Динамические системы: Список задач к занятию №2 (*10.09.14*)

Группа A

1. Запишите, как действуют преобразования S^2, S^{-1}, S^0, где S — преобразование сдвига на пространстве Σ_2 двусторонних последовательностей из нулей и единиц.

2. Запишите в терминах координат x, y на квадрате $[0, 1)^2$, как действует преобразование T^{-1}, где T — преобразование пекаря.

3. Пусть Σ_2 и Σ_2^+ — пространства всех двусторонних (соответственно, односторонних) последовательностей из нулей и единиц, снабжённые тихоновской (слабой) топологией. Являются ли эти пространства изоморфными как топологические пространства?

4. Докажите, что топологическое пространство Σ_2^+ изоморфно канторовскому множеству.

5. Докажите, что множество Σ_2 является компактным.

6. Являются ли замкнутыми (или, наоборот, открытыми) следующие подмножества Σ_2 ?
а) $\{x\colon$ любой непрерывный блок из единиц в x имеет длину $\geq 3\}$
б) $\{x\colon$ x не содержит двух подряд идущих единиц$\}$
в) $\{x\colon$ плотность единиц в последовательности (x_i) больше и равна $1/2\}$

7. Предположим, что подмножество $X \subset \Sigma_2$ является одновременно замкнутым и инвариантынм относительно преобразования сдвига S. Верно ли, что X является компактным?

8. Найдите все неподвижные и все периодические точки преобразования сдвига, а также преобразования пекаря.

9. Найдите периодические траектории для преобразования $z \mapsto z^2$.

10. Найдите замыкание траектории потока T^t, порождённого постоянным векторным полем $v = (v_1, v_2)$ на торе $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ в общем случае и для: а) $v = (\sqrt{2}, \sqrt{3})$; б) $v = (\sqrt{2},\, 1/\sqrt{2})$.

Группа B

1. Рассмотрим дифференциальное уравнение, задающее малые колебания относительно невырожденного квадратичного потенциального поля на плоскости $\mathbb{R}^2$:

$$\ddot{X} = -\operatorname{grad} V(X),$$

где

$$V(X) = ax^2 + 2bxy + cy^2, \qquad X = (x, y),$$

причём форма $V(x)$ положительно определена. Найдите замыкание кривой $\gamma = (x(t), y(t))$ на плоскости $\mathbb{R}^2$, вдоль которой движется наша точка, при условии, что в момент времени $t = 0$ система находилась в точке (x_0, y_0) и имела нулевоую скорость.

Исследуйте случаи:
а) $V(X) = \omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2$;
б) $V(X) = 2x^2 + xy + 2y^2$;
в) $V(X) = 3x^2 + 2\sqrt{2}xy + 2y^2$.

2. Пусть $X \subset \Sigma_2$ — подмножество последовательностей (x_i), удовлетворяющих уравнению

$$x_i + x_{i+1} + x_{i+2} = 0 \pmod 2,$$

где i пробегает $\mathbb{Z}$. Является ли множество X открытым? инвариантным относительно сдвига?

3. Приведите пример инвариантного подмножества Σ_2, не являющегося ни замкнутым, ни открытым. Далее, постройте пример инвариантного подмножества Σ_2, которое является замкнутым, но не является открытым.

4. Пусть Y — инвариантное относительно сдвига, замкнутое *собственное* подмножество Σ_2. Верно ли, что Y никогда не является открытым?

5. Рассмотрим некоторое замкнутое подмножество $Y \subset \Sigma_2$. Пусть

$$Y' = \{y = \lim_{k_j \to \infty} S^{k_j} z, \text{ где } z \in Y\}.$$

Приведите пример Y, такого, что $Y' \neq Y$ и $\#Y' > 1$.

6. Постройте преобразование отрезка $[0, 1]$, изоморфное преобразованию пекаря.

Группа C

1. Существуют ли R_α-инвариантные борелевские меры, отличные от меры Лебега? Здесь R_α — преобразование поворота окружности.

2. Какими инвариантными мерами обладает поток T^t задачи 10(A) в зависимости от v ? Приведите примеры.

3. Может ли гомеоморфизм T компакта Σ_2 иметь конечное число $n > 1$ периодических точек? Может ли T иметь конечное число n неподвижных точек, и при этом ни одной периодической с периодом, больше единицы?

4. Предположим, что гомеоморфизм T компакта Σ_2 имеет бесконечное число периодических точек (орбит). Верно ли, что множество периодических точек всюду плотно в Σ_2 ?

5. Пусть $X = \Sigma_2^{(2)}$ обозначает пространство всех бесконечных двумерных "конфигураций" из 0 и 1, а именно, отображений $x\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{A} = \{0, 1\}$. Рассмотрим множество Y, состоящее из таких конфигураций, что любая связная компонента 0, либо 1 неограничена (бесконечна). Является ли множество Y замкнытым? открытым?

Комментарий

Задачи в группе A — домашнее задание.

Задачи повышенной сложности (B и C) позволяют получить бонусные баллы. Для того чтобы решение задачи из групп B и C было учтено, его необходимо записать, отсканировать (сфотографировать) и прислать по адресу `sasha.prihodko@gmail.com` до слудеющего вторника включительно.

Просьба сообщать о неточностях и опечатках в условиях.