in \mathbb{P}_2^{**} = \mathbb{P}_1^{**}$, следовательно, по теореме 4.5 индикатор $\mathbf{1}_{[0..h]} \in I(\mathbb{P}_1)$. Значит, $I(\mathbb{P}_2) \subseteq I(\mathbb{P}_1)$. Аналогично, $I(\mathbb{P}_1) \subseteq I(\mathbb{P}_2)$. Таким образом, $I(\mathbb{P}_1) = I(\mathbb{P}_2) \iff \mathsf{T}(\mathbb{P}_1) = \mathsf{T}(\mathbb{P}_2)$.

4.2. Пример связной рефлексивной 1-подгруппы $\mathbb{R}^3$, не являющейся рациональной. Рассмотрим множество $\mathbb{P} := \{(1,1,1), (\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon)\}$, где ε – некоторое положительное *иррациональное* число. Положим $P = [\mathbb{P}]_1^*$ (см. рис. 8). Очевидно, что P рефлексивна. Можно показать, что

$$P = \mathbb{Z} \times \varepsilon^{-1}\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \cup \varepsilon^{-1}\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \times \mathbb{Z} \cup \mathbb{R} \times \mathbb{Z} \times \varepsilon^{-1}\mathbb{Z} \\ \cup \varepsilon^{-1}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \cup \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \times \varepsilon^{-1}\mathbb{Z} \cup \mathbb{R} \times \varepsilon^{-1}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}. \qquad (4.6)$$

Следовательно, P не является рациональной и при этом является связной (даже линейно связной).

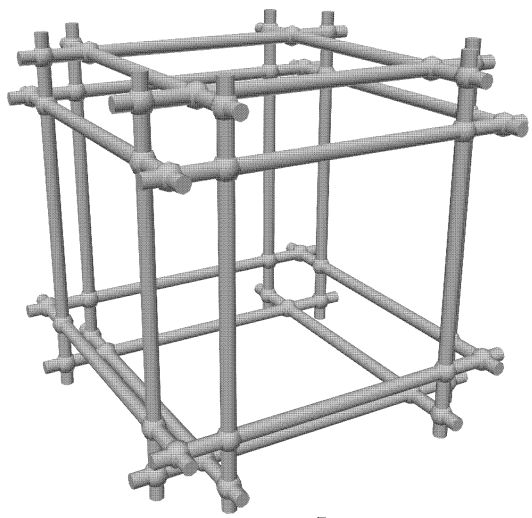

Рис. 8. Иллюстрация к п. 4.2. Здесь $\varepsilon \approx \frac{7}{5}$. Для наглядности линии обозначены тонкими цилиндрами, а точки пересечения – сферами

4.3. Необходимое условие существования конечного тайлинга. В этом пункте мы сформулируем необходимое условие существования конечного $\mathbb{P}$-тайлинга, предложенное В. Г. Покровским в [12] (см. также [11]). Пусть $\mathbb{P}$ – конечное множество d-мерных прямоугольников. Определим 1-подгруппу

$$\mathsf{L}(\mathbb{P}) := \left\{ b \in \mathbb{R}^d : \forall \{M_1, \ldots, M_d\}\, \exists\, i \;\; b^i = \sum_{a \in M_i} k_a a^i,\; k_a \in \mathbb{Z} \right\}, \qquad (4.7)$$

где $\{M_1, \ldots, M_d\}$ – покрытие множества $\mathbb{P}$.

Теорема 4.6 [12, теорема 1]. *Справедливо следующее*: $\mathsf{T}^{\mathrm{f}}(\mathbb{P}) \subseteq \mathsf{L}(\mathbb{P})$.

Покровский отмечает, что в $\mathbb{R}^d$ сформулированное условие не является достаточным, т.е., вообще говоря, $\mathsf{T}^{\mathrm{f}}(\mathbb{P}) \neq \mathsf{L}(\mathbb{P})$.

