ДУ: экзамен 23 мая 2018 года; первый поток; вариант 1_1

На экзамене не разрешается: пользоваться электронными электронными приборами, конспектами, книгами и другими печатными или рукописными материалам; разговаривать и пользоваться помощью соседей.

Оценки: За ответ на каждый вопрос/задачу начисляются очки, максимальное количество очков указано в скобках перед вопросом/задачей; набранное количество очков складывается с очками, полученными за работу в семестре. Оценка определяется по итоговой сумме: 9-12 очков - удовлетворительно, 13-17 очков - хорошо, 18 и выше - отлично. **Зачёт идёт по 5 задачам!!!**

Задача 1.

(1) Сформулировать теорему о дифференцируемой зависимости от начальных условий решения задачи Коши.

(4) Найти образ касательного вектора $(1, 1)$, приложенного в точке $(0, 0)$, под действием преобразования фазового потока за время π системы

$$\begin{cases} \dot{x} &= e^x - \cos 2y \\ \dot{y} &= x + \sin y - y^2 \end{cases}.$$

Задача 2.

(1) Сформулировать теорему Ляпунова об устойчивости особых точек автономных векторных полей по первому приближению.

(4) Найти все особые точки системы

$$\begin{cases} \dot{x} &= 2y - xy \\ \dot{y} &= 2x^2 + 10x + y \end{cases}$$

и определить их тип. Нарисовать эскиз фазового портрета системы вблизи каждой из них.

Задача 3.

(1) Сформулировать теорему о числе независимых первых интегралов дифференцируемого векторного поля вблизи его неособой точки.

(4) Найти решение уравнения

$$2x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = -(1 + z^2)(x + y),$$

принимающее при $y = 1$ значение e^x.

ДУ: экзамен 23 мая 2018 года; первый поток; вариант 1_2

Задача 4.

(1) Сформулировать теорему об устойчивости линейных векторных полей.

(4) Исследовать на устойчивость систему

$$\dot{\mathrm{x}} = A(t)\mathrm{x} + f(t),$$

где

$$A(t) = \begin{cases} A_1, & \text{если} \quad [t] \in 2\mathbb{Z} \\ A_2, & \text{если} \quad [t] \in 2\mathbb{Z}+1 \end{cases} \quad \text{и} \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -\ln 2 & -\pi/2 \\ \pi/2 & -\ln 2 \end{pmatrix},$$

а f — непрерывное векторное поле на вещественной оси.

Задача 5.

(1) Дать определение мультипликатора предельного цикла. Написать формулу для мультипликатора предельного цикла на плоскости.

(4) Для векторного поля v системы

$$\begin{cases} \dot{x} &= -x + x^3 + e^x y + x e^{2x} y^2 \\ \dot{y} &= -x e^{-x} - (1-x)(1-x^2)y - e^x y^2 + (1-x)e^{2x} y^3 \end{cases}$$

найти образ f_*v под действием диффеоморфизма $f\colon (x,y) \mapsto (x, ye^x)$. Найти предельные циклы у v и f_*v, установить их тип.

Задача 6. Объект единичной массы на плоскости разогнали до скорости 20 метров в секунду, и дальше он начал движение по инерции с сопротивлением среды, пропорциональным квадрату скорости движения с коэффициентом 2.

(2) Через какое время скорость объекта уменьшится в четыре раза?

(3) Через какое время наблюдатель перестанет замечать движение объекта, если его приборы не различают скорости, меньшие 0.1 м/сек?