

На экзамене не разрешается: пользоваться электронными приборами, конспектами, книгами и другими печатными или рукописными материалами; разговаривать и пользоваться помощью соседей.

Оценки: За ответ на каждый вопрос/задачу начисляются очки, максимальное количество очков указано в скобках перед вопросом/задачей; набранное количество очков складывается с очками, полученными за работу в семестре. Оценка определяется по итоговой сумме: 9-12 очков - удовлетворительно, 13-17 очков - хорошо, 18 и выше - отлично. **Зачёт идёт по 5 задачам!!!**

Задача 1.

- (1) Сформулируйте теорему о дифференцируемой зависимости от параметра решения задачи Коши.
- (4) Найти производную по параметру $\partial x/\partial \mu$ при $\mu = -1$ решения задачи Коши

$$\ddot{x} + \mu x = (\mu + 1)t, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = -\mu.$$

Задача 2.

- (1) Сформулируйте теорему Четаева.
- (4) Найти все неподвижные точки векторного поля

$$\begin{cases} \dot{x} = xy - 4 \\ \dot{y} = x - y - xy + y^2 \end{cases}$$

и определить их тип. Нарисовать эскиз фазового портрета системы вблизи каждой из них.

Задача 3.

- (1) Сформулируйте теорему о существовании полной системы первых интегралов для дифференцируемого векторного поля.
- (2) Найти общее решение уравнения $xz \frac{\partial z}{\partial x} + yz \frac{\partial z}{\partial y} = -xy$,
- (2) а также частное решение, удовлетворяющее условию $z|_{xy=1} = 1$.

Задача 4.

- (1) Что такое отображение Пуанкаре? Какими свойствами оно обладает?
- (2) Устойчив ли цикл, соответствующий решению $x = \sin t$ дифференциального уравнения

$$\ddot{x} + \dot{x} + x\ddot{x}(x + \ddot{x}) = 0 ?$$

- (2) Является ли он предельным?

Задача 5.

- (1) Найти векторное поле, определенное на интервале $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, с фазовым потоком

$$g^t: x \mapsto \operatorname{arctg}(t + \operatorname{tg} x),$$

- (2) проверить для него формулу изменения фазового объема,
- (2) написать уравнение в вариациях вдоль решения с начальным условием $x(0) = 0$.

Задача 6. Шар через пружину соединён с подвесом и неподвижен. Ударом ему сообщили небольшую скорость V м/сек по вертикали. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти

- (3) его закон движения, если в начальное положение с противоположной скоростью он пришел через 2 секунды,
- (2) какова частота его колебаний.