Нам понадобится обобщение результата Покровского на случай бесконечного множества $\mathbb{P}$. А именно, мы полагаем $\mathsf{L}(\mathbb{P})$ равным объединению множеств $\mathsf{L}(\mathbb{P}')$, где $\mathbb{P}'$ – конечные подмножества $\mathbb{P}$. Покажем, что утверждение 4.6 остается истинным.

Действительно, если прямоугольник $[0..h)$ обладает конечным тайлингом, то $h \in \mathsf{T}^{\mathrm{f}}(\mathbb{P}')$ для некоторого конечного множества $\mathbb{P}' \subset \mathbb{P}$. Следовательно, $h \in \mathsf{L}(\mathbb{P}') \subset \mathsf{L}(\mathbb{P})$.

Для произвольного множества $\mathbb{P}$ рассмотрим ряд

$$[\mathbb{P}]_1 \subseteq \mathsf{P}(\mathbb{P}) \subseteq \mathsf{T}^{\mathrm{f}}(\mathbb{P}) \subseteq \mathsf{L}(\mathbb{P}) \subseteq \mathsf{T}(\mathbb{P}) \overset{\flat}{=} [\mathbb{P}]_1^{**}. \tag{4.8}$$

Равенство ($\flat$) было доказано в теореме 4.5.

Следующий пример показывает, что, вообще говоря, $[\mathbb{P}]_1 \neq \mathsf{P}(\mathbb{P})$ и $\mathsf{L}(\mathbb{P}) \neq \mathsf{T}(\mathbb{P})$.

Пример 4.7. Пусть $\mathbb{P} = \{(\varepsilon, 1), (1, \varepsilon), (1-\varepsilon, 1-\varepsilon)\}$, где $\varepsilon \in (0,1)\setminus\mathbb{Q}$. Очевидно, что

$$[\mathbb{P}]_1 = (\varepsilon, 1)\mathbb{Z}^2 \sqcup (1, \varepsilon)\mathbb{Z}^2 \sqcup (1-\varepsilon, 1-\varepsilon)\mathbb{Z}^2. \tag{4.9}$$

Тем не менее, существует прямоугольник $[0..(1+\varepsilon, 1+\varepsilon))$, обладающий $\mathbb{P}$-упаковкой, но не принадлежащий $[\mathbb{P}]_1$. Ясно, что $\mathsf{L}(\mathbb{P}) = A \times A$, где A – подгруппа $\mathbb{R}$, порожденная 1 и ε. Следовательно, $\mathsf{L}(\mathbb{P}) \neq \mathsf{T}(\mathbb{P}) = \mathbb{R}^2$. Так как $\mathsf{P}(\mathbb{P}) \supseteq \pm\mathsf{P}_+(\mathbb{P})$, множество $\mathsf{P}_+(\mathbb{P}) \not\approx \mathsf{T}(\mathbb{P})$. Таким образом, $\mathbb{P}$-упаковки не являются асимптотически эквивалентными $\mathbb{P}$-тайлингам для данного $\mathbb{P}$ (см. определение ниже).

4.4. Рациональные прямоугольные тайлинги в $\mathbb{R}^2$. Если $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{Q}^2$, то мы говорим, что семейство прямоугольников $\mathbb{P}$ *рационально*.

Утверждение 4.8. *Если $\mathbb{P}$ рационально, то $[\mathbb{P}]_1 = \mathsf{L}(\mathbb{P})$.*

Доказательство. Действительно, так как $\mathbb{P}$ счетно, $\mathbb{P}$ аппроксимируется конечными множествами: $\mathbb{P} = \bigcup_{t=1}^{\infty} \mathbb{P}_t$, где $\mathbb{P}_t \subseteq \mathbb{P}_{t+1}$ и $\#\mathbb{P}_t < \infty$. Далее, все 1-подгруппы $[\mathbb{P}_t]_1$ являются *целыми*, т.е. $[\mathbb{P}_t]_1 \subseteq \nu_t\mathbb{Z}^d$. Значит, $[\mathbb{P}_t]_1 = \mathsf{L}(\mathbb{P}_t)$. Таким образом, $[\mathbb{P}]_1 = \bigcup_t [\mathbb{P}_t]_1 = \bigcup_t \mathsf{L}(\mathbb{P}_t) = \mathsf{L}(\mathbb{P})$.

Итак, в случае рациональных тайлингов ряд (4.8) принимает вид:

$$[\mathbb{P}]_1 = \mathsf{P}(\mathbb{P}) = \mathsf{T}^{\mathrm{f}}(\mathbb{P}) = \mathsf{L}(\mathbb{P}) \subseteq \mathsf{T}(\mathbb{P}) = [\mathbb{P}]_1^{**}. \tag{4.10}$$

Рассмотрим соотношение между $\mathbb{P}$-упаковками и $\mathbb{P}$-тайлингами в случае рациональных тайлингов.

Для любых двух множеств $A, B \in \mathbb{Q}^2$ определим расстояние

$$\mathrm{d}_\infty(A, B) := \inf_{L>0} \max\Big\{ \sup_{(L,L)\leqslant a\in A} \mathrm{dist}(a, B); \sup_{(L,L)\leqslant b\in B} \mathrm{dist}(b, A) \Big\}. \tag{4.11}$$

Пишем $A \approx B$, если $\mathrm{d}_\infty(A, B) = 0$.

Определение 4.9. Скажем, что $\mathbb{P}$-упаковки *асимптотически эквивалентны* конечным (аппроксимирующим) $\mathbb{P}$-тайлингам, если $\mathsf{P}_+(\mathbb{P}) \approx \mathsf{T}^{\mathrm{f}}(\mathbb{P})$ (соответственно, $\mathsf{P}_+(\mathbb{P}) \approx \mathsf{T}(\mathbb{P})$).

В $\mathbb{Z}^d$-случае мы имеем $\mathsf{P}_+(\mathbb{P}) \approx \mathsf{P}(\mathbb{P})$. Поэтому для проверки A-эквивалентности $\mathbb{P}$-упаковок и $\mathbb{P}$-тайлингов нам нужно было лишь сравнить 1-подгруппы $\mathsf{P}(\mathbb{P})$ и $\mathsf{T}(\mathbb{P})$. В $\mathbb{R}^2$ данное соображение непригодно. Поэтому рассматриваемая задача сложнее.

Теорема 4.10. *Если $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{Q}^2_+$, то $\mathsf{P}(\mathbb{P}) = \mathsf{T}(\mathbb{P})$ тогда и только тогда, когда 1-подгруппа $[\mathbb{P}]_1$ рефлексивна.*

Доказательство. Непосредственное следствие (4.10).

Опираясь на эту теорему, мы можем получить критерий A-эквивалентности $\mathbb{P}$-упаковок и аппроксимирующих $\mathbb{P}$-тайлингов для достаточно большого класса рациональных множеств $\mathbb{P}$.

Зафиксируем $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{Q}^2$ и рассмотрим для каждого $u \in \mathbb{F}$, $u_p \geqslant 0$, множество $\mathbb{P}_{(u)}$ точек $a \in \mathbb{P}$ таких, что $-u \leqslant \operatorname{Log} a \leqslant u$. Тогда $\bigcup_u \mathbb{P}_{(u)} = \mathbb{P}$. Заметим, что

$$\mathsf{P}_+(\mathbb{P}) = \bigcup_u \mathsf{P}_+(\mathbb{P}_{(u)}), \qquad \mathsf{P}(\mathbb{P}) = \bigcup_u \mathsf{P}(\mathbb{P}_{(u)}). \tag{4.12}$$

Определение 4.11. Направленность P_u 1-подгрупп назовем *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое u, что для всех $v, w \geqslant u$ выполняется неравенство $\mathrm{d}_\infty(P_v, P_w) < \varepsilon$. Скажем, что совокупность $\mathbb{P}$ *фундаментальна*, если направленность $[\mathbb{P}_{(u)}]_1$ является фундаментальной.

Замечание 4.12. В определении фундаментального множества направленность $\mathbb{P}_{(u)}$ можно заменить на любую другую аппроксимирующую направленность.

Верна следующая

Теорема 4.13. *Предположим, что совокупность прямоугольников $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{Q}$ фундаментальна. Тогда $\mathsf{P}_+(\mathbb{P}) \approx \mathsf{P}(\mathbb{P})$ и $\mathbb{P}$-упаковки асимптотически эквивалентны конечным $\mathbb{P}$-тайлингам. $\mathbb{P}$-упаковки A-эквивалентны аппроксимирующим $\mathbb{P}$-тайлингам тогда и только тогда, когда $[\mathbb{P}]_1 = [\mathbb{P}]_1^{**}$.*

Заметим, что в условии сформулированной теоремы фигурируют только 1-подгруппы (но не 1-подполугруппы).

Утверждение 4.14. *Если $\mathbb{P}^* \neq \varnothing$, то $\mathbb{P}$ фундаментальна.*

4.5. Пример множества $\mathbb{P}$, не являющегося фундаментальным. Будем представлять себе плоскость $\mathbb{R}^2$ как объединение квадратов $[a, a+1] \times [b, b+1]$, где $a, b \in \mathbb{Z}$. Пусть $P_0 := \mathbb{Z}^2$. Существует $n_1 = 2^{k_1}$ такое, что $3^2/n_1^2 < \frac{1}{4}$. Положим P_1 равным $(3,3)$-расширению 1-подгруппы $P_0 \cup \Phi_{(n_1,n_1)}(3^{-1}, 3^{-1})$. Скажем, что квадрат $C = (a, a+1) \times (b, b+1)$ *занят множеством* P_t, если $C \cap P_t \neq \varnothing$. Ясно, что плотность δ_1 квадратов, занятых P_1, не превосходит $3^2/n_1^2 < \frac{1}{4}$.

Предположим, что мы построили 1-подгруппы P_r, $0 \leqslant r < t$, удовлетворяющие следующим условиям: P_r является (n_r, n_r)-периодическим, $n_{r-1} | n_r$ и плотность[7] δ_r квадратов, занятых P_r, меньше, чем $1/2 - 1/2^r$.

[7] Так как P_r является (n_r, n_r)-периодическим, плотность квадратов, занятых P_r, есть не что иное, как отношение числа квадратов, занятых P_r, внутри $[0..(n_r, n_r)]$ к n_r^2.

Найдем такое простое p_t, что $p_t > 4n_{t-1}$. Пусть P_t – простое (p_t, p_t)-расширение $P_{t-1} \cup \Phi_{(n_t,n_t)}(l_t^{-1}, l_t^{-1})$, где $l_t = 3 \cdots p_t$ и $n_t = 2^{k_t} n_{t-1}$. Так как $p_t > 4n_{t-1}$, для любого квадрата $[a, a+1] \times [b, b+1]$, $(a, b) \in [0..(n_{t-1}, n_{t-1}))$, найдется точка $A = (\lambda^1 n_t/p_t, \lambda^2 n_t/p_t) \in P_t$, обладающая свойством $A \mod(n_{t-1}, n_{t-1}) \in C$. Более того, $A \mod(n_{t-1}, n_{t-1}) \in [a + \frac{1}{4}, a + \frac{3}{4}] \times [b + \frac{1}{4}, b + \frac{3}{4}]$. Пусть C – некоторый не занятый P_{t-1} квадрат. Такой квадрат должен существовать, так как плотность $\delta_{t-1} < \frac{1}{2} < 1$. Тогда точка A, построенная выше, займет некоторый не занятый ранее квадрат, причем $\operatorname{dist}(A, P_{t-1}) > \frac{1}{4}$.

Построенная таким образом последовательность P_t такова, что $\mathrm{d}_\infty(P_{t-1}, P_t) > \frac{1}{4}$, а следовательно, $P = \bigcup_t P_t$ не является фундаментальной. Теперь, используя приведенную конструкцию, мы можем без труда построить пример такой совокупности $\mathbb{P}$, что $\mathsf{P}_+(\mathbb{P}) \not\approx \mathsf{P}(\mathbb{P})$. Для этого достаточно положить

$$\mathbb{P} = \left\{(n_t(1 - p_t^{-1}), n_t(1 - p_t^{-1})) : 1 \leqslant t < \infty\right\}. \tag{4.13}$$

Авторы выражают благодарность участникам семинаров “Динамические системы и эргодическая теория”, “Дискретная геометрия и геометрия чисел” и “Тригонометрические суммы и их приложения” и особенно Д.В. Аносову, Н.П. Долбилину, Дж. Кингу, Н.Г. Мощевитину, В.В. Рыжикову и А.М. Стёпину за проявленный интерес к работе и плодотворные обсуждения.

Список литературы

1. *Гарднер М.* Путешествие во времени. М.: Мир, 1990.
2. *de Bruijn N. G.* Filling boxes with bricks // Amer. Math. Monthly. 1969. V. 76. P. 37–40.
3. *Brualdi R. A., Foregger T. H.* Packing boxes with harmonic bricks // J. Combin. Theory. Ser. B. 1974. V. 17. P. 81–114.
4. *de Bruijn N. G., Klarner D. A.* A finite basis theorem for packing boxes with bricks // Philips Research Rep. 1975. V. 30. P. 337–343.
5. *Katona G., Szász D.* Matching problems // J. Combin. Theory. Ser. B. 1971. V. 10. P. 60–92.
6. *Klarner D. A.* Brick packing puzzles // J. Recreational Math. 1973. V. 6. P. 112–117.
7. *Klarner D. A., Göbel F.* Packing boxes with congruent figures // Indag. Math. (N.S.) 1969. V. 31. P. 465–472.
8. *Barnes F. W.* Algebraic theory of brick packings I // Discrete Math. 1982. V. 42. №1. P. 7–27.
9. *Barnes F. W.* Algebraic theory of brick packings II // Discrete Math. 1982. V. 42. №2. P. 129–144.
10. *Pokrovsky V. G.* About dissection of an n-dimensional cube into congruent parallelepipeds // Math. Notes. 1981. V. 30. №6. P. 881–887.
11. *Pokrovsky V. G.* Linear relations in dissection into n-dimensional parallelepipeds // Math. Notes. 1985. V. 37. №6. P. 901–907.
12. *King J. L.* Brick tiling and monotone boolean functions // Preprint. Univ. of Florida, 1996.
13. *Prikhod'ko A. A.* Special representations of $\mathbb{Z}^n$-actions // J. Dynam. Control Systems. 1996. V. 2. P. 239–253.
14. *Халмош П.Р.* Лекции по эргодической теории. М.: ИЛ, 1969.
15. *Alpern S.* Return times and conjugations of antiperiodic automorphism // Ergodic Theory Dynam. System. 1981. V. 1. №2. P. 135–143.
16. *Rudolph D.* A two-valued step-coding for ergodic flows // Math. Z. 1976. V. 150. P. 201–220.
17. *Rudolph D.* Markovtilings of $\mathbb{R}^n$ and representations of $\mathbb{R}^n$-actions // Contemp. Math. 1987. V. 94. P. 271–290.
18. *Драгалин А.Г.* Математический интуиционизм: теория доказательств. М.: Наука, 1979.

Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию
29.12.1997